

## WYKORZYSTANIE EKSTREMUM KOWARIANCJI W PŁASZCZYŹNIE KRYTYCZNEJ DO WYZNACZANIA TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ PRZY LOSOWYM ZGINANIU ZE SKRĘCANIEM

**Karolina WALAT<sup>\*</sup>, Tadeusz ŁAGODA<sup>\*</sup>**

<sup>\*</sup>Katedra Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Opolska, ul. Mikołajczyka 5, 45-271 Opole

[t.lagoda@po.opole.pl](mailto:t.lagoda@po.opole.pl), [kwalat@klio.po.opole.pl](mailto:kwalat@klio.po.opole.pl)

**Streszczenie:** W pracy zaproponowano zastosowanie ekstremum kowariancji naprężeń normalnych i stycznych do wyznaczenia położenia płaszczyzny krytycznej. W tak wyznaczonej płaszczyźnie krytycznej sformułowano naprężeniowe kryterium zmęczeniowe jako liniową kombinację naprężeń normalnych i stycznych dla tej płaszczyzny. Współczynniki wagowe występujące w tym kryterium wyznaczono na podstawie badań zmęczeniowych w warunkach czystego zginania oraz czystego skręcania. Zaproponowany model zweryfikowano na podstawie wyników badań zmęczeniowych w warunkach cyklicznego proporcjonalnego i nieproporcjonalnego oraz proporcjonalnego losowego zginania ze skręcaniem próbek wykonanych ze stopu aluminium PA6-T4.

### 1. WPROWADZENIE

Podczas projektowania elementów maszyn bardzo często mamy do czynienia z wieloosiowym obciążeniem eksploatacyjnym. W efekcie tego może nastąpić zniszczenie elementu lub całej konstrukcji. Aby temu zapobiec należy oszacować trwałość zmęczeniową przy wieloosiowych obciążeniach losowych. W tym celu konieczna jest redukcja złożonego stanu obciążenia do ekwiwalentnego stanu jednoosiowego za pomocą kryteriów wieloosiowego zmęczenia, aby móc ocenić trwałość zmęczeniową.

W praktyce funkcjonuje wiele kryteriów wieloosiowego zmęczenia spośród których można, wyróżnić kryteria naprężeniowe, odkształceniowe i energetyczne (Łagoda i Ogonowski, 2005). Podział ten został przyjęty w oparciu o parametr decydujący o zniszczeniu. Spośród tych kryteriów możemy wyodrębnić grupę, której istnienie zależne jest bezwarunkowo od orientacji położenia płaszczyzny krytycznej. Znane są trzy metody wyznaczania położenia płaszczyzny krytycznej: metoda wariacji, kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych i funkcji wagowych. Najprostszą i najszybszą jest metoda wariacji opracowana przez Będkowskiego (1989). W tym przypadku przyjmuje się, że położenie płaszczyzny krytycznej dla materiałów kruchych definiowane jest jako maksimum wariacji naprężeń normalnych i naprężeń stycznych dla materiałów sprężysto-plastycznych jak to przedstawiono między innymi w pracach (Walat i Łagoda, 2008a; Grubisic i Simburger, 1976).

We wcześniejszych pracach autorów niniejszej pracy (Walat i Łagoda, 2008b) za płaszczyznę krytyczną przyjęto tą, w której osiągnięto maksymalny współczynnik korelacji naprężeń stycznych i normalnych. Ta metoda nie dała satysfakcjonujących rezultatów. Położenie płaszczyzny krytycznej może być jednak zdefiniowane również jako to,

w którym występuje maksymalna kowariancja naprężeń stycznych i normalnych w danej płaszczyźnie.

W pracy (Carpinteri i inni, 2009) zaproponowano wyznaczenie położenia płaszczyzny krytycznej w oparciu o stosunek granic zmęczenia na skręcanie i zginanie według następującej formuły

$$\alpha = 45^\circ \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{\tau_{af}}{\sigma_{af}} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

W tym przypadku kąt  $\alpha$  jest kątem pomiędzy maksymalnym naprężeniem normalnym a kierunkiem normalnym do płaszczyzny krytycznej. Daje to w efekcie kąt  $0^\circ$  dla stosunku równego 1 (materiały kruche) oraz  $45^\circ$  dla stosunku równego  $\sqrt{2}$  (materiały sprężysto-plastyczne).

