FORMUŁOWANIE ZADAŃ OPTYMALIZACYJNYCH W PROJEKTOWANIU MASZYN CZĘŚĆ I. DEKOMPOZYCJA I TWORZENIE ALGORYTMÓW OBLICZENIOWYCH

Ryszard ROHATYŃSKI[*]

[*]Uniwersytet Zielonogórski, Wydział Mechaniczny (profesor emerytowany)

r.rohatynski@wez.uz.zgora.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono matematyczne sformułowanie problemu optymalizacji. Następnie opisano metodę dekompozycji złożonych zadań optymalizacji za pomocą przekształcania macierzy występowania. Opisano również metodę tworzenia algorytmów obliczania elementów i zespołów maszyn.

1. WPROWADZENIE DO MATEMATYCZNYCH MODELI OPTYMALIZACJI

Optymalizacja projektowanego obiektu wymaga podejmowania decyzji w procesie projektowania. Formalny model matematyczny problemu optymalizacji ma postać jak niżej (Steward, 1965):

Należy znaleźć minimum $\boldsymbol{f(x)}$
przy ograniczeniach równościowych $\boldsymbol{h(x)=0}$
i nierównościowych $\boldsymbol{g(x) \leq 0}$ (1)
gdzie $\boldsymbol{x \in \chi \subseteq R^n}$

Skalarna funkcja celu $\boldsymbol{f(x)}$ służy jako kryterium porównawcze dla różnych alternatyw; funkcje $\mathbf{h}=(h^1, h^2, ..., h^m)^T$ i $\mathbf{g}=(g^1, g^2, ..., g^l)^T$ są ograniczeniami określającymi wykonalność obiektu, a $\mathbf{x}$ jest n-wymiarowym wektorem zmiennych projektowania, gdzie n jest liczbą skończoną. W wielu zadaniach konstrukcyjnych zmienne projektowana przyjmują ciągłe wartości rzeczywiste w n-wymiarowej przestrzeni rzeczywistej R^n, ale czasem zmienne projektowania mogą przyjmować tylko wartości dyskretne, jak na przykład standardowe pola powierzchni przekrojów lub zagadnienia wyboru struktury. W modelu (1) sformułowanym powyżej, typ wartości występujących w problemie optymalizacyjnym jest wyrażony przez zbiór $\boldsymbol{\chi}$. Do rozwiązywania zagadnień z ciągłymi zmiennymi najbardziej przydatne są, na ogół, metody rachunku różniczkowego.

Problemy projektowe często zawierają dwa lub więcej konkurujące cele, co prowadzi do wielokryterialnego problemu:

Należy znaleźć minimum $\boldsymbol{c(x)}$
przy ograniczeniach równościowych $\boldsymbol{h(x)=0}$
i nierównościowych $\boldsymbol{g(x) \leq 0}$ (2)
gdzie $\boldsymbol{x \in \chi \subseteq R^{n\ n}}$

W zestawie (2) $\boldsymbol{c}$ jest wektorem $\boldsymbol{I}$ kryteriów c^i. Dopuszczalne wartości $\boldsymbol{c(x)}$ tworzą osiągalny zbiór $\boldsymbol{A}$. Punkt w przestrzeni projektowania jest punktem Pareto-optymalnym jeśli nie istnieje żaden punkt w przestrzeni dopuszczalnej, który poprawiłby (zmniejszył) jedno kryterium bez pogorszenia (zwiększenia) wartości jednego lub więcej innych kryteriów.

Funkcje $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{h}$ i $\boldsymbol{g}$ mogą być wyrażeniami algebraicznymi ale mogą być również złożonymi algorytmami, które wymagają wewnętrznych obliczeń i programów komputerowych – co często bywa nazywane modelem symulacyjnym, jak to jest na przykład przy numerycznym rozwiązywaniu układu równań różniczkowych. Jeśli te funkcje są algebraicznymi (lub równoważnymi) zależnościami skończonego wektora zmiennych x, wtedy zestaw (1) przedstawia *problem matematycznego programowania.* Jeśli natomiast są tam różniczkowe lub całkowe operatory, a zmienne $x^i=x^i$ (t), $t \in R$, są określone w pewnej przestrzeni nieskończenie wymiarowej, to mamy *problem wariacyjny*.

Gdy wymiarowość problemu rośnie, bardzo szybko zwiększa się trudność rozwiązywania problemów optymalizacyjnych. Należy więc rozłożyć problem na mniejsze części, których rozwiązanie będzie łatwiejsze i następnie złożyć te cząstkowe rozwiązania aby otrzymać rozwiązanie całego problemu.

2. DEKOMPOZYCJA

Dekompozycję wygodnie jest wykonywać na macierzowej reprezentacji zależności $\boldsymbol{h(x)}$ i $\boldsymbol{g(x)}$. Idea dekompozycji zostanie przedstawiona na przykładzie *macierzy występowania*.

