OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE STRUKTURY ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH TYPU TARCZA

Marek FLIGIEL*

*Katedra Mechaniki Technicznej i Wytrzymałości Materiałów, Wydział Mechaniczny, Politechnika Koszalińska, ul. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin

marek.fligiel@tu.koszalin.pl

Streszczenie: W artykule rozpatruje się dwie metody optymalnego kształtowania struktury elementów konstrukcyjnych typu tarcza. W pierwszej metodzie stosuje się zapis związków konstytutywnych wynikający z rachunku tensorowego, w drugiej metodzie do opisu pól naprężeń i deformacji w przestrzeni konstrukcyjnej przyjęto uogólnione prawo Hooke'a. W modelach matematycznych optymalizacji zastosowano opis Lagrange'a. Na przykładzie pokazano poszukiwanie struktury elementów konstrukcyjnych obciążonych jedno i dwukrotnie różnym obciążeniem, przy zadanych ograniczeniach na sztywność i wymiary.

1. WPROWADZENIE

Optymalne kształtowanie struktury elementów konstrukcyjnych i konstrukcji ma szerokie zastosowanie w projektowaniu wspomaganym komputerowo. Problem optymalizacji kształtu jest problemem nie tylko opisu granicy konstrukcji, ale również problemem wymiarowania i rozkładu rodzaju materiału. Jednym z kryteriów określających, jakość konstrukcji jest jej materiałochłonność i sztywność. Ma to znaczenie w konstrukcjach gdzie relacja masa-sztywność ma zasadniczy wpływ na dynamikę. W pracy rozpatrzono dwie metody optymalnego kształtowania elementów konstrukcyjnych przy jednokrotnymi obciążeniu i wielokrotnym obciążeniu, przyjmując za uogólnioną sztywność wartość potencjalnej energii deformacji.

2. OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE KONSTRUKCJI O OBCIĄŻENIU JEDNOKROTNYM

W pierwszej metodzie zapisano związki konstytutywne wynikające z rachunku tensorowego z przyjęciem zmiennej sterującej $E(x)$ (moduł Younga) w tensorze sprężystości.

Problem optymalizacji sformułujemy w następujący sposób: znaleźć najbardziej sztywną strukturę elementu konstrukcyjnego w zadanej przestrzeni konstrukcyjnej, przy stałej objętości i zdanej ilości rodzaju materiału oraz niezmiennym obciążeniu i podparciu. Zapis matematyczny postawionego problemu będzie następujący:

$$[c_{ijkl}(E(x)) \in (L^{\infty}(\Omega))^2]: \{ \bigwedge_{x\in\Omega} U[c_{ijkl}(E(x))] \le U[c_{ijkl}(\mathrm{E}(x))], \quad \nu, h_0 = h(x), \Phi = \mathrm{const}\}, \tag{1}$$

$$[h(x) \in H]: \{ \bigwedge_{x\in\Omega} U[h(x)] \le U[\mathrm{h}(x)],\ c_{ijkl}(E(x)) \equiv c_{ijkl}(E_0), \quad \nu, E_0, \Phi = \mathrm{const}\}, \tag{2}$$

gdzie: $E(x)$, $\mathrm{E}(x)$ – przybliżająca i optymalna funkcja modułu Younga, $c_{ijkl}(E(x)) \in (L^{\infty}(\Omega))^2$ – poszukiwany tensor sprężystości dla ciała izotropowego, $U[c_{ijkl}(E(x)]$ – potencjalna energia deformacji, H jest przestrzenią funkcyjną nad ciałem liczb rzeczywistych $x \subset \Omega \wedge \Omega \in R^2$, E_0, h_0 – zadane wyjściowe wielkości modułu Younga i grubości elementu optymalizowanego, $h(x)$, $\mathrm{h}(x)$ – przybliżająca i optymalna funkcja grubości konstrukcji.