Celem niniejszej pracy jest wyznaczenie trwałości zmęczeniowej dla próbek wykonanych ze stopu aluminium PA6 badanych w warunkach proporcjonalnych i nieproporcjonalnych obciążeń cyklicznych oraz proporcjonalnych losowych z wykorzystaniem ekstremum kowariancji naprężeń

w płaszczyźnie krytycznej według kryterium naprężeniowego.

### 2. KRYTERIA WIELOOSIOWEGO ZMĘCZENIA W PŁASZCZYŹNIE KRYTYCZNEJ

Kryteria naprężeniowe stanowią liczną grupę wśród kryteriów wieloosiowego zmęczenia. Istnieje kilka sposobów zapisu matematycznego kryteriów. Zapis w płaszczyźnie krytycznej w ogólnej postaci wyrażenia na wartości ekwiwalentną przedstawiono wzorem

$$\sigma_{eq}(t) = B \tau_{ns}(t) + K \sigma_n(t). \quad (2)$$

Płaszczyzna krytyczna może być zdefiniowana przez naprężenie styczne, normalne lub w sposób pośredni.

W przypadku, gdy płaszczyzna krytyczna zdefiniowana jest przez naprężenia styczne wzór (2) na naprężenia ekwiwalentne przyjmuje postać

$$\sigma_{eq}(t) = B\tau_{\eta s}(t) + (2-B_1)\sigma_{\eta}(t), \quad (3)$$

gdzie

$$B_1 = \sigma_{af} / \tau_{af} \quad (4)$$

w przypadku równoległych charakterystyk S-N dla zginania oraz skręcania z czym najczęściej mamy do czynienia, co wykazał Staniczek (2005).

Z kryteriów wieloosiowego zmęczenia zdefiniowanych w płaszczyźnie krytycznej określonej przez parametr styczny szacować można trwałość dla elementów wykonanych z materiałów sprężysto-plastycznych.

W przypadku, gdy płaszczyzna krytyczna zdefiniowana jest przez naprężenia normalne (materiały kruche) wzór (2) na naprężenia ekwiwalentne przyjmuje postać

$$\sigma_{eq}(t) = B_2 \tau_{\eta s}(t) + \sigma_{\eta}(t). \quad (5)$$

Należy zwrócić uwagę, że w tym przypadku współczynnik  $B_2$  otrzymuje się na podstawie najlepszej korelacji wyników badań eksperymentalnych i obliczeniowych dla obciążeń nieproporcjonalnych (Łagoda i Ogonowski, 2005).

Dla materiałów charakteryzujących się własnościami pośrednimi pomiędzy materiałami kruchymi i sprężysto-plastycznymi wyprowadzono następującą postać wyrażenia na wartość ekwiwalentną naprężenia (Walat i Łagoda, 2008a, 2008b, 2009)

$$\sigma_{eq}(t) = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}B_1}{3(\sqrt{3} \pm 1)} \sigma_{\eta}(t) + \frac{\sqrt{3}(3\sqrt{2}B_1 - 4)}{3(\sqrt{3} \pm 1)} \tau_{\eta s}(t). \quad (6)$$

## 2. ALGORYTM OCENY TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ

Na rysunku 1 przedstawiono ogólny algorytm oceny trwałości zmęczeniowej w złożonym losowym stanie obciążenia.

1. **Określenie składowych przebiegów,  $\sigma_{xx}(t)$ ,  $\tau_{xy}(t)$**
2. **Wyznaczenie kierunku płaszczyzny krytycznej,  $\alpha$**
3. **Obliczenie przebiegu ekwiwalentnego,  $\sigma_{eq}(t)$**
4. **Wyznaczenie amplitud cykli,  $\sigma_{eqa}$**
5. **Kumulacja uszkodzeń zmęczeniowych**
6. **Obliczenie trwałości zmęczeniowej,  $N_{cal}$ ,  $(T_{cal})$**

Rys. 1. Algorytm oceny trwałości zmęczeniowej

Algorytm wyznaczania trwałości zmęczeniowej stanowi ogólny model wyznaczania trwałości zmęczeniowej w wieloosiowym stanie naprężenia z wykorzystaniem kryteriów opartych na koncepcji płaszczyzny krytycznej. W algorytmie tym można wyróżnić pewne etapy.

Wielkościami wyjściowymi do procesu wyznaczania trwałości zmęczeniowej są w analizowanym przypadku przebiegi naprężeń normalnych  $\sigma_{xx}(t)$  pochodzących od zginania oraz naprężeń stycznych  $\tau_{xy}(t)$  pochodzących od skręcania na podstawie zadanego sinusoidalnie lub losowo zmiennego momentu zginającego  $M_g(t)$  i skręcającego  $M_s(t)$ . W drugim etapie wyznaczane jest położenie płaszczyzny krytycznej.