Macierz występowania R dla systemu składającego się z n ograniczeń, w których występuje *x* zmiennych jest macierzą *[sij]* rozmiaru $n \times x$, gdzie komórka *sij* jest zaznaczona jeśli zmienna x_j występuje w równaniu lub nierówności lub pusta, jeśli jest inaczej. Zatem macierz *[sij]* odwzorowuje zbiór zmiennych w system relacji. Macierz zawiera informację tylko o tym jakie zmienne występują w jakiej zależności a nie w jaki sposób one występują. W ten sposób, jak to wykazał Babirecki (2005), w macierzy występowania można przedstawić wiele rodzajów zależności: równania, nierówności, dane tablicowe i wykresy liniowe, nieliniowe, ciągłe, okresowo nieciągłe itd.

Na rysunku 1 pokazano pewien system zależności i odpowiadającą mu macierz występowania. Zależności te są odwzorowane w postaci neutralnej, to jest bez zaznaczenia zmiennych wyjściowych (zależnych) od wejściowych (niezależnych). Taka macierz nazywa się macierzą neutralną.

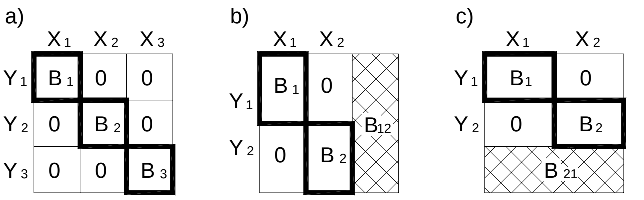
a)

$F_1(z_a, z_c, z_e)=0$
$F_2(z_b, z_f)=0$
$F_3(z_e, z_f, z_g)=0$
$F_4(z_a, z_d)=0$
$F_5(z_b, z_d)=0$
$F_6(z_b, z_f)=0$
$F_7(z_c, z_e, z_g)=0$

b)

	z_a	z_b	z_c	z_d	z_e	z_f	z_g
F_1	x		x		x		
F_2		x				x	
F_3					x	x	x
F_4	x	x					
F_5		x		x			
F_6		x				x	
F_7			x		x		x

Rys. 1. Konwersja relacji matematycznych do postaci macierzowej: a) system relacji b) jego macierz występowania



Rys. 2. Trzy typowe formy macierzy uporządkowanych a) macierz zdekomponowana złożona z trzech niezależnych bloków b) macierz zblokowana częściowo z wyłączeniem niektórych zmiennych c) macierz zblokowana częściowo z wyłączeniem niektórych zależności

Ułożenie neutralnej macierzy występowania jest pierwszym krokiem. Następnym jest przekształcenie macierzy w postać zblokowaną. Różne metody przekształcania „niezorganizowanej" macierzy są dobrze opisane w literaturze np. Babirecki i Rohatyński (2005), Kusiak i Wang (1992), Steward (1965). Nie zawsze można zdekomponować macierz w szereg niezależnych bloków. Trzy typowe formy macierzy pokazane są na rysunku 2.

Trzy bloki na rysunku 3a) przedstawiają trzy niezależne grupy zależności, które mogą być analizowane i rozwiązywane równocześnie. Macierz pokazana na rysunku 3b) składa się z dwóch podmacierzy, na które nałożone są zmienne widoczne po prawej stronie. Z powodu tych zmiennych podmacierze są powiązane i nie mogą być traktowane jako niezależne, chyba że zostaną poczynione specjalne założenia. Macierz pokazana na rysunku 3c) ma także dwa niezależne bloki zależności ale znajdują się

w niej także relacje na zewnątrz bloków widoczne u dołu macierzy. Możliwość rozwiązania bloków zależy od rozwiązania relacji zewnętrznych. W tym celu potrzebna jest semantyczna analiza znaczenia tych relacji.

Dla rozwiązywania częściowo dekomponowalnych macierzy typu 3b) i 3c) zaproponowano szereg postępowań, na przykład algorytm typu 'branch-and-bound' (Kusiak i Wang, 1992).

3. TWORZENIE ALGORYTMÓW OBLICZENIOWYCH

Jednym z podstawowych zadań, z którymi spotykają się inżynierowie mechanicy są obliczenia elementów i zespołów maszyn. Autorzy podręczników z zakresu podstaw konstrukcji maszyn nie zajmowali się opracowaniem ogólnych reguł wykonywania obliczeń. Pewne wskazówki można znaleźć w literaturze anglojęzycznej (Agrawal i inni, 1993). W podręcznikach i monografiach z dziedziny podstaw konstrukcji maszyn znajdują się wprawdzie wskazówki dotyczące doboru cech geometrycznych i materiałowych oraz przykłady rozwiązywania typowych zadań, obejmują one jednak tylko część przypadków występujących w praktyce inżynierskiej. Inny zestaw danych wejściowych, inny rodzaj obciążenia projektowanej części, inny materiał itd., to tylko niektóre czynniki powodujące zmiany toku obliczeń, konieczność przekształcania wzorów, przyjmowanie innych założeń wstępnych itd. Ponieważ w obliczeniach konstrukcyjnych występuje duża liczba zależności, to inżynier często zmuszony jest prowadzić obliczenia metodą prób i błędów. Określenie niezależnych od zadania reguł układania algorytmów obliczeniowych byłoby cenną pomocą dla konstruktorów, ułatwiłoby również badanie i racjonalizację procesów konstruowania. Poszukiwanie racjonalnych podstaw tworzenia algorytmów obliczania elementów maszyn wydaje się więc uzasadnione.

