FORMUŁOWANIE ZADAŃ OPTYMALIZACYJNYCH W PROJEKTOWANIU MASZYN CZĘŚĆ II. REDUKCJA WYMIAROWOŚCI I BADANIE WRAŻLIWOŚCI

Ryszard ROHATYŃSKI*

*Uniwersytet Zielonogórski, Wydział Mechaniczny (profesor emerytowany)

r.rohatynski@wez.uz.zgora.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono wykorzystanie monotoniczności funkcji celu względem zmiennych projektowania oraz ograniczeń nierównościowych do redukcji rozmiaru matematycznego modelu optymalizacyjnego. Następnie opisano postępowanie przy wyborze rozwiązania ze zbioru pareto-optymalnego oparte na kryterium wrażliwości rozwiązań na odchyłki od wartości polioptymalnych.

1. WPROWADZENIE

Budowa matematycznego modelu stanowi ważną część pracy potrzebnej do wykonania optymalnego projektu. Z inżynierskiego punktu widzenia model powinien być tak prosty, jak to jest potrzebne dla podjęcia prawidłowych decyzji w procesie projektowania. Dekompozycja złożonego problemu zmniejsza wymiarowość jego części kosztem późniejszej koordynacji rozwiązań częściowych w celu uzyskania rozwiązania całości (Rohatyński, 2009).

Dekompozycja i algorytmy obliczeniowe nie wystarczają jednak do spełnienia postulatu racjonalnego uproszczenia matematycznego modelu optymalizacyjnego i jego dostosowania do procesu optymalizacji.

Przygotowanie modelu matematycznego do optymalizacji obejmuje także jego upraszczanie i redukcję rozmiarowości. W artykule pokazano wykorzystanie do tego celu dwóch własności: monotoniczności funkcji celu względem zmiennych projektowania oraz aktywności i dominacji ograniczeń. W rezultacie uzyskuje się nie tylko skrócenie czasu obliczeń, ale także wgląd w naturę problemu optymalizacyjnego.

W drugiej części artykułu przedstawiono metodę wartościowania rozwiązań polioptymalnych ze względu na ich wrażliwość na odchylenia zmiennych konstrukcyjnych od wartości optymalnych. W celu ułatwienia konstruktorowi interpretacji wyników i podejmowania właściwych decyzji zaproponowano odpowiednio wybrane narzędzia matematyczne i przedstawienia graficzne.

2. REDUKCJA WYMIAROWOŚCI PROBLEMU

Przed zastosowaniem któregoś z wielu dostępnych komputerowych programów optymalizacji model matematyczny powinien być uważnie sprawdzony i przeanalizowany. Formalna tylko poprawność matematycznego modelu zadania optymalizacji jest warunkiem koniecznym ale niewystarczającym dla zapewnienia skutecznego procesu rozwiązywania a ponadto nie ułatwia konstruktorowi poznania natury problemu. Ta konstatacja znajduje potwierdzenie w literaturze dotyczącej optymalizacji inżynierskiej. Podstawowe zasady formułowania zadań optymalizacji podano np. w pracy Papalambrosa i Wilde'a (2000) .

Jednym z niezwykle użytecznych pojęć związanych z formułowaniem zadań optymalizacyjnych jest monotoniczność funkcji.

Funkcja jest monotoniczna w rozpatrywanym zakresie pewnej zmiennej projektowania, jeśli niezmiennie rośnie (lub niezmiennie maleje) przy zmianie tej zmiennej w tym zakresie. Jeśli wzrost zmiennej projektowania powoduje zawsze taki sam efekt (tzn. przyrost lub zmniejszenie) każdej funkcji, w której występuje, to taka zmienna jest nazywana monotoniczną. Zostało udowodnione, że każda zmien-na projektowania, która ma własność monotoniczności względem funkcji celu, musi być odpowiednio ograniczona przez jakąś nierówność; w innym przypadku obszar poszukiwań będzie nieograniczony. Na przykład, jeśli problem wymaga maksymalizacji funkcji celu, która zawiera dodatnio monotoniczną zmienną projektowania, to maksymalna wartość tej zmiennej musi być ograniczona przez jakąś nierówność. W przeciwnym przypadku ta zmienna projektowania mogłaby rosnąć nieograniczenie, powodując nieograniczony wzrost funkcji celu.

W inżynierskich problemach optymalizacyjnych relacje nierównościowe (ograniczenia) odgrywają na ogół bardzo ważną rolę. W inżynierskich problemach projektowo-optymalizacyjnych zmienne projektowania zawierają się w określonych granicach, to jest posiadają maksymalne i minimalne wartości. Przestrzeganie tej reguły automatycznie zapobiega niedookreśloności funkcji celu.

Ze względu na wpływ na położenie optimum, ograniczenia nierównościowe dzielą się na aktywne i nieaktywne. Jeśli nierówność wpływa na położenie optimum, to jest ona aktywna. Natomiast nierówność, która może być pominięta bez skutku dla rozwiązania optymalnego, jest nieaktywna.