Chcąc zdefiniować płaszczyznę krytyczną poprzez maksimum kowariancji naprężeń normalnych i stycznych należy wyznaczyć kowariancje we wszystkich możliwych płaszczyznach  $\alpha$  według zależności:

$$\mu_{\sigma, \tau} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sigma_n(t) \tau_{\eta s}(t) dt \quad (7)$$

gdzie  $T_0$  jest czasem obserwacji.

Naprężenie normalne i styczne w przypadku kombinacji zginania i skręcania pod kątem  $\alpha$  można wyznaczyć odpowiednio ze wzorów:

$$\sigma_{\eta}(t) = \cos 2\alpha \sigma_{xx}(t) + \sin 2\alpha \tau_{xy}(t) \quad (8)$$

i

$$\tau_{\eta s}(t) = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \sigma_{xx}(t) + \cos 2\alpha \tau_{xy}(t), \quad (9)$$

gdzie naprężenia  $\sigma_{xx}(t)$  i  $\tau_{xy}(t)$  są odpowiednio naprężeniami pochodzącymi od zginania i skręcania.

Położenie płaszczyzny, w której kowariancja według wzoru (7) przyjmuje wartości ekstremalne dla danej kombinacji naprężeń normalnych  $\sigma_{\eta}(t)$  i stycznych  $\tau_{\eta s}(t)$  definiowana jest jako płaszczyzna krytyczna. W wyniku tak przeprowadzonych obliczeń uzyskuje się kilka ekstremów lokalnych. W takim przypadku konieczne jest wyznaczenie trwałości zmęczeniowej we wszystkich wyznaczonych płaszczyznach krytycznych. Trwałością obliczeniową jest wtedy minimalna trwałość uzyskana dla wszystkich wyróżnionych płaszczyzn krytycznych.

W trzecim etapie wyznaczany jest przebieg naprężenia ekwiwalentnego w jednej z płaszczyzn krytycznych wyznaczonych w etapie drugim według jednego z wyrażenia danych ogólnym wzorem (6).

Podstawowe związki pomiędzy naprężeniami normalnymi i stycznymi w funkcji położenia płaszczyzny krytycznej pozwalają na podstawie analizy czystego zginania i czystego skręcania uzyskać dwie postacie kryterium wieloosiowego zmęczenia zadanego w ogólnej postaci (1), a w szczegółowej w postaci (6).

Następnie wyznaczono ekstrema z przebiegu czasowego danego wzorem (6) i kolejno zliczono amplitudy cykli metodą płynącego deszczu.

W ostatnim etapie wyznaczana jest trwałość zmęczeniowa z charakterystyki zmęczeniowej S-N, dla czystego zginania. Kumulacje uszkodzeń zmęczeniowych dokonano zgodnie z liniową hipotezą kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych Palmgrema-Minera. W procesie kumulacji uszkodzeń uwzględniono wszystkie cykle.

Powyższy algorytm jest słuszny przy założeniu braku wpływu wartości średniej co jest prawdziwe przy zerowej

wartości średniej całego przebiegu i współczynnika nieregularności I dążącym do jedności.

### 3. MATERIAŁ I PRÓBKKI

Do badań zmęczeniowych został wykorzystany stop duraluminium PA6. Do analizy zostały wykorzystane badania zmęczeniowe Klugera, Ogonowskiego, Kardasa i uzupełniające własne (Łagoda i Ogonowski, 2005; Macha i inni, 2006, Kardas i inni, 2008).

Innym oznaczeniem tego materiału jest AlCuMg1 według normy DIN, AlCu4MgSi(A) według normy międzynarodowej ISO lub 2017(A)–T4 według normy ASTM. Materiał ten zaliczany jest do grupy bezcyngowych stopów aluminium do obróbki plastycznej. Najważniejszymi składnikami stopowymi są miedź, odpowiadająca za podwyższenie wytrzymałości i twardość oraz mangan, dodawany w celu polepszenia odporności na korozję. Te dobre własności wytrzymałościowe oraz antykorozyjne przy jednoczesnym małym ciężarze właściwym spowodowały, że stop PA6 jest szeroko wykorzystywany na silnie obciążone konstrukcje m.in. w przemyśle lotniczym, maszynowym, stoczniowym i budownictwie. Ponadto dotychczas zostało przeprowadzone stosunkowo niewiele badań zmęczeniowych stopów aluminium w porównaniu ze ogromną ilością badań wszelkiego typu stali. Skład chemiczny oraz własności mechaniczne przedstawiono odpowiednio w tabeli 1 i 2. Własności cykliczne przedstawiono w tabeli 3.

