

OGÓLNE SFORMUŁOWANIE ZADANIA IDENTYFIKACJI NIELINIOWEGO MODELU DYNAMICZNEGO

Zbigniew DĄBROWSKI*

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych, Instytut Podstaw Budowy Maszyn, Politechnika Warszawska,
Gmach Samochodów i Ciągników, ul. L. Narbutta 84, 02-524 Warszawa

zdabrow@simr.pw.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedyskutowano tezę, że nieliniowy model dynamiczny może być zidentyfikowany z należytą dokładnością przy wykorzystaniu koherencyjnej techniki pomiaru nieliniowego zaburzenia. W efekcie zaproponowano metodykę postępowania.

1. WSTĘP

Zadanie identyfikacji modelu dynamicznego zostało sformułowane w sposób formalny mniej więcej w tym samym czasie, gdy formułowano zadanie optymalizacji i było traktowane jako warunek nadrzędny by model mógł stanowić podstawę poszukiwania rozwiązań optymalnych. W czasach gdy rozwiązanie układu kilku równań różniczkowych stanowiło istotny problem obliczeniowy, co powodowało w naturalny sposób dążność do przyjmowania modeli o jak najbardziej uproszczonej strukturze, potrzeba „dopasowywania” modeli do rzeczywistości wydawała się oczywista. Ogromny rozwój metod obliczeniowych i co za tym idzie łatwość rozwiązywania złożonych zadań oraz techniki modelowania, w których nie widać w sposób jawny równań ruchu, spowodowały zjawisko „wtórnego analfabetyzmu” w tej dziedzinie. W wielu kręgach panuje przekonanie, że rozbudowanie modelu dynamicznego do setek czy tysięcy stopni swobody gwarantuje na tyle dużą dokładność, że komputer „musi” wygenerować poprawne rozwiązanie jeśli tylko sam proces modelowania i późniejszych symulacji przeprowadzono z należytą starannością. Tymczasem nic bardziej błędnego. Sama łatwość rozbudowania modelu do gigantycznych rozmiarów nie zapewnia jeszcze dokładności i wyjąwszy pewne proste, wielokrotnie sprawdzone przypadki, każdy model dynamiczny winien być najpierw „dopasowany” do rzeczywistości zanim stanie się podstawą do wnioskowania. Z drugiej strony rozwój technik obliczeniowych i metod obserwacji (analizy sygnałów) pozwala próbować rozwiązać zadania, które w ujęciu „klasycznym” traktowano jako nierozwiązywalne (tak zwane odwrotne zadanie identyfikacji strukturalnej). Aby jasno pokazać problem wróćmy do podstaw.

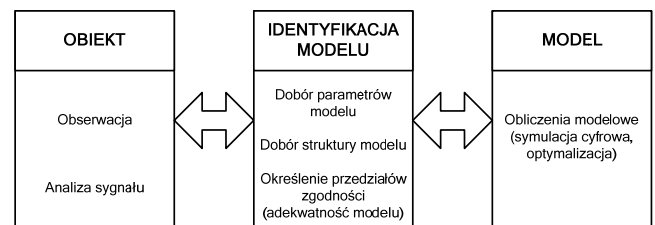
Sam termin „identyfikacja”, czyli wg słownika „utożsamienie” stał się ostatnio na tyle „modny” i często używany w opracowaniach naukowo-technicznych, że wymaga powtórnego zdefiniowania. W potocznym rozumieniu tego słowa identyfikować można wszystko. Mówimy często o identyfikacji zjawisk, procesów czy obiektów, rozumiejąc

po tym pojęciem przypisywanie przedmiotowi identyfikacji dostatecznego zbioru cech, by został jednoznacznie wyróżniony. Zidentyfikować można również pojęcia abstrakcyjne, np. „zidentyfikować problem”, „trudności”, itp. Często, choć mniej precyzyjnie” używa się również określenia „identyfikacja” jako synonim słowa „rozpoznanie”.

Chcąc uściślić pojęcie zauważmy, że w każdym z wymienionych przypadków chodzi o zakwalifikowanie pewnego elementu lub podzbioru elementów zbioru A do klasy na jakie ten zbiór podzielono.

