

ANALIZA NIELINIOWA SAMOWZBUDNYCH DRGAŃ POWŁOKI CYLINDRYCZNEJ W OPLYWIE NADDŹWIĘKOWYM

Idzi NOWOTARSKI*

*Wojskowa Akademia Techniczna, Instytut Techniki Lotniczej, 00-908 Warszawa, ul. Gen. S. Kaliskiego 2

idzi.nowotarski@wat.edu.pl

Streszczenie: Praca zawiera analizę samowzbudnych drgań powłoki cylindrycznej o skończonej długości w opływie naddźwiękowym. Wyznaczono rozwiązanie równań ruchu i ustalono równanie częstości. Przedstawiono także wyniki obliczeń numerycznych rozpatrywanych zjawisk.

1. WSTĘP

Zagadnienia stateczności oraz drgań płyt i powłok w naddźwiękowym opływie są intensywnie badane od szeregu lat z uwagi na ich praktyczne zastosowania w budowie rakiet i samolotów (Bisplinghoff i Ashley, 1962; Dowell, 1970; Dźygałło Z. 1961, 1963, 1964, 1968a, b, c, 1970, 1974; Dźygałło i inni, 1967; Dźygałło i Olejnik, 1973; Kuo i inni, 1973; Matsuzaki i Kobayashi, 1971; Olson i Fung, 1967, 1968; Parthan i Johns, 1972; Platzer i inni, 1973; Wielgus, 1972; Болотин, 1961; Вольмир, 1972; Огибалов и Колтунов, 1969).

Sprężyste i dyssypacyjne własności takich struktur zależą od parametrów decydujących o ich samowzbudności. Przepływ naddźwiękowy zmienia częstości drgań własnych i tłumienie drgań również dla podkrytycznego zakresu wartości parametrów, gdy jeszcze nie występują drgania samowzbudne.

W przypadku, gdy na konstrukcję działają obciążenia jawnie zależne od czasu, powstają nieautonomiczne drgania, których charakter oraz przebieg będzie się zmieniał w zależności od parametrów opływającego gazu, przy czym istotne zmiany występują także w podkrytycznym zakresie prędkości przepływu.

Flutter płyt i powłok badano w ujęciu liniowym i nieliniowym stosując różne przybliżenia na różnicę ciśnień i siły aerodynamiczne, które działają na powierzchnię układu drgającego w naddźwiękowym opływie (Bisplinghoff i Ashley, 1962; Dowell, 1970; Dźygałło i inni, 1967; Dźygałło, 1961, 1963, 1964; Olson i Fung, 1967, 1968; Болотин, 1961; Вольмир, 1972; Огибалов и Колтунов, 1969). W nowszych pracach zwrócono uwagę na pełniejsze rozwiązania problemów niestacjonarnego opływu (Dźygałło, 1968b, c; Matsuzaki i Kobayashi, 1971; Parthan i Johns, 1972; Platzer i inni, 1973).

Nieautonomiczne drgania powierzchniowych układów aerosprężystych rozpatrywano na przykładzie płyt jedno- i wieloprzęsłowych w opływie, obciążonych okresowo zmiennym ciśnieniem lub parametrycznie pobudzającymi siłami. Wyznaczono rozwiązania zlinearyzowanych problemów (Dźygałło, 1968a; Wielgus, 1972). Zbadano rów-

nież nieliniowe oddziaływania drgań wymuszonych z samowzbudnymi na cyklach granicznych (Dźygałło, 1970, 1974). Badano także reakcję płyty w opływie na działanie obciążeń uderzeniowych (Dźygałło i Olejnik, 1973; Dźygałło, 1974) oraz powłoki (Dźygałło i inni, 1977b).

Niniejsza praca stanowi kontynuację prac Dźygałło i innych (1974, 1977a) w oparciu o implementacje numeryczne przystosowane do najnowszych technik obliczeniowych, w tym przypadku z wykorzystaniem środowiska MATLAB. W pracy przeprowadzono kompleksową analizę samowzbudnych nieliniowych drgań powłoki cylindrycznej o skończonej długości w opływie naddźwiękowym. Ustalono warunki występowania drgań samowzbudnych w zależności od formy odkształcenia powłoki, jej parametrów oraz liczby Macha przepływu.

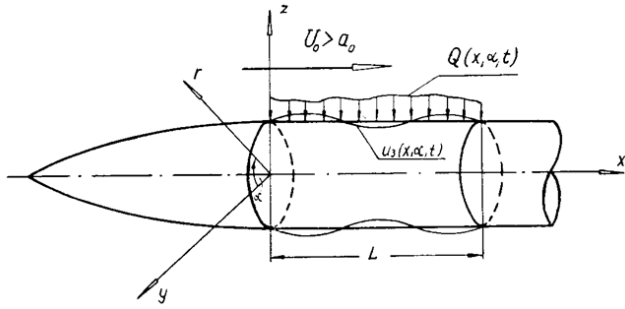
Rozwiązanie otrzymano stosując metodę rozwinięcia w szeregi względem funkcji własnych samosprężonego problemu brzegowego drgań rozpatrywanej powłoki w próżni przy założeniu, że na obu krawędziach powłoki są spełnione warunki przegubowego przesuwne podparcia.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozpatrzmy powłokę cylindryczną o długości L i promieniu R . Przyjmijmy, że jest ona częścią zaostrego ciała obrotowego opływającego z zewnątrz gazem z naddźwiękową prędkością U_0 skierowaną równoległe do osi ciała (rysunek 1).

Przyjmijmy, że na powierzchnię powłoki działają różnica ciśnień ΔP wywołana jej ruchem w opływie i nieliniowe siły sprężyste ΔQ zależne od tego ruchu oraz zmienne ciśnienie $Q = Q(x, a, t)$ spowodowane zewnętrznym zaburzeniem, które nie zależy od drgań badanej powłoki.

Założymy również, że przednia zaostzona część ciała jest sztywna i spełnia warunki umożliwiające zastosowanie teorii zlinearyzowanego potencjalnego przepływu naddźwiękowego (Dźygałło, 1968b, c).