**Tab. 1.** Skład chemiczny stopu aluminium PA6

Cu	3,5÷4,5
Mg	0,4÷0,1
Si	0,2÷0,8
Mn	0,4÷1,0
Fe	0,7
Zr+Ti	<0,25
Zn	<0,25
Cr	<0,1
Inne razem	<0,15
Inne oddzielnie	<0,05
Al	reszta

**Tab. 2.** Własności mechaniczne stopu aluminium PA6

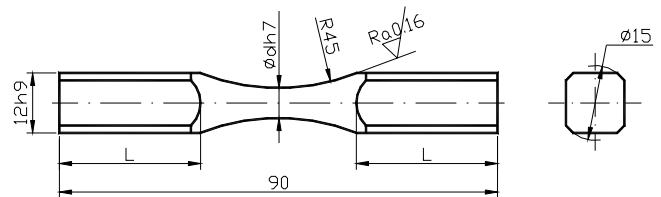
$R_e$ , MPa	395
$R_m$ , MPa	545
$A_5$ , %	21
$\rho$ , g/m <sup>3</sup>	2,8
$E$ , MPa	72060
$\nu$	0,32

**Tab. 3.** Własności cykliczne stopu aluminium PA6

$K$ , MPa	489
$n$	0,032
$\sigma_f$ , MPa	642
$\epsilon$	1,890
$b$	-0,065
$c$	-1,008

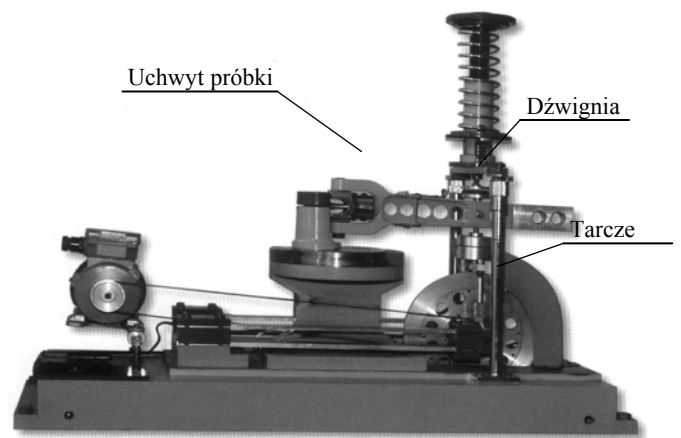
Stop do badań pozyskano w postaci okrągłych prętów ciągnionych o średnicy  $\phi 16$ mm. Stan T4 informuje o wcześniejszym poddaniu prętów obróbce polegającej na naturalnym starzeniu będącym jednym ze sposobów utwardzania wydzielinowego, prowadzonego w temperaturze otoczenia. Obróbka plastyczna poprzez ciągnięcie pręta, spowodowała powstanie struktury pasmowej.

Do badań zastosowano gładkie (bez karbu geometrycznego) próbki walcowe typu „diabolo” przedstawione na rysunku 2 o specyficznej geometrii ułatwiającej lokalizacji przekroju o największych naprężeniach. Średnica próbek  $d$  w największym miejscu wynosiła 10mm dla zginania, skręcania oraz proporcjonalnego zginania ze skręcaniem. Dla nieproporcjonalnego zginania ze skręcaniem ze względu na zastosowanie innego stanowiska badawczego przyjęto z kolei próbki o średnicy 8,5mm.



**Rys. 2.** Geometria próbek użytych do badań

Badania przeprowadzono na trzech typach stanowisk konstrukcji dra H. Achtelika. Cykliczne badania proporcjonalne przeprowadzono na maszynie MZGS 100. Zdjęcie tego stanowiska przedstawiono na rysunek 3.