W dalszym ciągu będziemy używać pojęcia „identyfikacja” w rozumieniu terminu „identyfikacja modelu matematycznego”, które to pojęcie w sposób opisowy można zdefiniować następująco (Banek, 1990; Giergiel i Uhl, 1990):

Identyfikacją modelu matematycznego nazywamy wszelkie działania, w wyniku których proponowany model matematyczny odpowiada rzeczywistości (obserwacji) w sensie jakościowym i ilościowym zgodnie z przyjętymi kryteriami, i zachowuje tę odpowiedniość przy przewidywanym zakresie dopuszczalnych zmian, to znaczy pozwala na wnioskowanie o aktualnie obserwowanym fragmencie rzeczywistości z zadaną dokładnością.



Rys. 1. Proces identyfikacji modelu dynamicznego

Identyfikacja modelu może być przeprowadzona wg pewnych procedur formalnych. Może również ograniczyć się do sprawdzenia (porównania) rezultatów obliczeń modelowych z wynikami obserwacji i określenie na tej podstawie przedziałów wiarygodności modelu.

Istnieje dużo modeli, które zostały zidentyfikowane przez wieloletnie badania i przyjmowane są jako bezdyskusyjnie poprawne. Nadajemy im rangę praw lub zasad fizycznych. W modelowaniu układów złożonych stanowią one niezmienniki w przyjętych formalizmach identyfikacyjnych. Poglądową ilustrację procesu identyfikacji modelu dynamicznego przedstawia rysunek 1.

Spróbujmy obecnie zadanie identyfikacji sformułować ściślej (Banek, 1990; Dąbrowski, 1992). Bez względu na to, czy celem ostatecznym jest „dopasowanie” modelu do rzeczywistości, czy ocena zakresów zgodności, podstawą wszelkich formalizmów jest relacja $\text{sygnał} \leftrightarrow \text{model}$.

2. RELACJA SYGNAŁ ↔ MODEL

Załóżmy, że model dany jest układem równań różniczkowych zwyczajnych II rzędu:

$$(t \rightarrow \mathbf{x} : \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{P}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})), \quad (1)$$

gdzie oznaczono odpowiednio: \mathbf{x} – wektor rozwiązań układu równań różniczkowych (przy założeniu, że rozwiązania te istnieją), \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} – macierze bezwładności, tłumienia i sztywności, \mathbf{P} – macierz wymuszeń, \mathbf{N} – macierz nieliniowych zaburzeń sztywności i tłumienia.

Obserwowany na obiekcie rzeczywistym sygnał jest w ogólności procesem losowym, często z wyraźnie widocznymi składowymi zdeterminowanymi. Na ogół przyjmuje się, że proces ten zależy od dwu zmiennych czasowych t – czasu obserwacji i θ – czasu życia maszyny oraz egzemplarza, co uwidocznimy zmienną „ n ” i punktu przyłożenia percepcora (przetwornika pomiarowego), które to położenie opisujemy współrzędną (wektorem współrzędnych) – „ r ”. Ponieważ zależy nam z reguły na identyfikacji pewnych własności modelu, a nie dokładności „idealnej” nie bierzemy „całego” sygnału, lecz jego wyekstrahowaną (wyselekcjonowaną) część, co możemy formalnie uwidocznić definiując operator selekcji \mathcal{S}_i otrzymując tym samym zależność:

$$y = \mathcal{S}_i \{y(t, \theta, n, r)\}, \quad (2)$$

gdzie odpowiednio oznaczono: $\{y\}$ – obserwowany wielowymiarowy proces losowy formalnie z nałożonym jedynie warunkiem ograniczonej; t – czas obserwacji (czas dynamiczny) – względem czasu obserwacji najczęściej stawiamy warunek stacjonarności i co za tym idzie ergodyczności. Nie jest on jednak konieczny. Coraz większą popularność zdobywają sobie skuteczne metody analizy procesów niestacjonarnych niewątpliwie nad wyraz użyteczne w zadaniach diagnostycznych; θ – czas życia (czas ewolucyjny) – prawo do niezależnego traktowania dwu zmiennych czasowych daje nam założenie $\theta \gg t$. Rzędy wielkości θ i t są na tyle różne, że zmiany procesu opisane w funkcji zmiennej ewolucyjnej są nieobserwowalne w czasie t . Założenie o niezależności obu zmiennych pozwala na pominięcie w opisie ewolucji zadania drgań parametrycznych. Na ogół zakłada się, że w funkcji θ proces stanowi słabą regresję (liniową lub nieliniową); r – wektor współrzędnych (umownie współrzędna) punktu, w którym dokonujemy obserwacji. Ze względu na subiektywny wy-