Tworzenie algorytmu obliczeniowego z neutralnej macierzy występowania zaczyna się od określenia zmiennych wejściowych. W ten sposób macierz neutralna staje się macierzą skierowaną. Wielkości wejściowe mogą być wprowadzane kolejno lub wszystkie jednocześnie. Jeśli wejścia są wprowadzane kolejno, to macierz skierowana jest uaktualniana krok po kroku przez usuwanie odpowiednich kolumn. Po każdej takiej operacji macierz powinna być ponownie przeanalizowana i uporządkowana. Takie postępowanie umożliwia wgląd w systemowe związki między relacjami. Jeśli wszystkie wielkości wejściowe wprowadzone są jednocześnie, to macierz jest uaktualniana tylko raz po tej operacji.

Proces tworzenia algorytmu obliczania elementów i zespołów maszyn sprowadza się na ogół do rozwiązywania układów równań o macierzach rzadkich. Przy wykorzystaniu macierzy skierowanej można go łatwo zrealizować. Ponieważ liczba oznakowanych komórek w wierszu macierzy oznacza liczbę niewiadomych w danej relacji, zatem jeśli w wierszu jest tylko jedna niewiadoma (jeden znak), to można ją wyznaczyć. Jeśli takich relacji nie ma, należy poszukać relacji tworzących układy dwóch równań z dwiema niewiadomymi, trzech z trzema niewiadomymi itd.

Wykorzystane wiersze są usuwane z macierzy, wraz z kolumnami reprezentującymi wyznaczone z tych relacji zmienne. Usunięte relacje stanowią pierwsze operacje obliczeniowe tworzonego algorytmu.

Po każdej operacji macierz przyjmuje nową postać i proces jest powtarzany do momentu, aż wszystkie wiersze i kolumny macierzy zostaną usunięte, co jest równoznaczne z zakończeniem tworzenia algorytmu obliczeniowego. Metoda, opracowana szczegółowo przez Babireckiego (2005), była też przedstawiana na konferencjach krajowych i zagranicznych (Babirecki i Rohatyński, 2005; Rohatyński i Babirecki, 2006).

4. PODSUMOWANIE

Przedstawiono formalne modele matematyczne problemu optymalizacji dla jednej funkcji celu i dla przypadku, kiedy problem zawiera dwa lub więcej konkurujące cele. Ponieważ problemy projektowo-konstrukcyjne często prowadzą do bardzo skomplikowanych modeli matematycznych, to pokazano jak rozłożyć problem na mniejsze części, których rozwiązanie będzie łatwiejsze i następnie złożyć te cząstkowe rozwiązania w rozwiązanie całego problemu. Podano niezależne od typu zadania reguły układania algorytmów obliczeniowych. Jest to cenna pomoc dla konstruktorów, ponieważ w obliczeniach konstrukcyjnych występuje duża liczba zależności, co powoduje, ze inżynier często zmuszony jest prowadzić obliczenia metodą prób i błędów.

LITERATURA

1. **Agrawal R., Kinzel G. L., Srinivasan R., Ishii K.** (1993), Engineering Constraint Management Based on an Occurence Matrix Approach, *Journal of Mechanical Design,* Vol. 115.
2. **Babirecki W., Rohatyński R.** (2005), Meta-algorytm Obliczeń Konstrukcyjnych w Projektowaniu Maszyn, *Materiały XXII Sympozjonu PKM*, Gdynia-Jurata.
3. **Babirecki W.** (2005), *Racjonalizacja Algorytmów Obliczeniowych Elementów i Zespołów Maszyn z Zastosowaniem Macierzy Zależności*, Rozprawa doktorska, Wydział Mechaniczny Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra.
4. **Eppinger S.** (1994), A Model-Based Method for Organizing Tasks in Product Development, *Research in Engineering Design*, Vol. 6, No. 1.
5. **Kusiak A., Wang J.** (1992), Decomposition in Concurrent Engineering, Kusiak A. (ed.), *Concurrent Engineering. Automation, Tools and Techniques*, Chapter 19, J. Wiley&Sons, New York.
6. **Papalambros P. Y., Wilde D. J.** (2000), *Principles of Optimal Design. Modeling and Computation*, Cambridge Uniwersity Press, New York.
7. **Rohatyński R., Babirecki W.** (2006), A Contribution to Methodology of Engineering Calculations, *Proc. of the Design 2006 Conference*, Zagrzeb.
8. **Steward D. V.** (1965), Partitioning and Tearing Systems of Equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 2, No. B.

FORMULATION OF OPTIMIZATION PROBLEMS IN MACHINE DESIGN PART I. DECOMPOSITION AND DEVELOPMENT OF CALCULATION ALGORITHMS

Abstract: The paper commences with presentation of fundamental principles of mathematical formulation of optimization problems. Then application of incidence matrices to decomposition of complex optimization problems has been described. Finally, a new method of development of calculation algorithms for elements and units of machines has been outlined.