Z połączenia pojęcia monotoniczności z pojęciem aktywności ograniczeń wynikają dwie ważne zasady (Papalambros i Wilde, 2000):

1. Pierwsza zasada monotoniczności:
   W poprawnie sformułowanym problemie minimalizacji każda zmienna rosnąca monotonicznie jest ograniczona od dołu przez co najmniej jedno nierosnące aktywne ograniczenie.
2. Druga zasada monotoniczności:
   W poprawnie sformułowanym problemie minimalizacji każda zmienna nie występująca w funkcji celu jest ograniczona od dołu przez co najmniej jedno nierosnące ograniczenie i od góry przez co najmniej jedno niemalejące ograniczenie. Takie ograniczenia noszą nazwę „półaktywnych”.

Na podstawie pierwszej zasady monotoniczności można czasami łatwo określić, które ograniczenie jest aktywne. To zdarza się wtedy, gdy istnieje tylko jedna nierówność, która może ograniczyć od dołu zmienną występującą w funkcji celu. Taka nierówność nazywa się *krytyczną*. Jeśli natomiast zmienna występująca w funkcji celu może być ograniczona przez większą liczbę nierówności, to nierówność aktualnie aktywną nazywa się *dominującą*.

Pojęcie aktywności ograniczeń i pierwsza zasada monotoniczności mają duże znaczenie dla procesu optymalizacji. Ograniczenie, które zostało zidentyfikowane jako aktywne, zmniejsza o jeden liczbę stopni swobody zadania i może być wykorzystane do eliminacji jednej zmiennej. Ograniczenie nieaktywne może być pominięte. Należy jednak pamiętać o możliwości istnienia ograniczeń półaktywnych.

Wykorzystanie zasad monotoniczności do upraszczania modeli nie tylko ułatwia obliczenia i przyczynia się do lepszego zrozumienia problemu, ale czasami jest niezbędne dla otrzymania poprawnego rozwiązania. W stosunkowo prostych zadaniach optymalizacji, jakie czasem występują przy projektowaniu elementów i zespołów maszyn, można nawet czasem uniknąć obliczeń numerycznych i uzyskać analityczną postać rozwiązania problemu optymalizacji. Zostało to pokazane w pracy Rohatyńskiego (2002).

Na koniec trzeba wymienić dwie, łatwe do rozpoznania, sytuacje w których zadanie optymalizacyjne nie ma rozwiązania:

1. Jeśli liczba równań jest taka sama, jak liczba zmiennych projektowania, to taki model nie opisuje zadania optymalizacji. Zmienne można wtedy obliczyć jedną z metod rozwiązywania układów równań.
2. Liczba nie dublujących się ograniczeń aktywnych nie może być większa od liczby zmiennych projektowania.

3. BADANIE WRAŻLIWOŚCI ROZWIĄZAŃ OPTYMALNYCH

W projektowaniu często mamy do czynienia z przeciwstawnymi wymaganiami. Najlepsze rozwiązania tak postawionego problemu znajdują się na obrzeżu obszaru dopuszczalnego. Tworzą one zbiór rozwiązań nieulepszalnych, czyli optymalnych w sensie Pareto. Aby wybrać z tego zbioru jedno rozwiązanie, należy przyjąć dodatkowe kryterium różnicujące, które nie było uwzględnione w zbiorze kryteriów zadania optymalizacji. Nałożenie tego kryterium na zbiór pareto-optymalny umożliwia wskazanie w tym zbiorze rozwiązania optymalnego.

Samo znalezienie rozwiązania optymalnego to jeszcze nie wszystko (Dietrich, 1995). Jeśli uwzględnić, że decyzyjne zmienne projektowe są zmiennymi losowymi które przyjmują wartości z pewnego zakresu (Białas, 1986), to wrażliwość projektowanego obiektu technicznego na tę losowość musi być zbadana.

Ocena tej wrażliwości umożliwia racjonalny wybór tolerancji, a wiadomo, że jej wielkość ma istotny wpływ na koszty wytwarzania i właściwości projektowanego urządzenia (Humienny (red), 2004). Jest zatem uzasadnione badanie otoczenia rozwiązania optymalnego z uwzględnieniem odchyłek losowych.