**Rys. 3.** Stanowisko badawcze MZGS 100

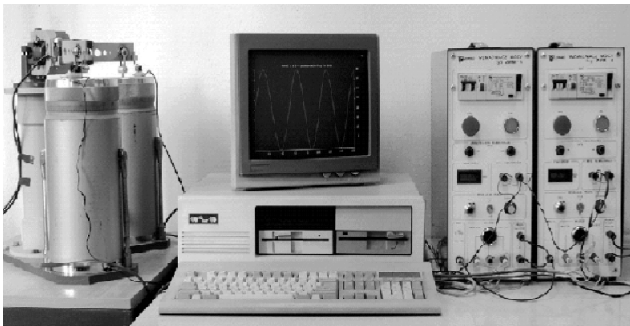
Losowo proporcjonalne badania zmęczeniowe przeprowadzono na stanowisku MZGS 100L. Stanowisko to (rysunek 4) jest urządzeniem przeznaczonym do realizacji badań zmęczeniowych na próbkach wzorcowych pozwalające prowadzić losowe badania zmęczeniowe przy obciążeniach zginających, skręcających i dowolnej kombinacji proporcjonalnego zginania ze skręcaniem.

Maszyna zmęczeniowa MZGS–200L (rysunek 5) jest wyposażona w dwa wzbudniki elektromagnetyczne, których drgania za pomocą dwóch dźwigni (osobno dla zginania oraz skręcania) są przenoszone na badaną próbkę w postaci przebiegów czasowych momentu gnącego oraz

skręcającego. Stanowisko to umożliwia przeprowadzenie dowolnych badań nieproporcjonalnych. Na stanowisku tym przeprowadzono badania zmęczeniowe przy badaniach cyklicznych o różnym przesunięciu fazy oraz nieproporcjonalne badania losowe przy kombinacji zginania ze skręcaniem.



Rys. 4. Stanowisko zmęczeniowe MZGS-100L.



Rys. 5. Maszyna zmęczeniowa MZGS-200L

Na podstawie badań cyklicznych w prostych stanach obciążenia uzyskano charakterystyki zmęczeniowe S-N, zgodnie z normą ASTM (1998) dla czystego zginania

$$\log N_f = 21,81 - 7,03 \log \sigma_a \quad (10)$$

i dla czystego skręcania

$$\log N_f = 19,94 - 6,87 \log \tau_a \quad (11)$$

Porównując współczynniki nachylenia we wzorach (10) i (11) można zauważyć, że charakterystyki te są praktycznie równoległe.

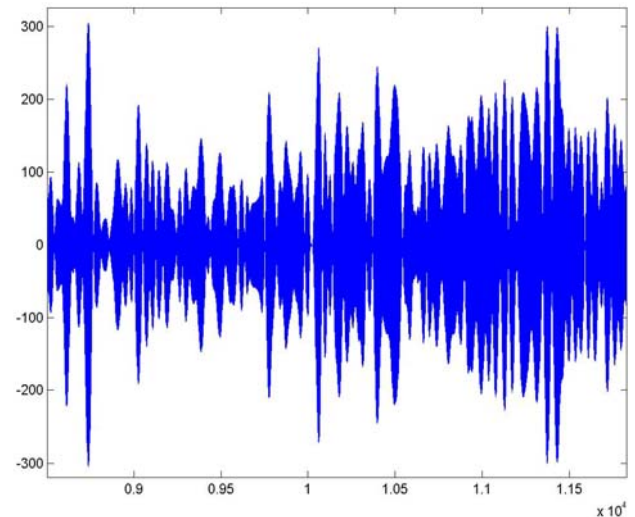
W przypadku badań cyklicznych analizę przeprowadzono dla czystego zginania i skręcania oraz dla badań obciążeń proporcjonalnych ( $\tau_a=0,25\sigma_a$ ,  $\tau_a=0,5\sigma_a$ ,  $\tau_a=\sigma_a$ ) i nieproporcjonalnych z przesunięciem fazy  $60^\circ$  ( $\lambda=0,5$ ) i  $90^\circ$  ( $\lambda=0,25$ ,  $\lambda=0,5$ ,  $\lambda=1$ ).

Przez  $\lambda$  należy rozumieć stosunek amplitud między naprężeniami stycznymi i normalnymi pochodzącymi od skręcania i zginania

$$\lambda = \frac{\tau_{axy}}{\sigma_{axx}} \quad (12)$$

W przypadku badań losowych analizę przeprowadzono dla czystego zginania i skręcania oraz dla obciążeń proporcjonalnych przy współczynniku korelacji równemu 1 ( $\tau_{amax}=0,25\sigma_{amax}$ ,  $\tau_{amax}=0,5\sigma_{amax}$ ,  $\tau_{amax}=\sigma_{amax}$ ).

Na rysunku 6 przedstawiono fragment historii obciążenia wygenerowanego na stanowisku badawczym dla jednego z momentów obciążenia.