bór punktów pomiarowych stawia się postulat, by dla każdej zmiennej „ r ” istniał przedział (otoczenie punktu pomiarowego), w którym proces jest słabozmienny (im słabiej tym lepiej) ze względu na powtarzalność obserwacji; n – zmienna oznaczająca wyróżnik (numer) badanego egzemplarza z populacji konstrukcji uznanych za tożsame. Rozkład prawdopodobieństwa względem tej zmiennej jest istotnym parametrem wiarygodności diagnozy, gdy opracujemy wspólny test dla grupy urządzeń. Oczywiście zmienna ta nie występuje, gdy diagnozujemy obiekt pojedynczy dysponując zidentyfikowanym modelem. W ogólności analiza zachowania się procesu w funkcji zmiennej „ n ” pozwala na dopasowanie („dostrojenie”) uniwersalnego systemu monitorującego (diagnozującego) do aktualnie testowanego egzemplarza; \mathcal{S}_i – operator selekcji w dziedzinie czasu, zawierający w sobie operator ekstrakcji, czasem predykcji, najczęściej również uśredniania i wielu innych zabiegów zmierzających do wydobycia z sygnału użytecznej informacji. Działanie tego operatora bywa często nazywane „preprocessingiem”; y – wyselekcjonowana część sygnału $\{y(\dots)\}$.

Tak wyselekcjonowany sygnał chcemy obecnie porównać z modelem matematycznym.

Na wstępie występują dwie zasadnicze trudności. Po pierwsze wyjściem modelu dynamicznego rzadko kiedy bywa proces w punkcie obserwacji. Wektor współrzędnych uogólnionych \mathbf{x} dotyczy pewnych mniej lub bardziej abstrakcyjnych przemieszczeń wybranych punktów układu (np. środków mas). Obserwujemy zaś na ogół część maszyny możliwą do obserwacji i spełniającą założenia opisane przy podawaniu założeń dotyczących rejestrowanego procesu. Musimy, więc przebieg odpowiadający obserwowanemu najzwyczajniej policzyć. Druga trudność polega na konieczności porównania procesu, który zawsze jest co najmniej zakłócony losowo z rozwiązaniem modelu, który może być zdeterminowany. Możliwe są dwie drogi. Albo uwzględnić należy w modelu proces losowy, albo wielkość obserwowaną sprowadzić do odpowiedniej zdeterminowanej charakterystyki.

Najprościej wyrazić to zależnością:

$$\mathcal{S}_i \{y(\dots)\} = \mathcal{T} \mathbf{x}, \quad (3)$$

gdzie \mathcal{T} oznacza operator transformacji rozwiązań modelu \mathbf{x} do postaci umożliwiającej porównanie.

Niezależnie od tego czy operator \mathcal{T} zawiera zakłócenia losowe wyników modelu zdeterminowanego, czy operator \mathcal{S}_i sprowadza obserwowany sygnał do uśrednionej charakterystyki, powinniśmy wprowadzić jeszcze do równania zmienne Ψ , oznaczające zawsze występujący szum pomiarowy oraz dopuszczalny błąd modelu, który oznaczmy δ . Żaden model bowiem nie opisuje rzeczywistości w sposób idealny. Ponadto aby w ogóle było możliwe porównanie, wyselekcjonowane części sygnałów i transformowane rezultaty obliczeń modelowych muszą tworzyć przestrzeń metryczną (lub chociaż unormowaną, by możliwa była jakaś forma hierarchizacji). Gdy warunek ten nie jest spełniony należy posługiwać się innymi technikami definiowania bliskości. Przyjmijmy założenie możliwości zdefiniowania metryki, co sprowadza równanie (3) do postaci:

$$\mathcal{S}_t\{y(\dots)\} = T \mathbf{x} + \psi + \delta \quad (4)$$

$$\rho(y; x) = \rho(x; x) = \rho(y; y) \stackrel{def}{=} \rho(\cdot; \cdot).$$

Jeżeli model jest liniowy, zależność (4) możemy przedstawić w wygodniejszej formie, wykorzystującej zasadę superpozycji (Dla prostoty zapisu pominięte dalej operator T włączając go do definiowanego \mathcal{S}):

$$\mathcal{S}_t\{y(\dots)\} = x = \sum_{i=1}^n p_i * h_i(t - \tau, m_i, k_i, c_i) + \psi + \delta \quad (5)$$

$$\rho = \rho(\cdot; \cdot)$$

i całość sprowadzić do dziedzinie częstotliwości poddając obustronnej transformacie Fouriera:

$$\mathcal{S}_\omega \mathcal{F} \mathcal{S}_t\{y(\dots)\} = \sum_{i=1}^n P_i(\omega) \cdot H_i(\omega, m_i, k_i, c_i) + \Psi + \Delta \quad (6)$$

$$\rho = \rho(\cdot; \cdot)$$

gdzie oznaczono: \mathcal{S}_ω – operator filtracji (selekcji w dziedzinie częstotliwości) zawierający obecnie w razie potrzeby procedurę uśredniania; $H(\omega)$ – transmitancja widmowa – w zależności od szczegółowego zdefiniowania zadania może oznaczać współczynniki wzmocnienia $|H|^2$; $P(\omega)$ – widmo wymuszenia (lub gęstość widmowa mocy, ewentualnie widmo fazowe); Ψ ; Δ – odpowiednie transformaty Fouriera (lub gęstości widmowe) szumu pomiarowego i dopuszczalnego błędu modelu.

Gdy model jest nieliniowy, takie proste przekształcenie nie jest możliwe.

Model zależy od „ $n + k$ ” parametrów, gdzie „ n ” oznacza liczbę stopni swobody, a „ k ” parametryzacje wymuszeń. Przy wymuszeniach harmonicznym są to miary amplitudy, przy innych zbiór liczb definiujących charakterystykę modelowego wymuszenia np. amplituda i czas trwania impulsu prostokątnego itp. W najprostszym przypadku „ k ” oznacza zbiór amplitud wszystkich składowych fourierowskich wszystkich wymuszeń (Jest w tym stwierdzeniu zawarte uproszczenie „techniczne”. W praktyce nie są to ściśle rzecz biorąc amplitudy szeregu Fouriera tylko efekt dyskretyzacji ciągłej transformaty Fouriera, to znaczy zależna od rozdzielczości analizy liczba prążków (pasm) (Batko i inni, 2008)). Na ogół wszystkie parametry modelu powstają jako odwzorowanie rzeczywistości z mniejszym lub większym błędem wynikającym z ograniczonych możliwości pomiarowych, lub uśredniania danych z wielu pomiarów (tak zwane potocznie dane „tablicowe”). Należy jednak wyraźnie zdawać sobie sprawę, że nawet maksymalna minimalizacja tych błędów nie stanowi gwarancji uzyskania „idealnego” modelu. Błąd struktury istnieje zawsze. W końcu każda maszyna w opisie „makro” jest układem ciągłym. Tym samym odchyłki parametrów od wartości rzeczywistych na ogół są niezbędne by model funkcjonował poprawnie. Niekiedy muszą być one zresztą zmieniane w dosyć szerokich granicach i przyjmując pewne wartości abstrakcyjne co najwyżej jednoznacznie odwzorowywalne w rzeczywiste. Mówimy wtedy o transformacji rzeczywistych danych obserwowanych. Wróćmy jednak do zadania.

Równania (5) i (6) są równoważne i zawierają te same parametry. Wybór dziedziny, w której będziemy przeprowadzali procedurę identyfikacji zależy po pierwsze od rodzaju ruchu. W stanach nieustalonych zmuszeni jesteśmy ograniczyć się do dziedziny czasu, lub transformatę Fouriera zastąpić innym przekształceniem (np. transformatą falkową). Z drugiej jednak strony prawa algebry są nieuniknione. Musimy dysponować taką samą liczbą warunków, jak liczba parametrów dobieranych (zmienianych) z procesie identyfikacji. W dziedzinie czasu wymaga to wykonania dokładnie tylu niezależnych obserwacji. W dziedzinie częstotliwości natomiast możemy zażądać jednocześnie zgodności każdej składowej widmowej, co (oczywiście za cenę pewnych ograniczeń) pozwala uzyskać naprawdę wiele niezależnych równań z analizy rejestracji w jednym punkcie pomiarowym. Nic więc dziwnego, że powszechnie identyfikuje się model w dziedzinie częstotliwości.

Wyberzmy zatem spośród parametrów modelu pewną ich liczbę, którą potraktujemy jako zbiór zmiennych decyzyjnie $z(z_1 \dots z_i)$ określając jednocześnie dopuszczalny zakres możliwych zmian. Przeważnie robi to się tak, by nie narużyć fizycznej realności, lecz nie jest to warunek konieczny. Oznaczając dopuszczalny błąd identyfikacji w myśl przyjętej metryki przez δ w dziedzinie czasu i Δ w dziedzinie częstotliwości, a lewą stronę równania przez Y , otrzymamy układ równań zbudowany wg reguły:

$$\bigwedge_{\omega=\omega_n} |Y_n - \sum P_{in} \cdot H_{in}(m_i, k_i, c_i, z_1 \dots z_i)| < \Delta - \Psi \quad (7)$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 \dots z_i$$

Równań tych jest tyle, ile istotnych składowych widmowych używamy do identyfikacji (i ile zdefiniowaliśmy zmiennych decyzyjnych). Warunkiem rozwiązywalności jest spełnienie równości:

$$\Delta > \Psi \quad (8)$$

co jest raczej oczywiste. Nie możemy żądać większej zgodności modelu z sygnałem niż zakłócenia szumowe.

W identyczny sposób można zapisać zależności dla dziedziny czasu:

$$\bigwedge_n |y_n - \sum p_i(t) * h_n(m_i, k_i, c_i, z_1 \dots z_i)| < \delta - \psi \quad (9)$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 \dots z_i$$

gdzie tym razem wskaźnik n oznacza współrzędną na kierunku której dokonano obserwacji. Tak zdefiniowany problem będziemy nazywać identyfikacją parametryczną.

Zwróćmy uwagę na podobieństwo zadania identyfikacji parametrycznej do klasycznego zadania optymalizacji. W jednym i drugim przypadku wprowadzamy obligatoryjnie pewną liczbę zmiennych decyzyjnych mogących się zmieniać w obszarze ściśle ograniczonym obszarowo lub funkcjonalnie. To drugie określenie oznacza wzajemne związki między zmiennymi. W jednym i drugim przypadku definiujemy metrykę w sposób właściwy dla fizyki zadania oraz w obu przypadkach modyfikujemy model. Różnica polega na samym kryterium porównawczym. W zadaniu

optymalizacji poszukujemy minimum pewnej zależności funkcyjnej (funkcjonalnej) pomiędzy rozwiązaniami, zwaną funkcją celu lub funkcjonalem jakości. W zadaniu identyfikacji parametrycznej żądamy, by każde z rozwiązań należało do bliskiego otoczenia zewnętrznego wzorca jakim jest wielkość obserwowana. Pod względem rachunkowym identyfikacja jest o tyle prostsza, że zadanie „automatycznie” się dekomponuje. W przypadku optymalizacji dekompozycja nie zawsze jest możliwa. Oba zadania są jednak ze sobą tak ściśle związane, że dość łatwo o popełnienie błędów. Typowym z nich jest użycie tych samych zmiennych decyzyjnych w obu zadaniach. Tymczasem zmienne dobrane w trakcie identyfikacji jak już wspomniano wcześniej korygują wszystkie błędy modelu, a co za tym idzie mogą przyjmować i na ogół przyjmują pewne wartości abstrakcyjne w najlepszym razie transformowalne na rzeczywiste, przy czym transformacja taka jest na ogół nie znana. Pytanie w jakim zakresie dopuszczalnych zmian „nowych” zmiennych decyzyjnych model będzie zachowywał zidentyfikowaną adekwatność jest najtrudniejszym do rozwiązania problemem najczęściej wymagającym praktycznej weryfikacji lub znużonego badania ciągłości i stateczności rozwiązań równań różniczkowych w funkcji zmian parametrów.