Metoda wyznaczania rozwiązań polioptymalnych i ich wartościowania ze względu na wrażliwość rozwiązań polioptymalnych na odchyłki wielkości konstrukcyjnych była przedmiotem rozprawy doktorskiej K. Białasa-Heltowskiego (Białas-Heltowski i Rohatyński, 2005; Białas-heltowski, 2006), w której opracowano nową procedurę analizy i oceny zbioru rozwiązań polioptymalnych. Dla oceny wrażliwości zaproponowano szereg narzędzi matematycznych i przedstawienia graficzne, co znacznie ułatwia konstruktorowi interpretację wyników i podejmowanie właściwych decyzji. Zastosowanie metody pokazano na przykładzie optymalizacji reduktora, która była przedmiotem rozprawy doktorskiej D. Torzyńskiego (Torzyński, 2000). Opracowana przez Białasa-Heltowskiego procedura obejmuje następujące etapy:

- Formalizację problemu polioptymalizacji: wybór zmiennych decyzyjnych ZD i ich zakresów, ustalenie kryteriów oceny K oraz utworzenie modelu matematycznego badanego obiektu;
- Optymalizację wielokryterialną, której wynikiem jest zbiór rozwiązań Pareto-optymalnych;
- Redukcję zbioru Pareto przez zgrupowanie rozwiązań podobnych;
- Planowanie eksperymentu numerycznego dla analizy rozwiązań optymalnych;
- Tworzenie meta-modeli aproksymujących zależności K=f(ZD) równaniami powierzchni odpowiedzi (RPO);
- Ocenę statystyczną otrzymanych RPO;
- Tworzenie wykresów Pareto dla każdego kryterium w każdym rozwiązaniu optymalnym oraz wykresów profili odpowiedzi dla każdego kryterium w każdym rozwiązaniu polioptymalnym;
- Tworzenie wykresów gradientów równań powierzchni odpowiedzi dla każdego kryterium we wszystkich punktach polioptymalnych oraz mapy wpływów dla wszystkich kryteriów we wszystkich punktach polioptymalnych;
- Analizę uzyskanych informacji;
- Wybór spośród rozwiązań polioptymalnych z uwzględnieniem wrażliwości na zmiany wartości ZD.

Zaproponowana procedura ma charakter interakcyjny. Inżynier podejmuje decyzje na podstawie wyników obliczeń komputerowych i swojego rozeznania aktualnej sytuacji problemowej.

4. PODSUMOWANIE

W pierwszej części artykułu opisano wykorzystanie własności monotoniczności funkcji celu względem zmiennych projektowania oraz aktywności ograniczeń do zmniejszenia wymiarowości problemu optymalizacji, co umożliwia uproszczenie obliczeń, i ułatwia wgląd w naturę problemu optymalizacyjnego. W części drugiej przedstawiono metodę badania wrażliwości rozwiązań polioptymalnych na losowe odchylenia wartości zmiennych konstrukcyjnych. Dla ułatwienia konstruktorowi podejmowania właściwych decyzji zastosowano odpowiednio dobrane narzędzia matematyczne i wykresy.

Prace opisane w tym i poprzednim artykule (Rohatyński, 2009) mają na celu racjonalizację wykorzystania sformalizowanej wiedzy inżynierskiej zawartej we wzorach, wykresach, tablicach itp. oraz integrację ogólnych metod optymalizacji z procesem projektowo-konstrukcyjnym.

LITERATURA

1. **Białas S.** (1986), *Tolerancje geometryczne*, PWN, Warszawa.
2. **Białas-Heltowski K., Rohatyński R.** (2005), Narzędzia do badania zależności między wielkościami konstrukcyjnymi w obliczeniach, *Materiały XXII Sympozjonu PKM*, Tom 2, Gdynia-Jurata.
3. **Białas-Heltowski K.** (2006), *Wyznaczanie i ocena rozwiązań polioptymalnych na przykładzie wybranego układu technicznego*, Rozprawa doktorska, Wydział Mechaniczny Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra.
4. **Dietrich M.** (1995), *Podstawy konstrukcji*, Tom 1, WNT, Warszawa.
5. **Humienny Z. (red.)** (2004), *Specyfikacje geometrii wyrobów*, WNT.
6. **Papalambros P. Y., Wilde D. J.** (2000), *Principles of Optimal Design, Modeling and Computation*, Cambridge Uniwersity Press, New York.
7. **Rohatyński R.** (2009), Formułowanie zadań optymalizacyjnych w projektowaniu maszyn, Część I. Dekompozycja i tworzenie algorytmów obliczeniowych, *Materiały XXIV Sympozjonu PKM*, Białystok-Białowieża.
8. **Rohatyński R.** (2002), Wpływ monotoniczności zmiennych i aktywności ograniczeń na położenie optimum, *Polioptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania*, WNT.
9. **Torzyński D.** (2000), *Metoda zintegrowanego projektowania zębatych reduktorów przemysłowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań.

FORMULATION OF OPTIMIZATION PROBLEMS IN MACHINE DESIGN. PART II. REDUCTION OF THE PROBLEM DIMENSION AND SENSITIVITY INVESTIGATION

Abstract: The paper describes application of the monotonicity of the objective function and inequality constraints with respect to the design variables to the reduction of the mathematical optimization model dimension. Then a method of selection of pareto-optimal solutions has been outlined, which is based on the sensitivity of the solutions to their deviations from the poly-optimal values.