Rys. 6. Przykładowy fragment losowego przebiegu naprężenia

#### 4. PORÓWNANIE TRWAŁOŚCI OBLICZENIOWYCH Z EKSPERYMENTALNYMI

Zgodnie z procedurą przedstawioną wcześniej dla wszystkich analizowanych przypadków wyznaczono płaszczyzny krytyczne, które w przypadku czystego zginania zlokalizowane są pod kątem  $30^\circ$  i  $-30^\circ$ , a w przypadku czystego skręcania mamy do czynienia z czterema płaszczyznami krytycznymi położonymi pod kątem kolejno  $-22,5^\circ$ ,  $-67,5^\circ$ ,  $22,5^\circ$  i  $67,5^\circ$ . Wyniki wyznaczania położenia płaszczyzn krytycznych dla kombinacji zginania ze skręcaniem, w których osiągnięto lokalne ekstrema kowariancji zestawiono w Tabeli 4. W przypadku obciążeń losowych dla korelacji równej 1 odpowiadają płaszczyzny dla przesunięcia fazy  $0^\circ$  przy obciążeniach cyklicznych.

Tab. 4. Położenia płaszczyzn krytycznych w przypadku obciążeń cyklicznych

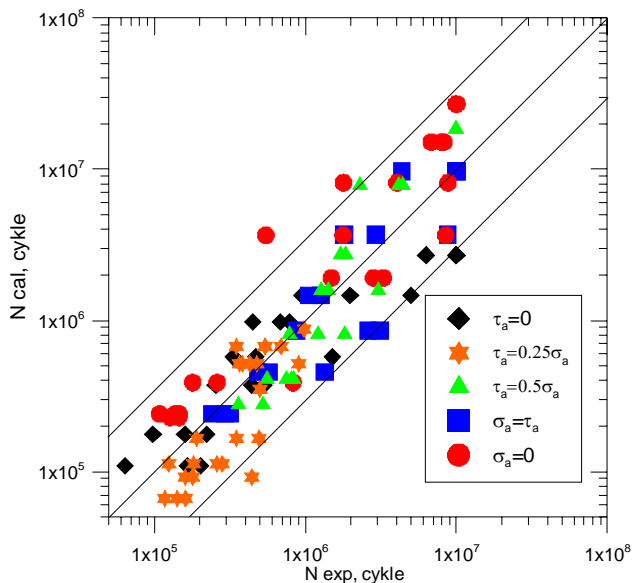
	$\varphi=0^\circ$ ( $r=1$ )		$\varphi=60^\circ$		$\varphi=90^\circ$ ( $r=0$ )	
	$\lambda=1$	$\lambda=0,5$	$\lambda=0,25$	$\lambda=1$	$\lambda=0,5$	$\lambda=0,25$
$\lambda=1$	$20^\circ$	$56^\circ$	$-17^\circ$	$45^\circ$	$-62^\circ$	$62^\circ$
$\lambda=0,5$	$-16^\circ$	$43^\circ$	$-19^\circ$	$40^\circ$	$-36^\circ$	$36^\circ$
$\lambda=0,25$	$-19^\circ$	$40^\circ$			$-31^\circ$	$31^\circ$

Następnie wyznaczono trwałości zmęczeniowe z wykorzystaniem kryterium danego wzorem (6). Położenie płaszczyzny, w której bezwzględna wartość lokalnych ekstremów kowariancji osiąga maksimum jest płaszczyzną krytyczną. Tak wyznaczone trwałości obliczeniowe porównano z eksperymentalnymi trwałościami. Na rysunku 7 i 8 przedstawiono odpowiednio porównanie dla cyklicznych

obciążeń proporcjonalnych i nieproporcjonalnych. W przypadku obciążeń proporcjonalnych (rysunek 8) praktycznie wszystkie wyniki obliczeń mieszczą się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 3. W przypadku obciążeń nieproporcjonalnych (rysunek 9) dla mniejszych trwałości zmęczeniowych dla zakresu do  $2 \cdot 10^5$  cykli większość wyników mieści się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 3. W przypadku większych wartości trwałości zmęczeniowych dla stosunku amplitud  $\lambda=1$  i przesunięcia fazy  $\varphi=90^\circ$  znaczna część wyników mieści się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 4 i wyniki są nieco zawyżone; a dla  $\lambda=0,5$  i przesunięcia fazy  $\varphi=60^\circ$  podobnie większość wyników zawiera się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 4 i wyniki są zaniżone.