3. IDENTYFIKACJA STRUKTURALNA

Okazać się jednak może, że identyfikacja parametryczna jest niewykonalna nawet przy rozszerzeniu przedziałów dopuszczalności zmiennych decyzyjnych, czyli że złożona struktura nie pozwala nawet na zbudowanie modelu „typu czarna skrzynka”, co występuje stosunkowo często w przypadku modeli liniowych.

Załóżmy wobec tego, że mamy model częściowo zidentyfikowany parametrycznie w zakresie zmian parametrów nie naruszających fizycznej rzeczywistości. Określenie „częściowo” może oznaczać spełnienie pewnej liczby warunków przy odległości ρ większej niż założono. Typowym przykładem jest uzyskanie zgodności podstawowych częstotliwości drgań własnych obiektu i modelu bez możliwości „dostrojenia” amplitud. W takiej sytuacji zadanie, z formalnego punktu widzenia, sprowadza się do znalezienia niewiadomych funkcji $\varphi(\Phi_i)$ uzupełniających relację (1) w myśl zależności:

$$\left| Y - \sum_{i=1}^n P_i H_i(\dots) + \Phi \right| < |\Delta - \Psi|$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi(\Phi_1 \dots \Phi_n) \quad (10)$$

gdzie wektor niewiadomych funkcji Φ oznacza błąd strukturalny modelu.

Zadanie to nosi nazwę identyfikacji strukturalnej i niestety na ogół jest rozwiązywalne jedynie częściowo. Zbiór funkcji Φ_n (lub φ_n w dziedzinie czasu) ma sens wektora „poprawek”, czyli wektora korekcyjnego, który musi być dodany do wektora rozwiązań by ten odpowiadał zadaną dokładnością wynikowi obserwacji. W tym punkcie kończy się możliwość dalszej algorytmizacji zadania.

Przełożenie wektora Φ na zmianę układu równań różniczkowych jest nierozwiązywalne w ogólnym przypadku, gdyż nieskończenie wiele układów równań różniczkowych może posiadać te same rozwiązania. Szczególnie zadanie odwzorowania *obserwacja* \leftrightarrow *model* nazywamy odwrotnym zadaniem identyfikacji. Mimo braku ogólnego algorytmu nawet dla zagadnienia liniowego (porównaj rozdział) stosuje się wiele metod czy też raczej sposobów wynikających bardziej z doświadczenia i znajomości obiektu przez modelującego niż ogólnej teorii by zadanie rozwiązać. Najprostszą jest zwiększanie dokładności opisu tych fragmentów modelu, które były zbudowane z dużym uproszczeniem i próba minimalizacji wektora Φ . I tu dochodzimy do sedna trudności. Poczynione założenie liniowości opisu (5) i (6) może nie pozwolić na uzyskanie zadowalających rezultatów nawet za cenę rozbudowy modelu do gigantycznych rozmiarów. Jakościowo różny efekt obliczeń modelowych i wyników obserwacji często wymaga zmiany modelu z liniowego w nieliniowy.

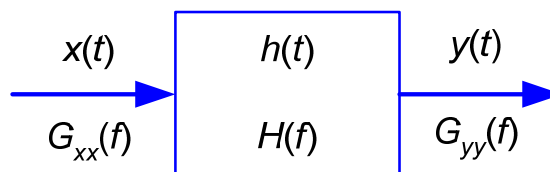
Załóżmy zatem, że obserwowany układ jest nieliniowy i funkcje Φ^* stanowią wektor różnic pomiędzy rozwiązaniem zlinearyzowanym i „rzeczywistym”. Na podstawie analizy ogólnych postaci rozwiązań nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych uzyskanych metodami przybliżonymi (Batko i inni, 2008; Dąbrowski i inni, 2007) można wykazać, że możliwe jest uwzględnienie różnic w sposób formalnie identyczny z zapisem (5) i (6) to znaczy w postaci:

$$\left| \mathcal{S}_\omega \mathcal{F} \mathcal{S}_t \{Y(\dots)\} - \sum_{i=1}^n P_i \cdot H_i + \Phi_i^* \right| < |\Delta - \Psi| \quad (11)$$

$$\stackrel{def}{\rho} = \rho(\cdot; \cdot)$$

4. MOŻLIWOŚĆ POMIARU NIELINIOWEGO ZABURZENIA

Uzyskanie rozwiązania względnie poprawnego fizycznie byłoby możliwe gdyby nieliniowe zaburzenie (wektor funkcji Φ) udało się zmierzyć, a tym samym oddzielić identyfikację parametryczną ograniczoną w tym przypadku do „części liniowej” od strukturalnej zdefiniowanej jako poszukiwanie nieliniowego zaburzenia. Propozycją w tym względzie może być zaproponowany przez autora model koherencyjny (Batko i inni, 2008; Dąbrowski, 1992; Dąbrowski i inni, 2007).



Rys. 2. Model prostego układu z jednym wejściem i jednym wyjściem

Rozpatrzmy model prostego układu z jednym wejściem i jednym wyjściem (rysunek 2), gdzie przez $x(t)$ i $y(t)$ ozna-

czono odpowiednio sygnały rejestrowane na wejściu i wyjściu a przez $G_{xx}(f)$ i $G_{yy}(f)$ gęstości widmowe mocy tych sygnałów.

Jak wiadomo dla takiego układu można określić transmitancję (funkcję zespoloną) zależnością:

$$H(i\omega) = \frac{Y(i\omega)}{X(i\omega)} \quad (12)$$

gdzie $Y(i\omega)$ i $X(i\omega)$ są zespolonymi transformacjami sygnałów wyjściowego i wejściowego, lub na jeden z dwóch sposobów:

$$H_1(f) = \frac{G_{xy}(f)}{G_{xx}(f)} \quad (13)$$

$$H_2(f) = \frac{G_{yx}(f)}{G_{yy}(f)} \quad (14)$$

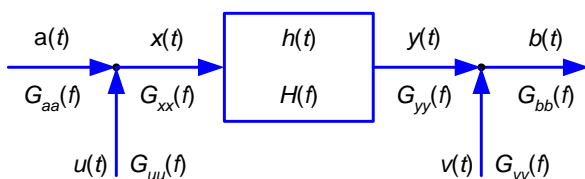
gdzie $G_{xy}(f)$ i $G_{yx}(f)$ są wzajemnymi gęstościami widmowymi mocy (sprzężonymi ze sobą).

Obie te funkcje są sobie równe jedynie dla niezakłóconego układu liniowego. W każdym innym przypadku ich stosunek zwany funkcją koherencji zwyczajnej jest mniejszy od jedności:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{H_1(f)}{H_2(f)} = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}G_{yy}} < 1 \quad (15)$$

W klasycznej analizie częstotliwościowej podaje się dośyć proste reguły jak na podstawie wartości funkcji koherencji odseparować zakłócenia na wejściu lub wyjściu układu pod warunkiem, że wiadomo z góry, który rodzaj zakłócenia występuje. Nie ma natomiast ogólnych recept jak interpretować niskie wartości funkcji koherencji zwyczajnej, gdy układ jest nieliniowy.

Spróbujmy, zatem zgodnie z tezą zawartą m.in. w pracy Batko i innych (2005) oraz Dąbrowskiego i innych (2007), potraktować układ nieliniowy jako układ, w którym występują jednocześnie skorelowane zakłócenia na wejściu i wyjściu (Założenie, że zakłócenie jest nieskorelowane z sygnałem wejściowym lub wyjściowym jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że zakłócenie to jest z tymi sygnałami niekoherentne. Zatem odpowiednie funkcje koherencji muszą być równe 0. Przy takim założeniu bardzo upraszcza się zadanie odseparowania zaburzenia wejścia lub wyjścia układu, lecz byłoby to ewidentnie sprzeczne z próbą opisu nieliniowości jako łącznego zakłócenia na wejściu i wyjściu.). Model blokowy takiego układu został przedstawiony na rysunku 3.



Rys. 3. Układ z zakłóceniami na wejściu i wyjściu jako model układu nieliniowego

Na rysunku oznaczono odpowiednio: $G_{aa}(f)$ – średnione widmo mocy sygnału wejściowego, $G_{bb}(f)$ – średnione widmo mocy sygnału wyjściowego, $G_{ab}(f)$ – średnione widmo wzajemne mocy pomiędzy sygnałami wejściowego a wyjściowym (sprzężone do $G_{ba}(f)$), $G_{ba}(f)$ – średnione widmo wzajemne mocy pomiędzy sygnałami wyjściowego a wejściowym (sprzężone do $G_{ab}(f)$), $G_{uu}(f)$ – średnione widmo mocy zakłóceń na wejściu układu, $G_{vv}(f)$ – średnione widmo mocy zakłóceń na wyjściu układu, $G_{xx}(f)$ – średnione widmo mocy niezakłóconego sygnału na wejściu układu, $G_{yy}(f)$ – średnione widmo mocy niezakłóconego sygnału na wyjściu układu.

Dla takiego układu można uzyskać zależność:

$$\gamma_{ab}^2(f) = \gamma_{xy}^2(f) / [(1 + G_{uu}(f)/G_{aa}(f) + G_{vv}(f)/G_{bb}(f) + G_{uu}(f)/G_{aa} \cdot G_{vv}(f)/(f)G_{bb}(f))] \quad (16)$$

skąd po skomplikowanych przekształceniach dochodzi się do równania:

$$\gamma_{ab}^2(f) = \frac{H_{1ab}(f)}{H_{2ab}(f)} = \frac{\gamma_{xy}^2(f)}{1 + \Delta(f)} = \frac{H_{1xy}(f)}{H_{2xy}(f)} \cdot \frac{1}{1 + \Delta(f)} \quad (17)$$

Przekształcenie zależności (16) do postaci (17) dowodzi twierdzenia, że można uzyskać funkcję koherencji zwyczajnej układu zakłóconego nieliniowym zaburzeniem mnożąc funkcję koherencji układu niezakłóconego przez prosty mnożnik będący jedynie funkcją częstotliwości, oczywiście różny dla różnych zakłóceń, czyli różnych rodzajów nieliniowości. Porównanie tych mnożników, a dokładniej wydzielonej funkcji Δ_f pozwala zatem na ocenę nieliniowego zaburzenia, ponieważ jak pokazano w pracy Batko i innych (2008) zachodzi relacja:

$$\Delta_f \Leftrightarrow \Phi^* \quad (18)$$

Proponowana interpretacja wyników obserwacji pozwala na podstawie znajomości mnożników Δ_f określonych dla każdej współrzędnej na znalezienie nieznanymi funkcji Φ , a tym samym na rozwiązaniu zadania identyfikacji strukturalnej modelu matematycznego.

5. PODSUMOWANIE

Proponowana siłą rzeczy, ze względu na objętość artykułu, w skrócie metodyka postępowania jest jednym (obok np. analizy modalnej) ze sposobów identyfikacji nieliniowych modeli dynamicznych. I chociaż z punktu widzenia teorii zadanie odwrotne identyfikacji strukturalnej pozostaje w ogólności nierozwiązywalne, istnieje duża klasa układów mechanicznych, dla której wyodrębnienie i pomiar nieliniowego zaburzenia umożliwia uzyskanie wysokiej zgodności modelu z wynikami obserwacji niemożliwej do uzyskania innymi metodami.

LITERATURA

1. **Banek T.** (1990), *Optymalna Filtracja i predykcja sygnałów opisywanych stochastycznymi równaniami różniczkowymi*, Wyd. Uniwersytetu M. Curie-Skłodowskiej, Lublin.
2. **Batko W., Dąbrowski Z., Engel Z., Kiciński J., Weyna S.** (2005), *Nowoczesne metody badania procesów wibroakustycznych – część I*, Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji PIB, Radom.
3. **Batko W., Dąbrowski Z., Kiciński J.** (2008), *Nonlinear Effects in Technical Diagnostics*, Polish Academy of Science, Warszawa.
4. **Dąbrowski Z., Dziurdź, Skórski W. W.** (2007), *Drgania masztów kompozytowych*, Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji PIB, Warszawa-Radom.
5. **Dąbrowski Z.** (1992), The evaluation of the vibroacoustic activity for the needs of constructing and use of machines, *Machine Dynamic Problems*, Vol. 4.
6. **Giergiel J., Uhl T.** (1990), *Identyfikacja układów mechanicznych*, PWN, Warszawa.

GENERAL FORMULATION OF THE TASK OF THE NONLINEAR MODEL IDENTIFICATION

Abstract: In the paper it was considered the thesis that nonlinear dynamic model can be identified with sufficient accuracy using coherence technique of nonlinear disturbance measure. Finally the methodological proposal is given.