Rys. 1. Szkic rozpatrywanej powłoki cylindrycznej i jej obciążeń

Równania ruchu powłoki przedstawimy w bezwymiarowej postaci przyjmując, że współrzędna osiowa x oraz składowe przemieszczenia środkowej powierzchni powłoki u_1, u_2, u_3 są odniesione do długości powłoki L , a czas t do ilorazu L/U_0 . Niesprężystość materiału powłoki uwzględnimy za pomocą modelu Voigta. Otrzymamy wówczas równania (Dźygadło, 1961; Dźygadło i inni, 1967):

$$\sum_{k=1}^3 L_{jk} u_k = A_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + [\lambda_0 (\Delta P + \Delta Q) + \lambda_2 P(x, \alpha, t)] \delta_{j3} \quad (1)$$

$$j = 1, 2, 3$$

gdzie

$$L_{jk} = \left(1 + \Theta \frac{\partial}{\partial t}\right) l_{jk}; \quad j, k = 1, 2, 3; \quad \Theta = \eta U_0 / L$$

$$l_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}; \quad l_{12} = \frac{1+\nu}{2R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \alpha} = l_{21}$$

$$l_{13} = \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial x} = l_{31}; \quad l_{22} = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

$$l_{23} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} - c_1^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \alpha} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} \right] = l_{32} \quad (2)$$

$$l_{33} = \frac{1}{R} + c^2 \nabla^2 \nabla^2; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

$$c^2 = \frac{h^2}{12L^2}; \quad c_1^2 = \frac{h^2}{12R^2}; \quad \bar{R} = \frac{R}{L}; \quad A_1 = A_2 = \lambda_1 M^2 = -A_3$$

$$P(x, \alpha, t) = -\frac{Q(x, \alpha, t)}{\rho_0 a_0^2}; \quad \lambda_0 = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{L}{h}; \quad \lambda_1 = \frac{1-\nu^2}{E} \rho_p a_0^2$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{L}{h} \rho_0 a_0^2; \quad M = \frac{U_0}{a_0}; \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{dla } j = k \\ 0 & \text{dla } j \neq k \end{cases}$$

oraz $u_j = u_j(x, \alpha, t)$ dla $j=1,2,3$ – składowe przemieszczenia środkowej powierzchni powłoki w kierunku osiowym, obwodowym i promieniowym odpowiednio; E – moduł sprężystości, ν – współczynnik Poissona, h – grubość powłoki, ρ – gęstość materiału powłoki, η – współczynnik

tłumienia materiałowego, ρ_0 i a_0 – gęstość gazu i prędkość dźwięku w niezaburzonym przepływie, M – liczba Macha.

Obciążenie zewnętrzne $P(x, \alpha, t)$ przyjmiemy w postaci:

$$P(x, \alpha, t) = P_n(x, t) \cos n\alpha \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Wówczas składowe przemieszczenia powłoki $u_j(x, \alpha, t)$ oraz różnicę ciśnień ΔP będziemy poszukiwać w następującej formie:

$$u_j(x, \alpha, t) = u_{jn}(x, t) \cos n\alpha \quad j = 1, 3 \quad (4)$$

$$u_2(x, \alpha, t) = u_{2n}(x, t) \sin n\alpha$$

oraz

$$\Delta P = \Delta P_n(x, t) \cos n\alpha \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\Delta Q = \Delta Q_n(x, t) \cos n\alpha \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

przy czym ΔP oznacza różnicę między ciśnieniem w przepływie niezaburzonym i zaburzonym drganiami powłoki, a ΔQ siły działające na powłokę pochodzące od jej kontaktu z dysypującym podłożem Winklera o sprężystości zależnej nieliniowo od przemieszczeń.

Rozpatrując opływ drgającej powierzchni powłoki w ramach potencjalnej teorii niestacjonarnego przepływu naddźwiękowego wykorzystamy rezultaty prac Dźygadło (1868b, c) i przyjmiemy różnicę ciśnień $\Delta P_n(x, t)$ w postaci wyrażenia różniczkowego:

$$\Delta P_n(x, t) = -\frac{\rho_0 U_0^2}{\mu} \left[\frac{\partial u_{3n}(x, t)}{\partial x} + \left(1 - \frac{1}{\mu^2}\right) \frac{\partial u_{3n}(x, t)}{\partial t} - \frac{u_{3n}(x, t)}{2R\mu} \right] \quad (6)$$

$$\mu = \sqrt{M^2 - 1}$$

które przedstawia główną część oddziaływania naddźwiękowego opływu na powłokę i jest słuszne dla umiarkowanych oraz dużych liczb Macha.

Natomiast nieliniowe siły sprężyste zależne od drgań badanej powłoki wyrażono zależnością

$$\Delta Q_n(x, t) = k_p [u_{3n}(x, t) + \varepsilon u_{3n}^3(x, t)] + c_p \frac{\partial u_{3n}(x, t)}{\partial t} \quad (6a)$$

k_p i c_p odpowiednio sztywność i tłumienie podłoża Winklera, a ε jest bezwymiarowym współczynnikiem wyrażającym stosunek sztywności podłoża przy członie nieliniowym do sztywności podłoża członu liniowego.

Problem rozwiążemy przy założeniu, że na krawędziach powłoki, dla $x=0$ i $x=L$ są spełnione warunki przegubowego przesuwego podparcia i rozwiązania będziemy poszukiwać w formie rozwinięć w szeregi względem układu funkcji własnych, samosprężonego problemu brzegowego drgań rozpatrywanej powłoki w próżni (Dźygadło i inni, 1967).

W związku z tym wprowadzimy funkcje:

$$X_k(x) = \sqrt{2} \sin k\pi x$$

$$Y_k(x) = \sqrt{2} \cos k\pi x \quad (7)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

względem których rozwiniemy obciążenie zewnętrzne (3), składowe przemieszczeń (4) oraz różnicę ciśnień (5).

Równania ruchu (1) napisano przy uwzględnieniu wszystkich trzech składowych sił bezwładności, działających na drgającą powłokę oraz zastosowaniu operatorów l_{jk} zgodnie z ogólną teorią powłok cylindrycznych według W. W. Nowożyłowa (Dźygadło i inni, 1967). Przyjmując w (1) i (2) $A_1=A_2=0$ i $c_1^2=0$, otrzymujemy równania ruchu bez uwzględnienia stycznych składowych sił bezwładności i według technicznej teorii powłok (Dźygadło, 1961), które stosowano na ogół w literaturze do analizy flatteru powłok.

W niniejszej pracy w odróżnieniu od prac Dźygadło i innych (1974, 1977a) obliczenia przeprowadzono wykorzystując pełne równania ruchu w ujęciu nieliniowym i zbadano warunki występowania drgań samowzbudnych w zależności od liczby fal przemieszczeń w kierunku obwodowym oraz parametrów powłoki i przepływu analizie poddając odpowiednie cykle graniczne.

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RUCHU

Założymy, że funkcja $P_n(x, t)$ przedstawiająca rozkład zewnętrznego obciążenia wzdłuż powierzchni powłoki jest funkcją całkowalną z kwadratem i można ją rozwinąć w szereg względem znormalizowanego układu funkcji $X_k(x)$.

W związku z tym funkcje występujące w rozwiązaniu (4) i obciążeniu (3) przedstawimy w postaci szeregów:

$$u_{1n}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(x) u_{1nk}(t)$$

$$u_{jn}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) u_{jnk}(t), j = 2, 3 \quad (8)$$

oraz

$$P_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) h_{nk}(t) \quad (9)$$

gdzie

$$h_{nk}(t) = \int_0^1 P_n(x, t) X_k(x) dx \quad (10)$$

Po podstawieniu zależności (3) – (6, 6a) i (8), (9) do równań (1) i zastosowaniu metody Galerkinia oraz wykonaniu szeregu przekształceń otrzymujemy niejednorodny, nieskończony układ równań różniczkowych o postaci:

$$-A_1 \ddot{u}_{1nj}(t) + c_{11j} w_{1nj}(t) + c_{12j} w_{2nj}(t) + c_{13j} w_{3nj}(t) = 0$$

$$c_{21j} w_{1nj}(t) - A_2 \ddot{u}_{2nj}(t) + c_{22j} w_{2nj}(t) + c_{23j} w_{3nj}(t) = 0 \quad (3.4)$$

$$c_{31j} w_{1nj}(t) + c_{32j} w_{2nj}(t) - A_3 \ddot{u}_{3nj}(t) + c_{33j} w_{3nj}(t) =$$

$$-\gamma_1 \dot{u}_{3nj}(t) - \gamma_2 u_{3nj}(t) + \gamma_3 \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} u_{3nk}(t) + \quad (11)$$

$$\gamma_4 \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk}^{lm} u_{3nj}(t) u_{3nk}(t) u_{3nm}(t) + \lambda_2 h_{nj}(t)$$

dla $j = 1, 2, 3, \dots$,

gdzie oznaczono:

$$w_{knj}(t) = u_{knj}(t) + \Theta \dot{u}_{knj}(t), \quad k = 1, 2, 3$$

$$c_{11j} = -j^2 \pi^2 - \frac{1-\nu}{2R} n^2, \quad c_{12j} = nj\pi \frac{1+\nu}{2R} = c_{21j},$$

$$c_{13j} = j\pi \frac{\nu}{R} = -c_{31j}, \quad c_{22j} = -\frac{1-\nu}{2} j^2 \pi^2 - \frac{1}{R^2} n^2$$

$$c_{23j} = -\frac{n}{R^2} - c_1^2 n \left[(2-\nu) j^2 \pi^2 + \frac{n^2}{R^2} \right] = -c_{32j}$$

$$c_{33j} = \frac{1}{R^2} + c^2 \left(j^2 \pi^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2, \quad (12)$$

$$\gamma_1 = \lambda_0 \frac{\rho_0 U_0^2}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) + \lambda_0 c_p$$

$$\gamma_2 = \lambda_0 \frac{\rho_0 U_0^2}{2R\mu^2} + \lambda_0 k_p,$$

$$\gamma_3 = \lambda_0 \frac{\rho_0 U_0^2}{\mu}, \quad \gamma_4 = \lambda_0 \varepsilon k_p$$

$$b_{jk} = \int_0^1 X_j(x) X_k(x) dx = -b_{kj} =$$

$$\begin{cases} \frac{2jk}{j^2 - k^2} [1 - (-1)^{j+k}] & \text{dla } j \neq k \\ 0 & \text{dla } j = k \end{cases}$$

$$c_{jk}^{lm} = \int_0^1 X_j(x) X_k(x) X_l(x) X_m(x) dx \quad - \text{całka zostanie}$$

obliczona numerycznie

Układ równań (11) może stanowić wyjściowy punkt do analizy ustalonych i niestacjonarnych drgań rozpatrywanej powłoki w naddźwiękowym optywie.

W celu efektywnego rozwiązania nieliniowego nieskończonego układu równań (11) zastąpiono je ich skończonym przybliżeniem przyjmując

$$j = 1, 2, \dots, M \quad (13)$$

oraz dokonano poniższych podstawień

$$U_{1nj}(t) = \frac{d}{dt} U_{2nj}(t) = \dot{U}_{2nj}(t) = \dot{u}_{1nj}(t)$$

$$U_{2nj}(t) = u_{1nj}(t)$$

$$U_{3nj}(t) = \frac{d}{dt} U_{3nj}(t) = \dot{U}_{3nj}(t) = \dot{u}_{2nj}(t) \quad (14)$$

$$U_{4nj}(t) = u_{2nj}(t)$$

$$U_{5nj}(t) = \frac{d}{dt} U_{5nj}(t) = \dot{U}_{5nj}(t) = \dot{u}_{3nj}(t)$$

$$U_{6nj}(t) = u_{3nj}(t)$$

które przekształcają układ równań rzędu drugiego (11) w równania rzędu pierwszego kosztem dwukrotnej ich liczby (2M), tj.

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{1nj}(t) &= \frac{1}{A_1} \left\{ c_{11j} [U_{2nj}(t) + \Theta U_{1nj}(t)] + c_{12j} [U_{4nj}(t) + \Theta U_{3nj}(t)] + c_{13j} [U_{6nj}(t) + \Theta U_{5nj}(t)] \right\} \\
\dot{U}_{2nj}(t) &= U_{1nj}(t) \\
\dot{U}_{3nj}(t) &= \frac{1}{A_2} \left\{ c_{21j} [U_{2nj}(t) + \Theta U_{1nj}(t)] + c_{22j} [U_{4nj}(t) + \Theta U_{3nj}(t)] + c_{23j} [U_{6nj}(t) + \Theta U_{5nj}(t)] \right\} \\
\dot{U}_{4nj}(t) &= U_{3nj}(t) \\
\dot{U}_{5nj}(t) &= \left\{ \frac{1}{A_3} \left\{ c_{31j} [U_{2nj}(t) + \Theta U_{1nj}(t)] + c_{32j} [U_{4nj}(t) + \Theta U_{3nj}(t)] + c_{33j} [U_{6nj}(t) + \Theta U_{5nj}(t)] \right\} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{A_3} \left[\gamma_1 U_{5nj}(t) - \gamma_2 U_{6nj}(t) - \gamma_3 \sum_{k=1}^M b_{jk} U_{6nj}(t) - \gamma_4 \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M c_{jk}^{lm} u_{3nj}(t) u_{3nl}(t) u_{3nm}(t) \right] \right\} \\
\dot{U}_{6nj}(t) &= U_{5nj}(t)
\end{aligned} \tag{15}$$

Efektownego rozwiązania równań (15) poszukiwać będziemy metodą numeryczną Rungego-Kutta, co pozwoli na śledzenie np. przebiegów cykli granicznych, przemieszczeń w funkcji czasu, widmowej gęstości mocy w funkcji zmiany różnych parametrów analizowanego układu.

Chcąc porównać parametry krytyczne flatteru ($h_{nj}(t) \equiv 0$) otrzymane z rozwiązania nieliniowego z ich liniowym przybliżeniem przedstawionym w pracy Dźygadło i innych (1977a), układ równań (11) zlinearyzowano przyjmując $\gamma_4 = 0$ oraz dokonano podstawień

$$\begin{aligned}
U_{1nj}(t) &= \frac{d}{dt} U_{2nj}(t) = \dot{U}_{2nj}(t) = \dot{u}_{1nj}(t) = \bar{u}_{1nj} ip e^{ipt} \\
U_{2nj}(t) &= u_{1nj}(t) = \bar{u}_{1nj} e^{ipt} \\
U_{3nj}(t) &= \frac{d}{dt} U_{3nj}(t) = \dot{U}_{3nj}(t) = \dot{u}_{2nj}(t) = \bar{u}_{2nj} ip e^{ipt} \\
U_{4nj}(t) &= u_{2nj}(t) = \bar{u}_{2nj} e^{ipt} \\
U_{5nj}(t) &= \frac{d}{dt} U_{5nj}(t) = \dot{U}_{5nj}(t) = \dot{u}_{3nj}(t) = \bar{u}_{3nj} ip e^{ipt} \\
U_{6nj}(t) &= u_{3nj}(t) = \bar{u}_{3nj} e^{ipt}
\end{aligned} \tag{16}$$

Po tych uwagach ostatecznie otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} c_{11j} [1 + \Theta ip] + A_1 p^2 & c_{12j} [1 + \Theta ip] & c_{13j} [1 + \Theta ip] \\ c_{21j} [1 + \Theta ip] & c_{22j} [1 + \Theta ip] + A_2 p^2 & c_{23j} [1 + \Theta ip] \\ c_{31j} [1 + \Theta ip] & c_{32j} [1 + \Theta ip] & -A_3 p^2 - c_{33j} [1 + \Theta ip] + \gamma_1 ip + \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1nj} \\ \bar{u}_{2nj} \\ \bar{u}_{3nj} \end{bmatrix} +$$

$$-\gamma_3 \sum_{k=1}^M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{jk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_{1nk} \\ \bar{u}_{2nk} \\ \bar{u}_{3nk} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M \tag{17}$$

Poszukiwane równanie częstości autonomicznego problemu samowzbudnych drgań powłoki cylindrycznej w optywie naddźwiękowej otrzymamy przyrównując do zera wyznacznik charakterystyczny problemu (17)

$$\Delta_M = \det \|\mathbf{C}_{jk}\| = 0, \quad j, k = 1, 2, \dots, M \tag{18}$$

W równaniu (3.11) wprowadzono w ogólnym przypadku zespoloną zredukowaną częstość oznaczając

$$p = (q - i\varepsilon) \omega_n \tag{19}$$

gdzie

$$\omega_n = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{E}{\rho_p a_0^2} \left[\frac{\pi^4}{R^2 \left(\pi^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} + \frac{\left(\pi^2 + \frac{n^2}{R^2} \right)^2}{1 - \nu^2} \right]} \tag{20}$$

jest podstawową częstością drgań własnych rozpatrywanej powłoki w próżni, dla danej liczby fal na obwodzie n i dla równań ruchu według technicznej teorii powłok (Dźygadło, 1961).

Równania częstości (18) podzielono na część rzeczywistą i urojoną, tj.

$$\operatorname{Re} \Delta_M = 0, \quad \operatorname{Im} \Delta_M = 0 \tag{21}$$

z których wyznaczyć można dla danych parametrów problemu częstości drgań własnych układu $q=q_k$, $k=1,2,3\dots$ oraz dekrementy zanikania $\varepsilon=\varepsilon_k<0$ dla drgań tłumionych lub wzrostu $\varepsilon=\varepsilon_k>0$ w przypadku niestatecznych drgań samowzbudnych.

W rozważanym przypadku występuje tłumienie materiałowe i aerodynamiczne. W związku z tym wyznacznik charakterystyczny (18) może być równy zero dla rzeczywistych wartości p tylko wówczas, gdy liczba Macha M jest równa jednej z krytycznych wartości $M=M_{kr}$, po przekroczeniu której w układzie powstają drgania samowzbudne.

4. ANALIZA NUMERYCZNA SAMOWZBUDNYCH DRGAŃ

W punkcie tym zajęto się zbadaniem przebiegu krytycznych parametrów samowzbudnych drgań w zależności od liczby fal na obwodzie powłoki n oraz szeregu innych danych.

Równanie częstości autonomicznego problemu drgań powłoki, tj. cylindrycznej części kadłuba samolotu w opływie naddźwiękowym otrzymano przy uwzględnieniu skończonej liczby M funkcji w rozwinięciach przedstawiających rozwiązanie problemu lecz w odróżnieniu od prac Dżygałdo i innych (1977a, b) zastosowano we wszystkich obliczeniach zarówno liniowych (17) jak i nieliniowych (15) pełną teorię powłok.

W celu zbadania mechanizmu utraty stateczności drgań kadłuba samolotu przeprowadzono numeryczne obliczenia rzeczywistych pierwiastków q równań (21), przy $\varepsilon=0$, dla szeregu wartości liczby fal na obwodzie n oraz liczby Macha M .

Numeryczne obliczenia wykonano dla powłoki duralowej, przyjmując zgodnie z równaniami (2) poniższe wartości stałych współczynników

$$\bar{R} = 0,25, \quad c^2 = 8,3333 \cdot 10^{-8}, \quad c_1^2 = 1,3333 \cdot 10^{-6}$$

$$\lambda_0 = 1,2639 \cdot 10^{-8}, \quad \lambda_1 = 4,1640 \cdot 10^{-3}, \quad (22)$$

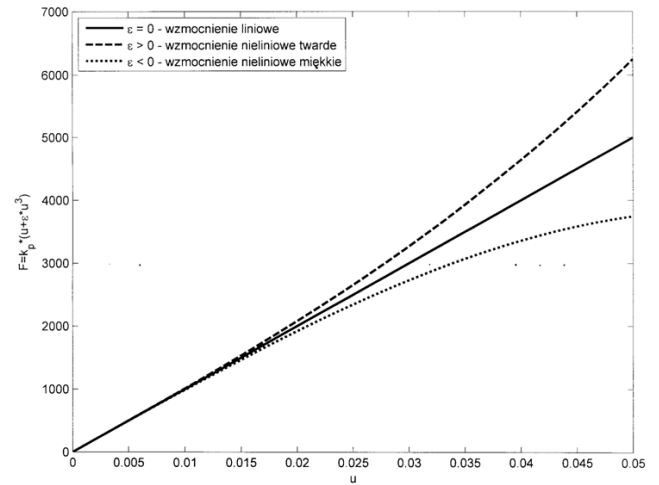
$$\lambda_2 = 1,8263 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon = k_p^N / k_p$$

gdzie k_p^N – współczynnik sztywności przy nieliniowym członie wyrażenia (6a). Bezwymiarowy parametr ε , który charakteryzuje rodzaj wzmocnienia zilustrowano na rysunku 2.

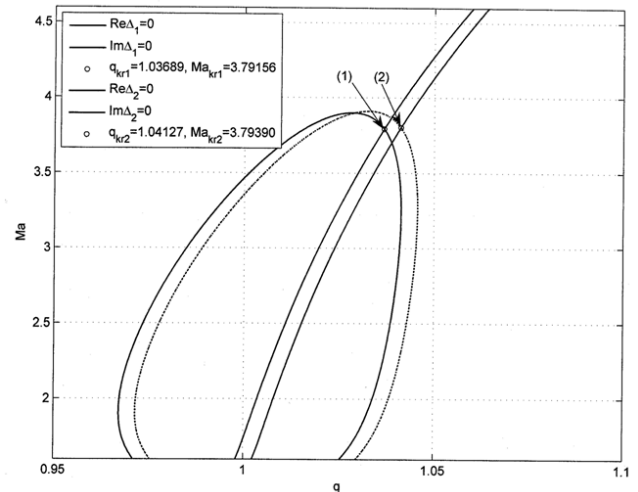
Przykładowe, typowe wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 3 oraz rysunku 4. Punkty przecięcia linii $\text{Re}\Delta=0$ i $\text{Im}\Delta=0$ wyznaczają krytyczne wartości liczby Macha oraz odpowiadające im rzeczywiste częstości $q=q_{kr}$. Po przekroczeniu M_{kr} występuje utrata stateczności drgań dla danej postaci własnej – pojawiają się drgania samowzbudne (rysunek 3, wariant (2)). Wprowadzenie sprężystego podparcia wzdłuż tworzącej powłoki zwiększa rzeczywistą częstość drgań q_{kr} oraz minimalnie krytyczną liczbę Macha M_{kr} (rysunek 4, wariant 2).

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że w przypadku powłoki cylindrycznej o skończonej długości niestateczne drgania występują po przekroczeniu dwu kolejnych częstości własnych, podobnie jak dla płaskich układów powierzchniowych (Bisplinghoff i Ashley, 1962). Obecnie jednak w zależności od liczby fal na obwodzie n (rysunek

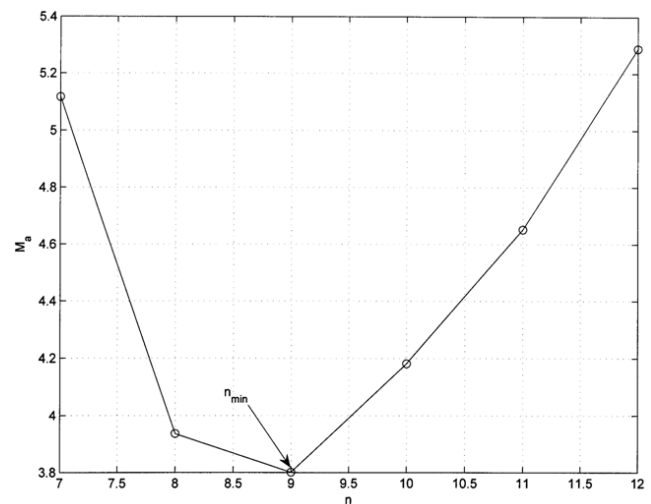
4) minimalna wartość M_{kr} może wystąpić po połączeniu pierwszej i drugiej lub wyższych kolejnych częstości własnych.



Rys. 2. Typy wzmocnienia w funkcji parametru ε

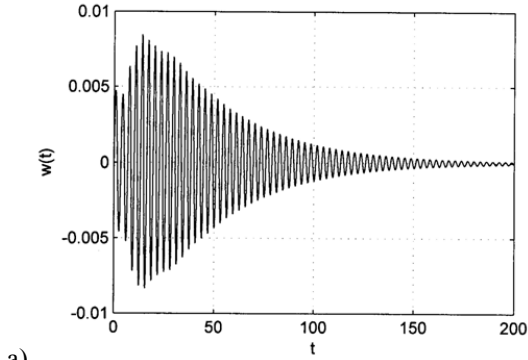


Rys. 3. Linie $\text{Re}\Delta=0$ i $\text{Im}\Delta=0$ na płaszczyźnie M_a, q
 Wariant (1) – $m=8, n=9, \Theta=0,001, k_p=0, c_p=0, \varepsilon=0$
 Wariant (2) – $m=8, n=9, \Theta=0,001, k_p=10^5, c_p=0, \varepsilon=0$

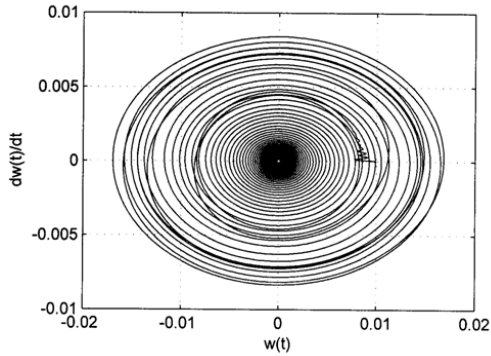


Rys. 4. Wykres zmiany M_{kr} w funkcji liczby fal n na obwodzie korpusu rakiety

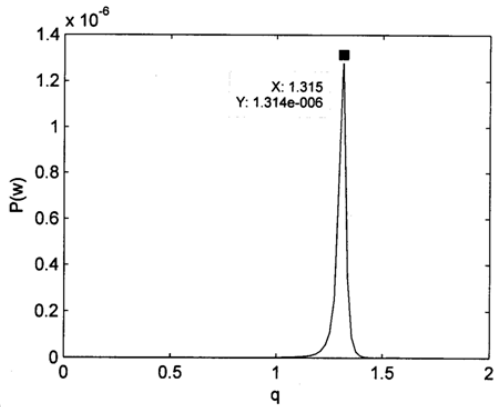
Wpływ nieliniowego członu sprężystego (6a) badano śledząc kolejno przebiegi cykli granicznych, wykresy przemieszczeń w funkcji czasu oraz widmową gęstość mocy $P(w)$ w funkcji zmiany sztywności podpory k_p i bezwymiarowego parametru ε . Otrzymane przykładowe wyniki obliczeń zilustrowano na rysunkach 5 – 11.



a)

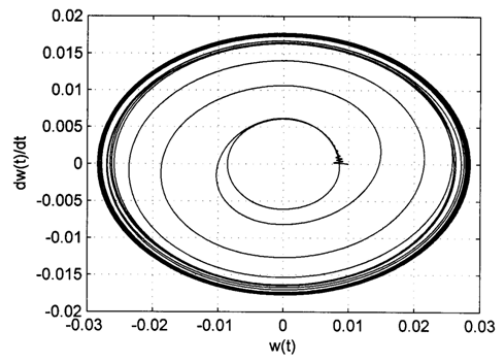


b)

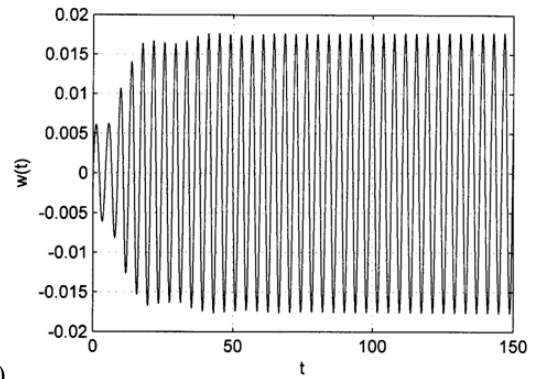


c)

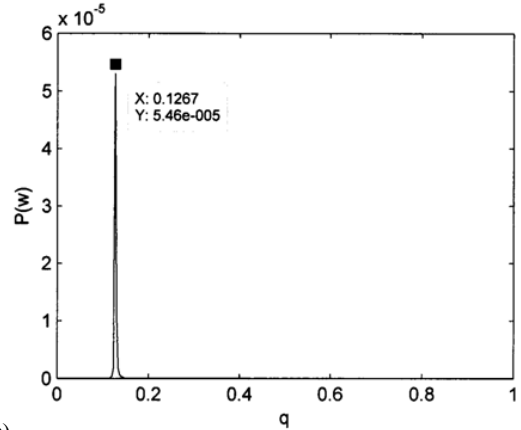
Rys. 5. Podstawowe charakterystyki drgań nieliniowych powłoki dla stałych parametrów: $m=8$, $n=9$, $\Theta=0,001$, $k_p=10^5$, $c_p=0$, $\varepsilon=0$ oraz zmiennej liczby Macha przepływu $M=3$



a)

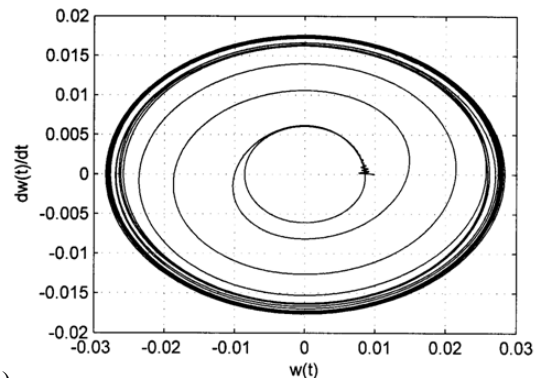


b)

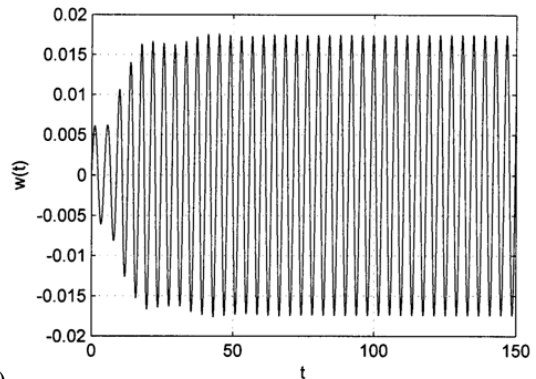


c)

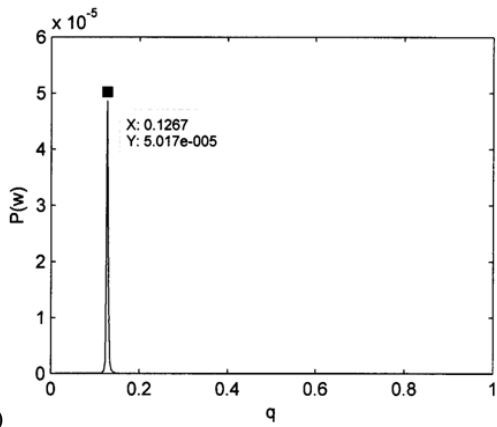
Rys. 6. Podstawowe charakterystyki drgań nieliniowych powłoki dla stałych parametrów: $m=8$, $n=9$, $\Theta=0,001$, $k_p=10^5$, $c_p=0$, $\varepsilon=0$ oraz zmiennej liczby Macha przepływu $M=M_{kr}^L=3,79390$



a)

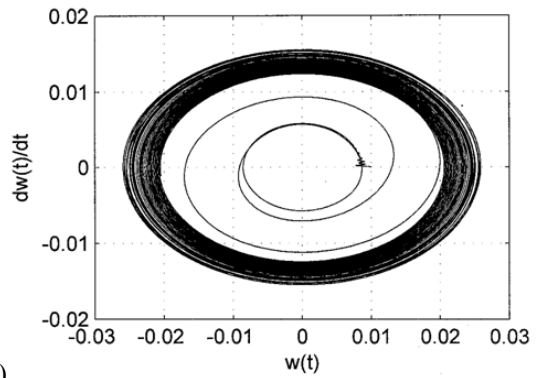


b)

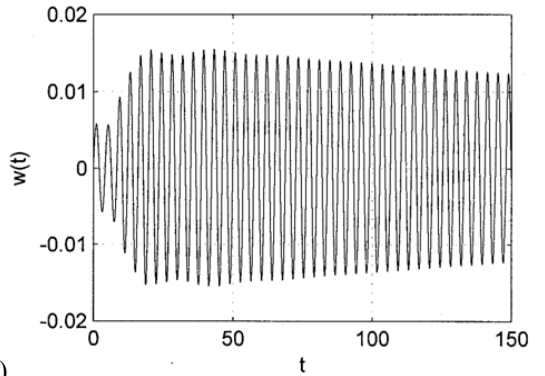


c)

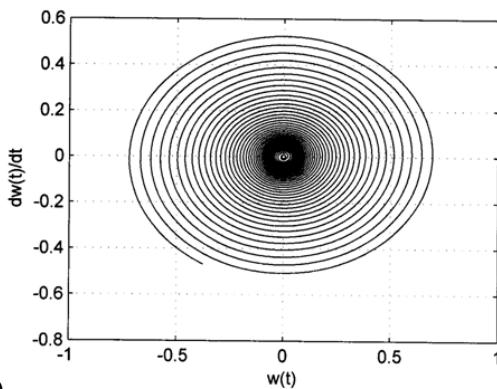
Rys. 7. Podstawowe charakterystyki drgań nieliniowych powłoki dla stałych parametrów: $m=8$, $n=9$, $\Theta=0,001$, $k_p=10^5$, $c_p=0$, $\varepsilon=0$ oraz zmiennej liczby Macha przepływu $M=M_{kr}^N=3,80076$



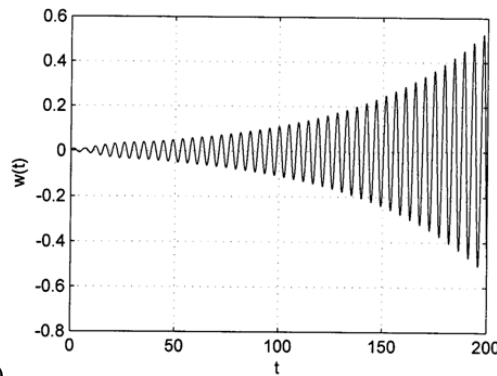
a)



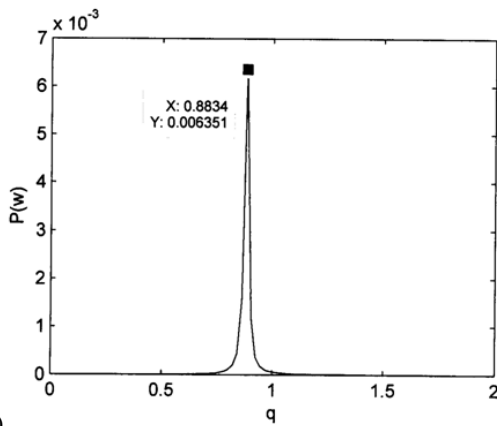
b)



a)

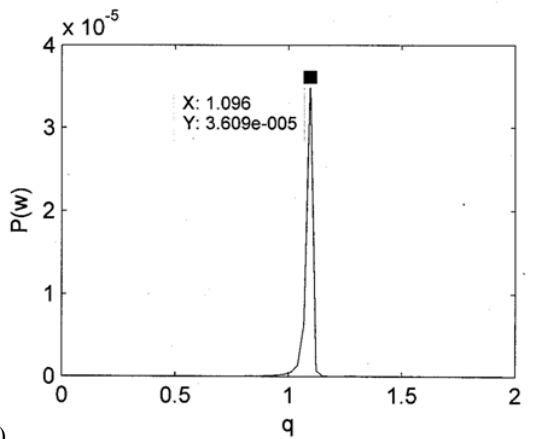


b)



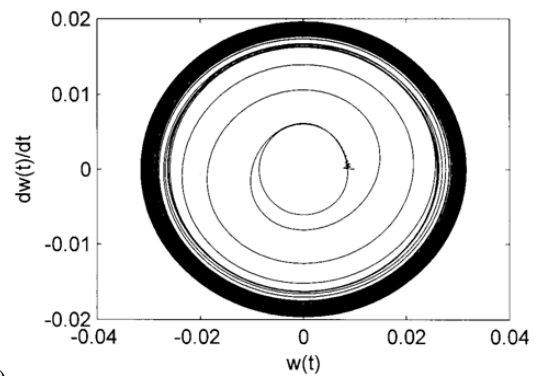
c)

Rys. 8. Podstawowe charakterystyki drgań nieliniowych powłoki dla stałych parametrów: $m=8$, $n=9$, $\Theta=0,001$, $k_p=10^5$, $c_p=0$, $\varepsilon=0$ oraz zmiennej liczby Macha przepływu $M=4,6$

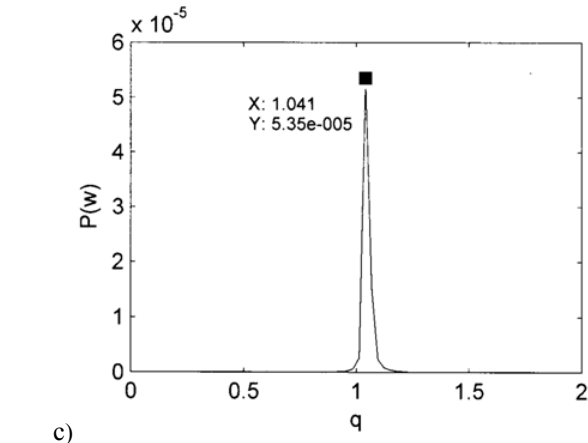
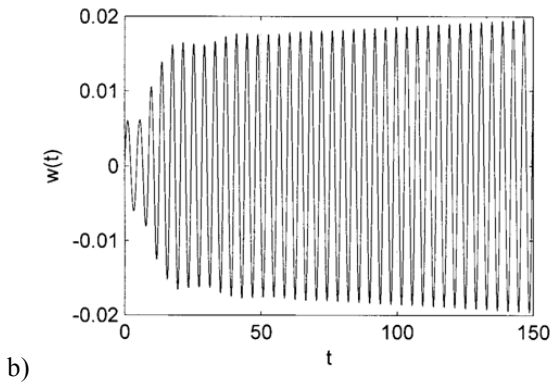


c)

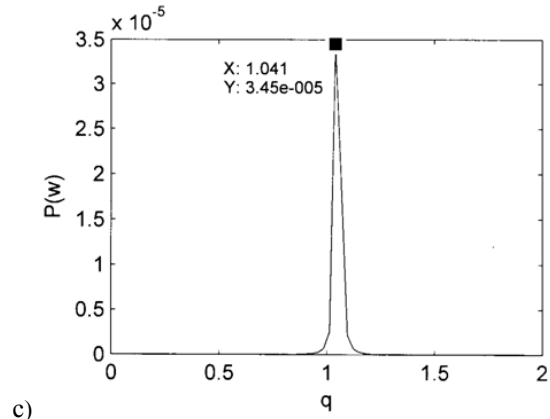
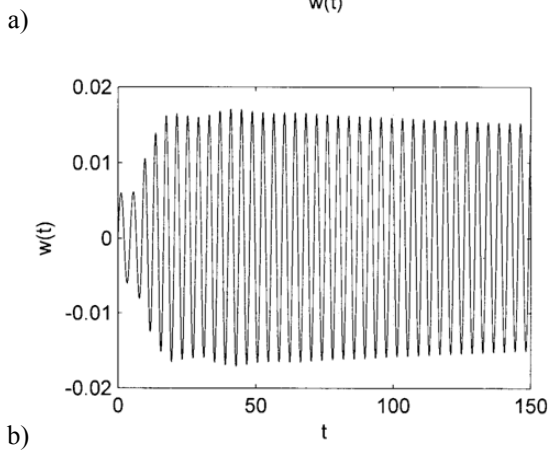
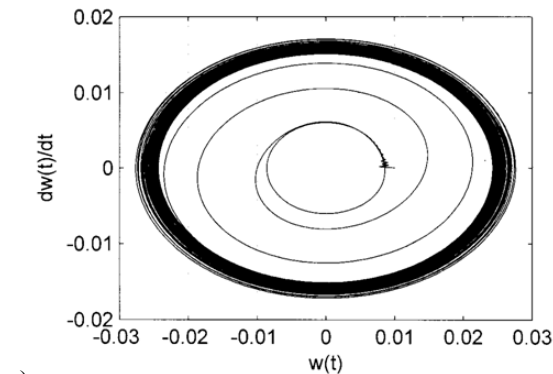
Rys. 9. Podstawowe charakterystyki drgań nieliniowych powłoki dla stałych parametrów: $m=8$, $n=9$, $\Theta=0,001$, $k_p=10^6$, $c_p=0$, $\varepsilon=1$ oraz zmiennej liczby Macha przepływu $M_{kr}^L=3,7939$



a)



Rys. 10. Podstawowe charakterystyki drgań nieliniowych powłoki dla stałych parametrów: $m=8$, $n=9$, $\Theta=0,001$, $k_p=10^5$, $c_p=0$, $\varepsilon=+10$ oraz zmiennej liczby Macha przepływu $M_{kr}^L=3,7939$



Rys. 11. Podstawowe charakterystyki drgań nieliniowych powłoki dla stałych parametrów: $m=8$, $n=9$, $\Theta=0,001$, $k_p=10^5$, $c_p=0$, $\varepsilon=-10^4$ oraz zmiennej liczby Macha przepływu $M_{kr}^L=3,7939$

Analizując dwa skrajne przypadki drgań nieliniowych powłoki zauważyć można, że w przypadku liczby Macha $M=3,0$ lub mniejszej mamy do czynienia z drganiami statecznymi (rysunek 5) o czym zaświadcza zarówno charakter przebiegu cyklu granicznego jak i zmiana bezwymiarowej amplitudy drgań w funkcji czasu t . Odwrotna sytuacja (drgania niestateczne), występuje dla $M=4,6$ (rysunek 8). Dzieliąc zatem przedział $3,0 \leq M \leq 4,6$ (metoda bisekcji) po kilku kolejnych przybliżeniach otrzymano $M=M_{kr}^N=3,80076 > M_{kr}^L=3,79390$ (rysunek 7), które jest minimalnie większe od otrzymanego z rozwiązania liniowego (rysunek 3). Jest oczywiste, że wynik ten zawdzięczamy małej sztywności sprężystego podparcia, jednak zaświadcza on o poprawności opracowanego modelu matematycznego i jego implementacji numerycznej. Dalszym potwierdzeniem tego faktu jest zwiększenie o rząd wielkości sztywności sprężystego podparcia do wartości $k_p=10^6$, przy zachowaniu na niezmiennym poziomie pozostałych parametrów. Z analizy otrzymanego rozwiązania (rysunek 9) widać wyraźnie, że zwiększenie sztywności ogólnej ustatecznia drgania, czyli zwiększa wartość krytycznej liczby Macha. Odmienne obraz obserwujemy zwiększając wartość parametru ε do $\varepsilon=\pm 10^4$. W przypadku stałej wartości liczby Macha przepływu, tj. $M_{kr}^N=3,7939$ dla przypadku wzmocnienia twardego $\varepsilon=10^4 > 0$ obserwuje się pojawienie drgań niestatecznych (rys. 10), a w przypadku wzmocnienia miękkiego $\varepsilon=-10^4 < 0$ drgania mają charakter drgań statecznych zanikających (rysunek 11).

Dalsze studium problemu powinno dotyczyć pogłębionych badań związanych z dodaniem nieliniowych członów do obciążenia aerodynamicznego, czyli badaniem przepływu dla dużych liczb Macha oraz w przypadku pominięcia członów rzędu drugiego, a uwzględnieniu członów całkowych badaniem omawianego problemu dla małych i umiarkowanych liczb Macha. Wyżej wymienione zagadnienia będą przedstawione w kolejnych pracach dotyczących tego tematu.

LITERATURA

1. **Бологин В. В.** (1961), *Неконсервативные задачи упругой устойчивости*, Москва.
2. **Bisplinghoff R. L., Ashley H.** (1962), *Principles of Aeroelasticity*, New York.
3. **Dźygałdo Z.** (1961), Drgania samowzbudne powłoki cylindrycznej o skończonej długości w opływie naddźwiękowym, *Biuletyn WAT*, 8, 10.
4. **Dźygałdo Z.** (1963), Drgania samowzbudne zaostrej powłoki stożkowej w opływie naddźwiękowym, *Biuletyn WAT*, 4, 12, 1963.
5. **Dźygałdo Z.** (1964), Problem aeroprężystości powłoki cylindrycznej i pasma płytowego z uwzględnieniem sprzężenia poprzecznego, *Biuletyn WAT*, 1, 13.
6. **Olson M. D., Fung Y. C.** (1967), Supersonic flutter of circular cylindrical shells subjected to internal pressure and axial compression, *AIAA Journal*, 5, 4.
7. **Olson M. D., Fung Y. C.** (1968), Comparing theory and experiment for the supersonic flutter of circular cylindrical shells, *AIAA Journal*, 10, 5.
8. **Dźygałdo Z., Kaliski S., Solarz L., Włodarczyk E.** (1967), *Drgania i fale w ciałach stałych*, Warszawa.
9. **Dowell E. H.** (1970), Panel flutter: a review of the aeroelastic stability of plates and shells, *AIAA Journal*, 3, 8.
10. **Огбалов П. М., Колтунов М. А.** (1969), *Оболочки и пластины*, Москва.
11. **Вольмир А. С.** (1972), *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*, Москва.
12. **Dźygałdo Z.** (1968c), Ciśnienie działające na powłokę cylindryczną drgająca niestacjonarnie w zewnętrznym i wewnętrznym zlinearyzowanym przepływie naddźwiękowym, *Biuletyn WAT*, 3, 17.
13. **Dźygałdo Z.** (1968b), Asymptotyczne wzory na ciśnienie działające na cylindryczną powłokę niestacjonarnie w zewnętrznym lub wewnętrznym przepływie naddźwiękowym, *Biuletyn WAT*, 9, 17.
14. **Matsuzaki Y., Kobayashi S.** (1971), Unsteady supersonic aerodynamic forces on an oscillating circular cylindrical shell, *AIAA Journal*, 12, 9.
15. **Parthan S., Johns D. J.** (1972), Aerodynamic generalized forces for supersonic shell flutter, *AIAA Journal*, 10, 10.
16. **Platzer M. F., Brix C. W., Webster K. A.** (1973), Linearized characteristics method for supersonic flow past vibrating shells, *AIAA Journal*, 9, 11.
17. **Dźygałdo Z.** (1968a), Analiza drgań nieautonomicznych układów powierzchniowych w opływie naddźwiękowym, *Dodatek do Biuletynu WAT*, 7.
18. **Dźygałdo Z.** (1970), Lokalna analiza nieliniowych wymuszonych drgań płyty o skończonej długości w płaskim opływie naddźwiękowym, *Biuletyn WAT*, 10, 19.
19. **Wielgus A.** (1972), Analiza samowzbudnych i wymuszonych drgań prostokątnej płyty na wielu podporach w opływie naddźwiękowym, Cz. I – *Biuletyn WAT*, 7, 21; Cz. II – *Biuletyn WAT*, 10, 21..
20. **Kuo Ch., Morino L., Dugundji J.** (1973), Nonlinear interaction of panel flutter with harmonic forcing excitation, *AIAA Journal*, 4, 11.
21. **Dźygałdo Z., Olejnik A.** (1973), Drgania płyty wymuszone obciążeniem uderzeniowym, *Biuletyn WAT*, 4, 22.
22. **Dźygałdo Z.** (1974), Dynamiczna reakcja płyty w na działanie poruszającej się fali uderzeniowej, *Biuletyn WAT*, 11, 23.
23. **Riesz F.** (1952), *Les systèmes d'équations lineaires à une infinite d'inconnues*, Paris.
24. **Dźygałdo Z., Nowotarski I., Olejnik A.** (1974), Analiza samowzbudnych i wymuszonych drgań powłoki cylindrycznej w opływie naddźwiękowym, Część I – teoria, *Biuletyn WAT*, 11, 24.
25. **Dźygałdo Z., Nowotarski I., Olejnik A.** (1977a), Analiza samowzbudnych i wymuszonych drgań powłoki cylindrycznej w opływie naddźwiękowym, Część II – analiza numeryczna, *Biuletyn WAT*, 5, 25.
26. **Dźygałdo Z., Nowotarski I., Olejnik A.** (1977b), Niestacjonarne drgania powłoki cylindrycznej w naddźwiękowym opływie wymuszone obciążeniem uderzeniowym, *Biuletyn WAT*, 11, 29.

**NONLINEAR ANALYSIS
OF SELF-EXCITED VIBRATIONS
OF A CYLINDRICAL SHELL IN SUPERSONIC FLOW**

Abstract: The paper presents the results of analysis of self-excited vibrations of a cylindrical shell of finite length exposed to external supersonic flow. The solution of the equations of motion is obtained and the equation of frequencies is derived. In addition, the results obtained from numerical calculations in respect to researched aspects were presented.