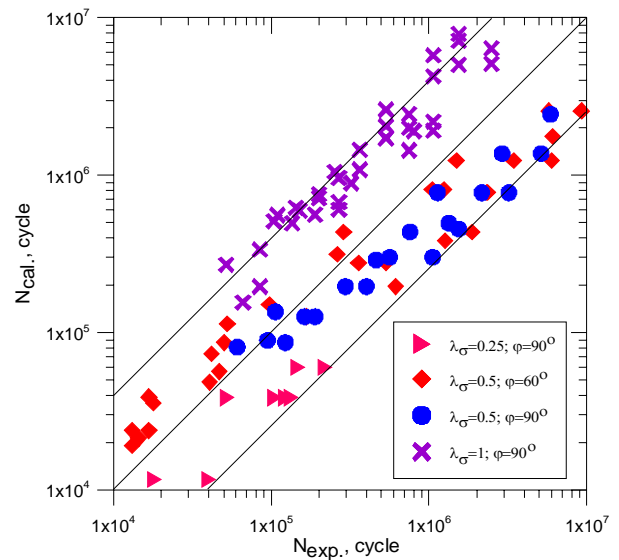
Na uwagę zasługują wyniki uzyskane dla obciążeń o stosunku amplitud  $\lambda=0,5$  i przesunięcia fazy  $\varphi=90^\circ$ , z badań literaturowych na przykład Grubisica i Simburgera (1976) wynika, iż bardzo trudno dla tych obciążeń uzyskać wysoce zadowalającą zgodność wyników ze względu na problem wyznaczania położenia płaszczyzny krytycznej według standardowych metod.

Na rysunku 9 porównano trwałości obliczeniowych z eksperymentalnymi dla proporcjonalnych obciążeń losowych. Trwałości obliczeniowe mieszczą się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 4 zarówno dla proporcjonalnych jak i nieproporcjonalnych badań cyklicznych oraz proporcjonalnych badań losowych.

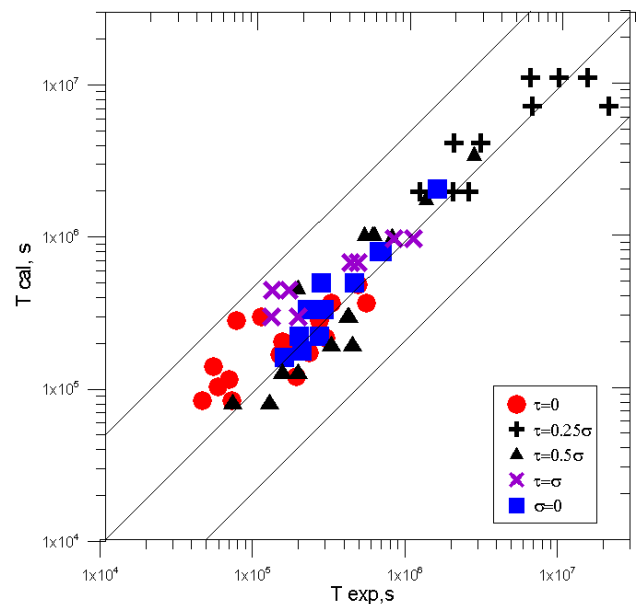


Rys. 7. Porównanie trwałości obliczeniowych z eksperymentalnymi dla obciążeń cyklicznych proporcjonalnych

Warto zwrócić uwagę, że zdecydowana większość wyników obliczeń zarówno dotyczących badań cyklicznych jak i losowych mieści się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 3. Takie pasmo rozrzutu jest charakterystyczne dla badań zmęczeniowych dla większości materiałów w warunkach cyklicznego zginania, który to stan obciążenia jest punktem odniesienia.



Rys. 8. Porównanie trwałości obliczeniowych z eksperymentalnymi dla obciążeń cyklicznych nieproporcjonalnych



Rys. 9. Porównanie trwałości obliczeniowych z eksperymentalnymi dla obciążeń losowych

## 5. WNIOSKI

1. Położenie płaszczyzny krytycznej może być zdefiniowane jako to, w której występuje ekstremum kowariancji pomiędzy naprężeniami normalnymi i stycznymi.
2. W przypadku złożonych stanów naprężenia może wystąpić kilka położen płaszczyzny krytycznej, co w świetle wybranej metody jest zjawiskiem uzasadnionym.
3. Trwałości obliczeniowe mieszczą się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 4 zarówno dla proporcjonalnych jak i nieproporcjonalnych badań cyklicznych oraz proporcjonalnych badań losowych. Warto zwrócić uwagę, że zdecydowana większość wyników obliczeń mieści się w paśmie rozrzutu o współczynniku równym 3.