Uwzględniając powyższe dla (1), po dokonaniu przekształceń, otrzymamy wyrażenie na określenie potencjalnej energii deformacji (Bendsøe, 1989; Fligiel, 2002):

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_0} \frac{1}{E(x)} \bar{c}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kl} h_0 ds, \ \bar{c}_{ijkl} = \bar{\lambda}\delta_{ij}\delta_{kl} + \bar{\mu}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\forall \wedge \bar{\varepsilon}_{ij} = (1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk},\ \bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \wedge \tag{3}$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2(1+\nu)} \wedge i = j,\ \delta_{ij} = 1 \vee \forall i \ne j,\ \delta_{ij} = 0,$$

gdzie: $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ – zmodyfikowane stałe Lamego, $\bar{c}_{ijkl}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{kl}$ – zmodyfikowane tensory sprężystości i deformacji, σ_{ij}, σ_{kk} – tensory naprężeń.

Do wyznaczenia optymalnych składowych tensora c_{ijkl} w n-elementowej dyskretyzowanej przestrzeni konstrukcyjnej, wykorzystamy funkcjonał Lagrange'a. Z warunku ekstremum funkcjonału Lagrange'a, otrzymamy zależność na obliczenie wartości modułu Younga i składowych tensora:

$$(\overset{r+1}{c_{ijkl}})_e = E_e^{r+1} \cdot \bar{c}_{ijkl} = \frac{E_0\sqrt{V_0(\bar{c}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kl})_n^r}}{\sum_{e=1}^{n}\sqrt{(\bar{c}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kl})_e^r / V_0 \cdot V_e}}\bar{c}_{ijkl} \wedge \tag{4},$$

$$(c_{ijkl}^{r+1})_e - (c_{ijkl}^{r})_e \le \alpha,$$

gdzie: r – numer iteracji, α – mała liczba wyrażająca dokładności optymalizacji.

W drugiej fazie (2) odwzorowujemy optymalny tensor c_{ijkl} na optymalne grubości h_i. Uwzględniając różnicę pomiędzy energią deformacji dla optymalnych składowych tensora i energią ze zmiennymi grubościami, funkcjonał Lagrange'a zapiszemy w postaci:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{n} c_{ijkl}(E_e)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\, s_e h_0 - \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{n}\Big(c_{ijkl}(E_0)\,\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}\Big)s_e h_e + \eta\left(\sum_{e=1}^{n} s_e h_0 E_e - \sum_{e=1}^{n} s_e h_e E_0\right), \qquad (5)$$

z którego otrzymamy zależność na określenie nowych grubości, dla każdej r+1 iteracji:

$$h_e^{r+1} = h_e^{r}\,\frac{\sqrt{(\bar{c}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kl})_e^{r}}\cdot\sum_{e=1}^{n} E_e s_e h_0}{E_0\sum_{e=1}^{n}\left(\sqrt{(\bar{c}_{ijkl}\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{kl})_e^{r}}\cdot s_e h_e^{r}\right)} \wedge h_e^{r+1} - h_e^{r} \le \beta, \qquad (6)$$

gdzie: β – mała liczba wyrażającą dokładność optymalizacji.

3. OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE KONSTRUKCJI O OBCIĄŻENIU WIELOKROTNYM

W drugiej metodzie za miarę uogólnionej sztywności przyjmuje się funkcjonał iloczynów potencjalnych energii deformacji dla konstrukcji k-krotnie obciążonej (Fligiel, 1998), $U=U_1\cdot\cdot U_j\cdot\cdot U_k$, gdzie: j – numer kolejnego obciążenia, k – liczba obciążeń.

Zadanie kształtowania konstrukcji sformułujemy w następujący sposób (rysunek 1); w zadanej przestrzeni konstrukcyjnej $\Phi(x,y)$ znaleźć najbardziej sztywną konstrukcję spełniająca warunki (7):

$$V = \int_s h\,ds = \min \;\wedge\; U_j \le U_0 = \mathrm{const} \;\wedge\; h_2 \le h \le h_1, \qquad (7)$$

gdzie: V – objętość konstrukcji, U_0 – dopuszczalna wielkość potencjalnej energii deformacji dla każdego j–go obciążenia, h_1 i h_2 – dopuszczalne wymiary konstrukcji (grubość).

Wyrażenie (7) sprowadzimy do zagadnienia bez ograniczeń przez wprowadzenie nowych zmiennych α_j, β, γ wówczas zapiszemy:

$$\Delta U_j = U_0 - U_j - \frac{1}{2}\alpha_j^2 = U_o - \frac{1}{2E}\int_s \frac{R_j^2}{h}ds - \frac{1}{2}\alpha_j^2,$$

$$\Delta U = \prod_{j=1}^{k}\Delta U_j = 0,\; R_j = \sqrt{(\sigma_x^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2) + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2}\;h,$$

$$\int_{s_2}(h - h_1)ds - \frac{1}{2}\beta^2 = 0,\quad \int_{s_3}(h_2 - h)ds - \frac{1}{2}\gamma^2 = 0, \qquad (8)$$

gdzie: $s=s_1+s_2+s_3$ jest powierzchnią kształtowania konstrukcji, a s_1, s_2, s_3 są powierzchniami, odpowiednio, dla których $h_2 \le h \le h_1$, $h>h_1$, $h<h_2$.

W celu znalezienia funkcji grubości konstrukcji $h=f(x,y,U_o,h_1,h_2)$ zastosujemy metodę wariacyjną poszukiwania ekstremum z uwzględnieniem metody mnożników Lagrange'a . W tym celu zestawimy funkcjonał Lagrange'a o postaci:

$$L = \int_s h\,ds + \lambda_1\prod_{j=1}^{k}\left(U_0 - \frac{1}{2E}\int_s \frac{R_j^2}{h}ds - \frac{1}{2}\alpha_j^2\right) + \lambda_2\left(\int_{s_2}(h - h_1)ds - \frac{1}{2}\beta^2\right) + \lambda_3\left(\int_{s_3}(h_2 - h)ds - \frac{1}{2}\gamma^2\right). \qquad (9)$$

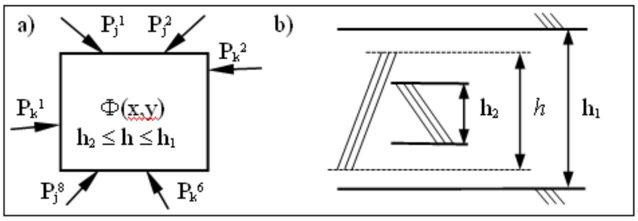
Dla dowolnych wariacji δh, $\delta\alpha_j$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, δR_j warunkiem koniecznym ekstremum funkcjonału (9) jest:

$$\delta L = \int_s\left\{1 + \lambda_1\sum_{j=1}^{k}\left\{\left(\frac{1}{2E}\int_s\frac{R_j^2}{h^2}ds\right)\cdot\prod_{\substack{t=1\\t\ne j}}^{k}\left(U_0 - \frac{1}{2E}\int_s\frac{R_t^2}{h}ds - \frac{1}{2}\alpha_t^2\right)\right\} + \lambda_2 - \lambda_3\right\}\delta h\,ds - \lambda_1\left\{\sum_{j=1}^{k}\left[\alpha_j\cdot\prod_{\substack{t=1\\t\ne j}}^{k}\left(U_0 - \frac{1}{2E}\int_s\frac{R_t^2}{h}ds - \frac{1}{2}\alpha_t^2\right)\right]\right\}\delta\alpha_j -$$

$$+\lambda_2\beta\delta\beta - \lambda_3\gamma\delta\gamma - \lambda_1\left\{\sum_{j=1}^{k}\left[\left(\frac{1}{E}\int_s\frac{R_j}{h}ds\right) * \prod_{\substack{t=1\\t\ne j}}^{k}\left(U_0 - \frac{1}{2E}\int_s\frac{R_t^2}{h}ds - \frac{1}{2}\alpha_t^2\right)\right]\right\}\delta R_j = 0. \qquad (10)$$

Z analizy warunku (10) wynika, że (Fligiel, 2002):

$$L = \int_{s_1} h_{r+1}ds + \int_{s_2} h_1 ds + \int_{s_3} h_2 ds + \lambda\prod_{j=1}^{k}\left[U_0 - \frac{1}{2E}\left(\int_{s_1}\frac{R_{rj}^2}{h_{r+1}}ds + \int_{s_2}\frac{R_{rj}^2}{h_r^2}h_1 ds + \int_{s_3}\frac{R_{rj}^2}{h_r^2}h_2 ds\right)\right]. \qquad (11)$$



Rys. 1. Przestrzeń konstrukcyjna $\Phi(x,y)$ (a), ograniczenia wymiarowe konstrukcji (b)

Wyznaczenie minimum funkcjonału (11) z warunkami (8) tworzy izoperymetryczny problem w rachunku wariacyjnym (Tatarkiewicz, 1969), którego rozwiązanie w dyskretyzowanej przestrzeni dla dwóch rodzajów obciążeń względem grubości $h_{r+1,i}^{j}$, j=1,2, dla r+1 iteracji ma następującą postać (Fligiel, 1998):

$$h^{j}_{(r+1),i} = H_{ri}\frac{(U_0-b_1)\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{R_{ri2}^2}{H_{ri}}s_i\right)+(U_0-b_2)\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{R_{ril}^2}{H_{ri}}s_i\right)}{4E\prod\limits_{j=1}^{2}(U_0-b_j)} \pm \frac{1}{4E}\left\{\left[\frac{(U_0-b_1)\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{R_{ri2}^2}{H_{ri}}s_i\right)+(U_0-b_2)\left(\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{R_{ri1}^2}{H_{ri}}s_i\right)}{\prod\limits_{j=1}^{2}(U_0-b_j)}\right]^2 - \frac{4\prod\limits_{j=1}^{2}\sum\limits_{i=1}^{p}\frac{R_{rij}^2}{H_{ri}}s_i}{\prod\limits_{j=1}^{2}(U_0-b_j)}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

gdzie: $H_{ri} = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{2}\varepsilon_{rj}R_{rj}^2}$, $b_j = \frac{1}{2E}\sum\limits_{i=p+1}^{m}\frac{R_{rij}^2 h_1}{h_{ri}^2}s_i + \frac{1}{2E}\sum\limits_{i=p+1}^{m}\frac{R_{rij}^2 h_2}{h_{ri}^2}s_i$,

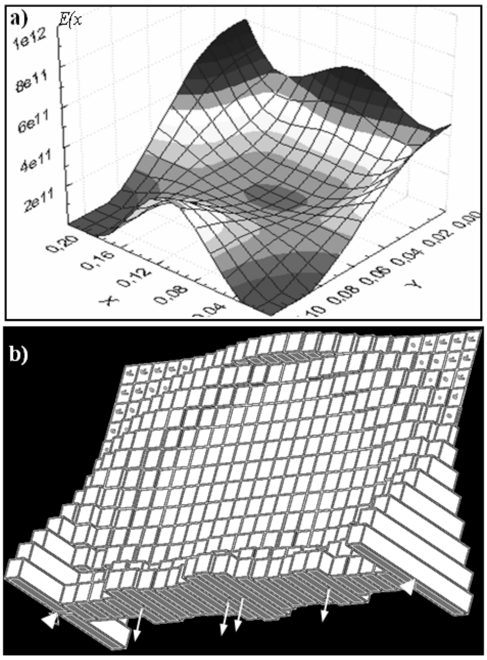
$$\varepsilon_{rj} = \frac{\Delta U_r}{\Delta U_{rj}}$$

p oznacza elementy, dla których $h_{ri}>h_1$, m elementy dla których $h_{ri}<h_2$.

2. PRZYKŁAD OBLICZEŃ

2.1. Konstrukcja obciążona jednokrotnie

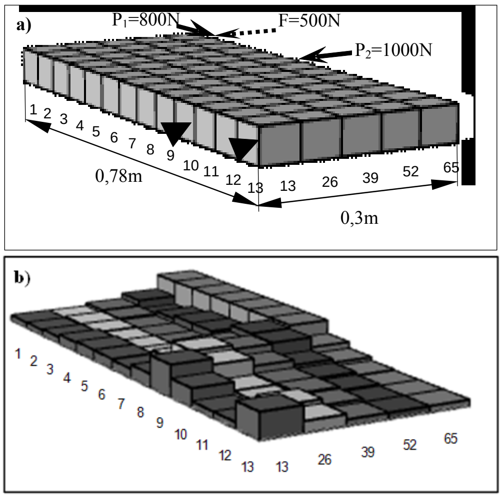
Wyniki optymalnej dystrybucji rodzaju materiału E(x) oraz optymalizacji dla 10-tej iteracji w przestrzeni konstrukcyjnej o wymiarach 0,2x0,1x0,01 m, w której znajduje się element konstrukcyjny obciążony w czterech punktach siłami P=5000N, pokazano na rys. 2 a i b. Wykres powierzchniowy rozkładu zmiennej sterującej E(x) na rysunku 2a, otrzymano na drodze aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów z ważonymi odległościami.



Rys. 2. Zmiana własności materiałowych (a), wynik optymalizacji (b)

2.1. Konstrukcja obciążona wielokrotnie

Z uwzględnieniem metodyki przedstawionej w rozdziale 3 przeprowadzono obliczenia dla dwóch rodzajów obciążenia (F) i (P_1, P_2) konstrukcji (rysunek 3a i 3b).



Rys. 3. Optymalny kształt dla U_0=2,75 Nm; 1,5≤h≤8mm

Na rysunku 3a przedstawiona jest dyskretyzowana przestrzeń konstrukcyjna Φ(x,y), warunki obciążenia i podparcia, natomiast na rysunku 3b rozkład optymalnych grubości elementów w części górnej od płaszczyzny symetrii.

LITERATURA

1. **Bendsøe M.P.** (1989), Optimal Material Distribution – Optimal shape design as a material distribution problem, *Struct. Optimization 1*, 193-202.
2. **Fligiel M**. (1998), Optymalne kształtowanie konstrukcji o zadanych parametrach i obciążeniu zmiennym wielokrotnym, *XVI Ogólnopolska Konferencja „Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania”*, Zeszyty Naukowe Wydziału Mechanicznego Politechniki Koszalińskiej, Nr 23, Mielno, 95-102.
3. **Fligiel M**. (2002), Optymalne kształtowanie liniowo sprężystej struktury elementów konstrukcyjnych o maksymalnej sztywności, *XLI Sympozjon PTMS „Modelowanie w Mechanice”*, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, Nr 18, Gliwice, 105–110.
4. **Tatarkiewicz K.** (1969), *Rachunek wariacyjny*. WNT, Warszawa.

OPTIMAL SHAPING OF STRUCTURE OF DESIGN ELEMENTS SUCH AS PLATE

Abstract: We consider two optimal methods of the structure shaping of plate type design elements in the paper. We use the constitutive relations results from tensor calculations in the first method, In the second method generalized Hook's law is used to describe the stress and deformation fields. The Lagrange's functional is used in the mathematical model of the optimization. As the example, the searching of structure of design elements under the variable one fold or two folds loading by stiffness and dimensions side constrains.