## LITERATURA

1. ASTM E 739-91 (1998), Standard practice for statistical analysis of linearized stress-life (S-N) and strain life ( $\epsilon$ -N) fatigue data, in: *Annual Book of ASTM Standards*, Vol. 03.01, Philadelphia 1999, 614-620.
2. Będkowski W. (1989), *Wyznaczanie oczekiwanych kierunków płaszczyzn złomu zmęczeniowego materiałów w warunkach złożonych stanów naprężenia*, Raport nr 2/89, IBM WSI w Opolu.
4. Carpinteri A., Spagnoli A., Vantatori S. (2009), Fatigue life estimation under multiaxial random loading using a critical plane-base criterion, *Second International Conference on Material Performance under Variable Amplitude Loading*, Proceedings, Vol. I, Darmstadt, 2009, C.M.Sonsino and P.C. McKeighan, Eds, DVM, Berlin, 474-486.
5. Grubisic V., Simburger A. (1976), Fatigue under combined out-of-phase multiaxial stresses, *Fatigue Testing and Design 2, Proceedings of S.E.E. International Conference 5*, London, 27.1-27.8.
6. Kardas D., Kluger K., Łagoda T., Ogonowski P. (2008), Fatigue life under proportional constant amplitude bending with torsion in energy approach basic on aluminium alloy 2017(a), *Materials Science*, Vol. 44, No. 4., 541-549.
7. Łagoda T., Ogonowski P. (2005), Criteria of multiaxial random fatigue based on stress, strain and energy parameters of damage in the critical plane, *Mat.-wiss. u. Werkstofftech*, Vol. 36, No 9, 429-437.
8. Macha E., Łagoda T., Niesłony A., Kardas D. (2006), Fatigue life variable-amplitude loading according to the cycle counting and spectral methods, *Materials Science*, Vol. 42., No. 3, 416-425.
9. Miner M.A. (1945), Cumulative damage in fatigue, *J. Applied Mechanics*, Vol. 12, 159-164.
10. Palmgren A. (1924), *Die Lebensdauer von Kugellagern*, VDI-Z, Vol. 68, 339-341.
11. Staniczek S. (2005), *Zależność pomiędzy wytrzymałością zmęczeniową na zginanie i skręcanie wybranych materiałów konstrukcyjnych*, Praca dyplomowa, Politechnika Opolska.
12. Walat K., Łagoda T. (2008a), Korelacja między naprężeniami stycznymi i normalnymi w płaszczyźnie krytycznej, *XXI Konferencja Naukowa Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych*, Zakopane 2008. Streszczenia referatów, Politechnika Opolska, Opole, 167-168, teksty referatów, cd, 629-635.
13. Walat K., Łagoda T. (2008b), Naprężenie ekwiwalentne w płaszczyźnie krytycznej wyznaczonej przez maksimum kowariancji naprężeń stycznych i normalnych, *XXII Sympozjum Zmęczenie i Mechanika Pękania*, Wydawnictwo Uczelniane Uniwersytetu Technologiczno-Przyrodniczego W Bydgoszczy, Bydgoszcz, 337-344.
14. Walat K., Łagoda T. (2009), Zastosowanie ekstremum kowariancji płaszczyźnie krytycznej do wyznaczania trwałości zmęczeniowej przy obciążeniach cyklicznych, *XXII Konferencja Naukowa Problemy Rozwoju Maszyn Roboczych*, Zakopane 2009, Zeszyty Naukowe – Budowa i Eksploatacja Maszyn, Politechnika Świętokrzyska, 169-170.

## APPLICATION OF THE COVARIANCE EXTREMUM ON THE CRITICAL PLANE FOR FATIGUE LIFE DETERMINATION UNDER RANDOM BENDING AND TORSION LOADING

**Abstract:** The paper presents application of the covariance extremum between normal and shear stresses for determination of the critical plane position. The fatigue stress criterion was formulated as a linear combination of normal and shear stresses on the defined critical plane. The weight coefficients occurring in this criterion were determined from fatigue tests in the layer of pure bending and pure torsion. The proposed model was verified while fatigue tests under cyclic and random proportional and non-proportional bending with torsion (specimens made of aluminium alloy PA6-T4 were tested).



UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Praca współfinansowana ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego