

## NUMERYCZNO-EKSPERYMENTALNA ANALIZA STANÓW ZAKRYTYCZNEJ DEFORMACJI PŁYTY ROZCIĄGANEJ OSŁABIONEJ SZCZELINĄ

Tomasz KOPECKI\*

\*Katedra Samolotów i Silników Lotniczych, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska, ul. W. Pola 2, 35-959 Rzeszów

[tkopecki@prz.rzeszow.pl](mailto:tkopecki@prz.rzeszow.pl)

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono metodykę określania rozkładu naprężeń w stanach zakrytycznej deformacji poddanej rozciąganiu cienkościenną płytę prostokątną osłabioną szczeliną. Problem sformułowano, jako fizycznie i geometrycznie nieliniowy. Analizy numerycznej dokonano metodą elementów skończonych. W trakcie rozwiązywania zagadnienia nieliniowego, progresywną zmianę geometrii ustroju w kolejnych krokach przyrostowych konfrontowano z wynikami równolegle realizowanych badań doświadczalnych.

W celu odwzorowania szczeliny powstającej w rzeczywistych warunkach eksploatacyjnych, badaną płytę poddawano zmiennemu obciążeniu pulsującą siłą rozciągającą, wskutek czego długość szczeliny ulegała zwiększaniu. W warunkach obciążenia statycznego, po przekroczeniu wartości siły krytycznej odpowiadającej geometrii płyty, w strefie osłabienia pojawiały się, i w miarę wzrostu obciążania narastały przemieszczenia w kierunku normalnym do płaszczyzny płyty, określane, jako marszczenie lub wrinkling (ang.). Tego rodzaju deformacje powodują wystąpienie w konstrukcji zarówno błonowego jak i giętnego stanu naprężenia. W celu określenia wpływu stopnia osłabienia płyty na rozkład i wartości naprężeń analizę numeryczną prowadzono dla trzech wybranych stanów osłabienia, którym przyporządkowano trzy zróżnicowane długości szczeliny osiągane w trakcie obciążania płyty pulsującą siłą rozciągającą. Posługując się metodą mory cieniowej, we wszystkich trzech stanach osłabienia rejestrowano wartości i rozkłady ugięć w warunkach identycznego obciążenia siłą  $P=1500N$ . Otrzymane rezultaty stanowiły podstawę oceny wiarygodności wyników nieliniowej analizy numerycznej, uwarunkowanej obecnością zakładanej imperfekcji płyty w stanie neutralnym.

Rozważano dwa rodzaje imperfekcji: geometryczną - opartą na założeniu wstępnego ugięcia płyty w strefie osłabienia oraz w formie zaburzenia wywołanego obciążeniem normalnym do płaszczyzny płyty. Wskazano na istotne różnice w wynikach analizy opartej na obu rodzajach imperfekcji.

W konkluzji, zwrócono szczególną uwagę na zasadność koncepcji formułowania problemu oraz wyboru strategii jego rozwiązywania w ujęciu nieliniowym, z jednoczesną eksperymantalną weryfikacją wyników.

### 1. WPROWADZENIE

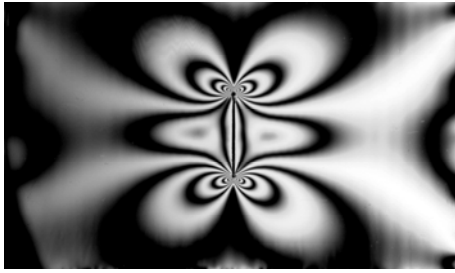
Racjonalne projektowanie ustrojów nośnych sugeruje konieczność zwracania szczególnej uwagi na strefy charakteryzujące się obecnością wysokich poziomów i gradientów naprężeń decydujących o trwałości i niezawodności konstrukcji. Określanie stanu naprężenia w owych strefach na etapie projektowania, gdy odpowiednich zmian w konstrukcji można dokonać przed kosztowną i czasochłonną realizacją warsztatową rozwiązania prototypowego wymaga analizy pracy konstrukcji w pełnym zakresie eksploatacyjnie dopuszczalnych deformacji. Dotyczy to w szczególności ustrojów cienkościennych, w których w zakresie obciążeń dopuszczalnych występują stany zakrytyczne. Rozwiązanie problemu rozkładu naprężeń w owych stanach wymaga stosowania analizy nieliniowej opartej na metodach numerycznych, głównie metodzie elementów skończonych. Mimo istnienia szerokiego spektrum metod i algorytmów umożliwiających rozwiązywanie problemów nieliniowych, w przypadkach ustrojów cienkościennych o złożonej geometrii, w trakcie rozwiązywania zagadnienia nieliniowego otrzymywane konfiguracje geometryczne odpowiadające kolejnym stanom równowagi mogą wyka-

zywać znaczące rozbieżności w stosunku do rzeczywistego stanu deformacji rejestrowanego w trakcie badań eksperymentalnych.

Do tej kategorii ustrojów można zaliczyć cienkie płyty osłabione obecnością szczelin lub wykrojów. Gdy konstrukcje te poddajemy rozciąganiu, w warunkach osiągania lub przekraczania krytycznej wartości obciążenia w strefie osłabienia pojawiają się, i w miarę wzrostu obciążania narastają, przemieszczenia w kierunku normalnym do płaszczyzny płyty określane jako marszczenie lub wrinkling (ang.). Zaistniały stan deformacji zakrytycznej powoduje zasadniczą zmianę geometrii płyty, czego konsekwencją jest istotna redystrybucja naprężeń.

Przyczynę lokalnej utraty stateczności płyty osłabionej szczeliną uzasadniają zaistniały stan naprężenia. Uwidacznia go rozkład izochrom obserwowany w modelu płyty wykonanej z materiału optycznie czynnego (rys. 1).

Wysokie rzędy izochrom są tożsame z wysokimi wartościami różnicy głównych naprężeń normalnych, które mogą zaistnieć wyłącznie w przypadku zachowania znaków przeciwnych. W sąsiedztwie frontu szczeliny, pojawiają się zatem zarówno naprężenia rozciągające, jak również naprężenia ściskające w kierunku poprzecznym, co stwarza warunki do zaistnienia lokalnego wybożenia płyty.



Rys. 1. Rozkład izochrom w płycie rozciąganej ze szczeliną

Zagadnienia stateczności prostokątnych płyt rozciąganych osłabionych centralnie usytuowaną szczeliną stanowią przedmiot rozważań szeregu autorów (Markström i Storäkers B., 1980; Sih i Lee, 1986; Shaw and Huang, 1990; Riks i in., 1992; Dyszel, 2002; Brighnetti, 2005). Prezentowane rozważania, przeprowadzane na podstawie teorii zlinearyzowanych ograniczały się do określania krytycznych wartości obciążeń oraz postaci wybożenia płyty w zależności od orientacji kątowej szczeliny.

W dążeniu do rozszerzenia zakresu badań nad zagadnieniem zjawiska marszczenia charakterystycznego dla ustrojów cienkościennych, w niniejszej pracy podjęto próbę rozszerzenia badań na zakres analizy stanów deformacji zakrytycznych umożliwiającej wyznaczanie rozkładu naprężeń, w płycie osłabionej szczeliną. Przyjęto, iż rozważane zagadnienie jest w założeniu nieliniowe w sensie fizycznym i geometrycznym. W formie postulatu przyjęto, iż w rozwiązywaniu problemu fizycznie i geometrycznie nieliniowego zasadne jest dokonywanie bieżącej konfrontacji wyników analizy numerycznej z prowadzonymi równoległe badaniami eksperymentalnymi. W tym celu wykonano płytę z materiału wykazującego właściwości sprężyste i nie-sprężyste, dla którego w próbie jednoosiowego rozciągania wyznaczono charakterystykę natychmiastową. W trakcie badań płytę poddawano zmiennemu obciążeniu pulsującą siłą rozciągającą, wskutek czego długość szczeliny ulegała zwiększaniu. Analizę numeryczną prowadzono dla trzech wybranych wartości długości szczeliny osiągniętych w trakcie badań zmęczeniowych, dla których metodą mory cieniowej (Patorski i Kujawińska, 1993) rejestrowano rozkłady deformacji w kierunku normalnym do płaszczyzny płyty.

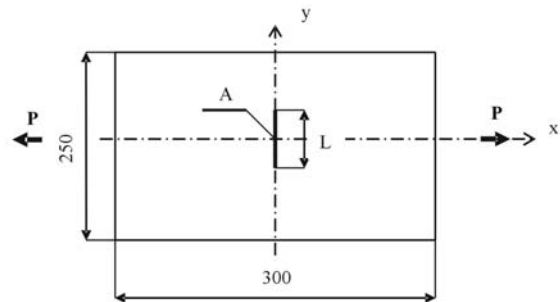
Obliczenia numeryczne wykonywano metodą elementów skończonych. Zwrócono szczególną uwagę na skuteczność stosowanych metod i procedur, zapewniających zgodność wyników obliczeń z eksperymentem. Stopień zgodności deformacji w stanie zakrytycznym przyjmowano jako podstawę uznania za wiarygodny stan naprężenia określony na podstawie nieliniowej analizy numerycznej (Crisfield, 1997; Felippa i in., 1994; Felippa, 1976).

## 2. BADANIA EKSPERYMENTALNE

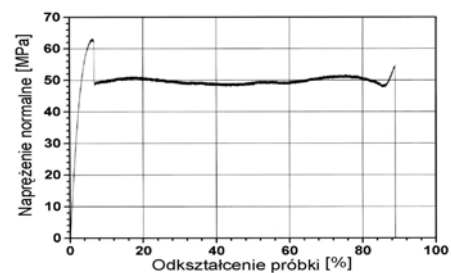
Przedmiot badań stanowiła płyta o wymiarach: 300mm x 250mm, grubości 0.7mm (rys. 2) wykonana z poliwęglanu o charakterystyce fizycznej przedstawionej na rys. 3.

W centralnej części płyty nacięto szczelinę zorientowaną prostopadle do kierunku obciążania, o długości począt-

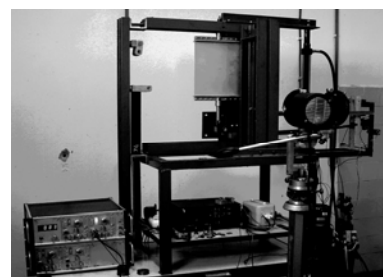
kowej zbliżonej do wymiaru  $L=30\text{mm}$ . Pełny wymiar 300mm osiągnięto w wyniku propagacji szczeliny spowodowanej pulsującym obciążeniem rozciągającym zmieniającym się w przedziale: (0 – 1500)N (Kopecki i Zacharzewski, 2006). Płytę zamocowano w sztywnych uchwytach, zapewniających stałość docisku szczęk. Poza strefą osłabienia zlokalizowaną w sąsiedztwie szczeliny, przyjęty sposób mocowania płyty zapewniał jednorodność pola przemieszczeń, o dominującej składowej zgodnej z kierunkiem siły rozciągającej. Jednorodność tę kontrolowano w trakcie badań, poddając płytę ciągłej obserwacji w świetle spolaryzowanym.



Rys. 2. Geometria płyty



Rys. 3. Wykres rozciągania materiału płyty



Rys. 4. Stanowisko do badań z zamontowaną płytą

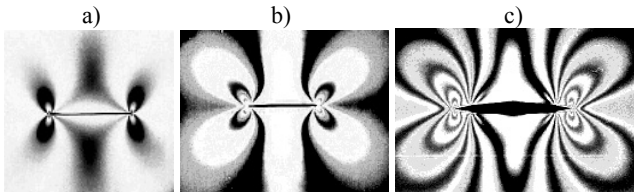
Wskutek zmiennego obciążenia długość szczeliny ulegała zwiększaniu w miarę wzrostu liczby cykli. Badania prowadzono do czasu, gdy długość szczeliny osiągnęła wartość 70mm. Właściwości polaryzacyjno-optyczne materiału płyty pozwalały na jednoczesną obserwację efektów optycznych. Rejestracji obrazów dokonywano posługując się metodą światła odbitego. W tym celu badaną płytę pokryto od strony wewnętrznej warstwą refleksyjną.

Rys. 5 przedstawia rozkłady efektów optycznych obserwowanych w świetle kołowo spolaryzowanym, dla trzech stanów deformacji odpowiadających wybranym

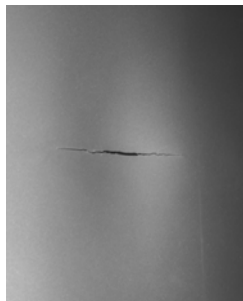
długościom szczeliny. Rejestracji fotograficznej dokonywano przy identycznym poziomie obciążenia siłą  $P=1500\text{ N}$ .

Otrzymane obrazy nie stwarzały podstaw do interpretacji ilościowej wyników, gdyż ze względu na obecność stanu giętnego w strefach najwyższego poziomu wyężenia, nie mogą one być interpretowane jako izochromy (Aben, 1979; Laermann, 1982). Jako wyniki badań doświadczalnych o charakterze jakościowym są wysoce przydatne w ocenie rozkładów wyężenia otrzymywanych na podstawie analizy numerycznej, jak również w określaniu poziomów obciążania, przy których pojawiają się pierwsze, lokalne deformacje trwałe.

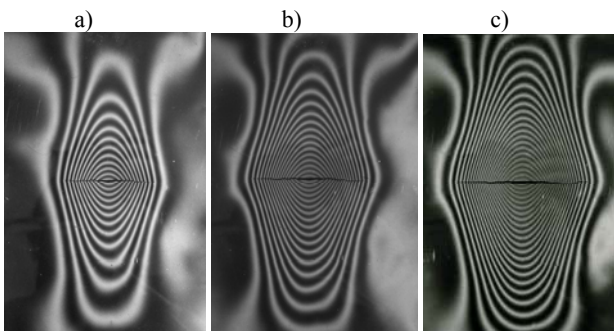
W każdej z rozpatrywanych faz rejestrowano przemieszczenie w kierunku normalnym do płaszczyzny płyty (ugięcie). Fotografię obrazującą stan deformacji zakrytycznej odpowiadający długości szczeliny  $L=70\text{ mm}$  przedstawia rys.6, zaś obrazy prążków mory ilustrujące pole ugięć prezentuje rysunek 7.



Rys. 5. Rozkłady izochrom w strefie szczeliny w warunkach ekstremalnego obciążenia, a)  $L=30\text{ mm}$ ; b)  $L=50\text{ mm}$ ; c)  $L=70\text{ mm}$



Rys. 6. Fotografia obrazująca zmarszczenie płyty w sąsiedztwie szczeliny o długości  $L=70\text{ mm}$ ,  $P=1500\text{ N}$ ,  $f_{\max}=5.72\text{ mm}$



Rys. 7. Obrazy prążków mory ilustrujące jakościowy i ilościowy charakter deformacji poprzecznych: a)  $L=30\text{ mm}$   $f_{\max}=3.12\text{ mm}$  b)  $L=50\text{ mm}$   $f_{\max}=4.42\text{ mm}$ , c)  $L=70\text{ mm}$   $f_{\max}=5.72\text{ mm}$

Każdej z warstwic odpowiadała stała wartość ugięcia. Z doboru parametrów rastra oraz warunków rejestracji obrazów wyznaczono odległość pomiędzy sąsiednimi warstwicami, która wynosiła  $0.26\text{ mm}$ . Na tej podstawie wyznaczono maksymalne ugięcia płyty  $f_{\max}$  w wybranych fazach deformacji (rys. 7)

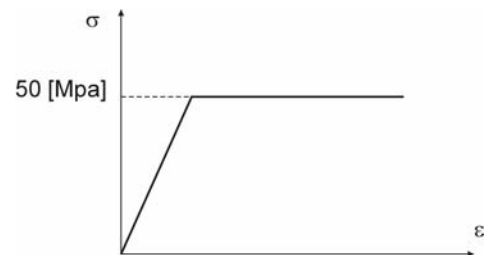
### 3. ANALIZA NUMERYCZNA

W nieliniowej analizie struktur nośnych relacje pomiędzy zbiorem parametrów statycznych, a odpowiadającym im zbiorem parametrów geometrycznych można przedstawić w formie równania macierzowego (Crisfield, 1997; Felippa i in., 1994; Felippa, 1976; Rakowski i Kacprzyk, 1993):

$$\mathbf{g} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{g}) \mathbf{f}. \quad (1)$$

gdzie  $\mathbf{g}$  jest zbiorem parametrów geometrycznych opisujących stan deformacji ustroju wywołany obciążeniem,  $\mathbf{f}$  – jest zbiorem parametrów statycznych, zaś  $\mathbf{K}$  – macierzą sztywności zależną od zbioru parametrów geometrycznych określających aktualny stan deformacji oraz nieliniowego związku konstytutywnego.

Wobec stwierdzenia obecności trwałych odkształceń w trakcie badań eksperymentalnych, wyznaczoną w próbie jednoosiowego rozciągania charakterystykę fizyczną materiału płyty (rys. 3) przybliżono modelem ciała idealnie sprężysto-plastycznego (rys. 8).



Rys. 8. Model materiału

W równaniu konstytutywnym, w opisie odnoszącym się do zakresu liniowo-sprężystego

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

utrzymano w mocy założenie o niezmienniczości długości odcinka normalnego ( $\varepsilon_z=0$ ).

Zatem stan naprężenia płyty reprezentowany jest przez wektor  $\boldsymbol{\sigma} = \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx} \}^T$ .

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \quad (3)$$

jest macierzą stałych materiałowych, w której poprzez wprowadzenie współczynnika korekcyjnego –  $k=1,2$

(MSC, 2006) uwzględniono wpływ odkształceń postaciowych na energię sprężystą płyty, zaś

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_x, \boldsymbol{\varepsilon}_y, \boldsymbol{\gamma}_{xy}, \boldsymbol{\gamma}_{yz}, \boldsymbol{\gamma}_{zx} \right\}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix} \quad (4)$$

jest wektorem zawierającym składowe stanu odkształcenia odpowiadające tensorowi odkształceń Greena – Saint-Venanta (MSC, 2006),  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  są składowymi wektora przemieszczenia w układzie lokalnym  $x, y, z$ .

Odwzorowania numeryczne nieliniowych deformacji rozważanego ustroju opierane są na założeniu, iż na dowolnym etapie rozwiązania przy odpowiadającym mu obciążeniu odkształcony układ zachowuje zawsze stan równowagi statycznej. Tak więc, dla zdefiniowanego układu dyskretnego można sformułować układ równań równowagi, który w odniesieniu do nieliniowej analizy strukturalnej w ujęciu metody przemieszczeniowej przedstawić można w formie macierzowego równania sił rezidualnych:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (5)$$

w którym  $\mathbf{u}$  jest wektorem stanu zawierającym składowe przemieszczenia węzłów struktury odpowiadające aktualnej konfiguracji geometrycznej,  $\boldsymbol{\Lambda}$  - macierzą zawierającą parametry kontrolne odpowiadające aktualnemu stanowi obciążenia, natomiast  $\mathbf{r}$  jest wektorem rezidualnym, zawierającym niezrównoważone składowe sił, związane z aktualnym stanem deformacji układu (Crisfield, 1997; Felippa i in., 1994).

W algorytmach numerycznych, składowe macierzy  $\boldsymbol{\Lambda}$  wyrażane są w funkcji parametru  $\lambda$  określanego jako parametr kontroli stanu. Jest on miarą przyrostu obciążenia związanego pośrednio lub bezpośrednio z parametrem pseudo-czasu –  $t$ . Zatem układ równań równowagi (5) można również przedstawić w postaci:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}, \quad (6)$$

Równanie powyższe określane jest jako monoparametryczne równanie sił rezidualnych. Jego rozwiązanie obejmuje skończoną liczbę kolejnych stanów deformacji struktury, przy czym każdemu stanowi odpowiada kombinacja zmieniających się parametrów kontrolnych związanych z obciążeniem układu, wyrażanych poprzez pojedynczy parametr kontroli stanu  $\lambda$ . Przejście od bieżącego stanu do kolejnego, wyrażające krok przyrostowy inicjowane jest przez zmianę parametru kontrolnego, któremu odpowiada nowa geometria struktury określona przez nowy wektor stanu (Felippa, 1976; Ramm, 1982).

Rzeczony rozwój metod numerycznych znajdujący swoje odzwierciedlenie we współczesnych algorytmach ujmowanych w profesjonalnych programach komercyjnych, ukonstytuował dwa zasadnicze rodzaje owych metod. Pierwsze, to metody czysto przyrostowe zwane również metodami prognostycznymi, drugie to metody korekcyjne, nazywane również prognostyczno-korekcyjnymi lub przyrostowo – iteracyjnymi. Pierwsze z wymienionych charakteryzują się ograniczoną, często niezadowalającą dokładnością uzyskiwanych wyników. Ponadto, nie stwarzają one możliwości kontynuowania obliczeń po przekroczeniu punktów krytycznych na ścieżce równowagi. Wprowadzana faza iteracyjna ma więc głównie na celu zmniejszenie błędu rozwiązania oraz umożliwienie określania punktów krytycznych. Zapewnia to możliwość analizy struktury w zaawansowanych stanach deformacji.

Wspólną cechą obydwu rodzajów metod jest obecność fazy przyrostowej. W odniesieniu do dowolnego przyrostu, przy przejściu ze stanu  $n$  do stanu  $n+1$ , wielkościami nie określonymi są:

$$\Delta \mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n \quad \text{oraz} \quad \Delta \lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n. \quad (7)$$

W celu ich wyznaczenia, formułowane jest dodatkowo równanie kontroli przyrostu, zwane równaniem więzów, wyrażane w formie warunku:

$$c(\Delta \mathbf{u}_n, \Delta \lambda_n) = \mathbf{0}, \quad (8)$$

Zasadniczym składnikiem fazy przyrostowej jest jej krok prognostyczny, określający punkt w hiperprzestrzeni stanu odpowiadający kolejnej konfiguracji układu, wyznaczonej poprzez określenie przyrostu  $\Delta \mathbf{u}$  dla przyjętego  $\Delta \lambda$ , przy jednoczesnym spełnianiu równania (8). Błąd rozwiązania

w danym kroku przyrostowym uzależniony jest od równania kontroli przyrostu oraz przyjętej formuły ekstrapolacyjnej. W każdym kolejnym kroku przyrostowym, wartość całkowitego błędu może ulegać zwiększaniu, co określane jest jako tzw. błąd dryfu. Jego zminimalizowanie zapewnia faza iteracyjna.

Podstawową metodą stosowaną w rozwiązywaniu nieliniowych problemów mechaniki konstrukcji jest dobrze oprogramowana metoda Newtona-Raphsona posiadająca szereg odmian, stanowiących rodzinę metod (Crisfield, 1997; Felippa i in., 1994; Rakowski i Kacprzyk, 1993). Istota owych metod opiera się na rozwinięciu w szereg Taylora równań: sił rezidualnych –  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$  oraz kontroli przyrostu –  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ .

Otrzymany w wyniku zbiór stanowiący rozwiązanie nieliniowego układu równań algebraicznych względem niewiadomych przemieszczeń węzłowych, stwarza podstawę wyznaczania ścieżki równowagi. W rozważanym zagadnieniu jako reprezentatywne parametry dla wyznaczenia ścieżki równowagi przyjęto zależność pomiędzy maksymalną wartością ugięcia w połowie długości szczeliny, a maksymalną siłą rozciągającą płytę.

Jako podstawę rozwiązania przyjęto przyrostową metodę Newtona-Raphsona oraz strategię korekcyjną opartą na koncepcji kontroli długości łuku w sformułowaniu Riksa-Wempnera (Ramm, 1982). Próby zastosowania wyłącz-

nie metody Newtona-Raphsona, prowadziły do zbyt dużej rozbieżności wyników obliczeń numerycznych i eksperymentu. Wiarygodność wyników oceniano na podstawie porównywania zarówno kształtu ścieżek równowagi, jak i zgodności geometrii deformacji. Obydwa elementy stanowiły podstawę wielokrotnego korygowania modelu numerycznego (Kopecki i Dębski, 2007).

Płytę modelowano stosując czterowęzłowy, cienkościenny element powłokowy (curved quadrilateral thin-shell element). Jest to element izoparametryczny o dwóch krzywiznach, opisany bikubicznymi funkcjami interpolacyjnymi, bazujący na teorii powłok Koitera – Sandersa (MSC, 2006). W każdym węźle element posiada 12 następujących stopni swobody:

$$u, \frac{\partial u}{\partial \theta^1}, \frac{\partial u}{\partial \theta^2}, v, \frac{\partial v}{\partial \theta^1}, \frac{\partial v}{\partial \theta^2}, w, \frac{\partial w}{\partial \theta^1}, \frac{\partial w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^1 \partial \theta^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^1 \partial \theta^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^1 \partial \theta^2}$$

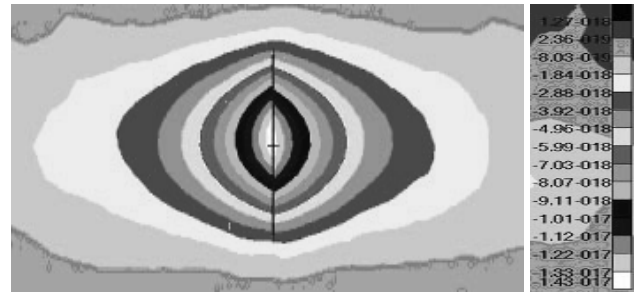
gdzie  $(\theta^1, \theta^2)$  są współrzędnymi Gaussa związanymi z powierzchnią środkową powłoki,  $u, v, w$  są składowymi przemieszczenia definiowanymi w globalnym, kartezjańskim układzie współrzędnych  $x, y, z$ . Zastosowany element jest zalecany w zagadnieniach nieliniowej analizy ustrojów cienkościennych.

### 3.1. Płyta bez imperfekcji

Rzeczywiste układy mechaniczne charakteryzują się występowaniem mniejszych lub większych niedokładności wykonawczych. Cecha ta odnosi się zarówno do geometrii rozważanych obiektów, lokalnych wad materiałowych, jak i sposobu ich wstępnego obciążenia. Niedokładności te określane są mianem imperfekcji. Rozważmy szczegółowo znaczenie rodzaju i wartości imperfekcji na przykładzie rozważanej płyty.

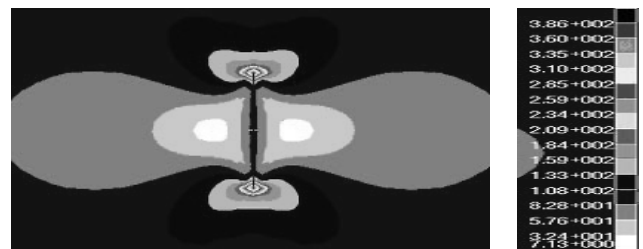
Płyta zawierająca w swoim obszarze szczelinę nie posiadająca imperfekcji geometrycznej lub materiałowej poddana numerycznej analizie nieliniowej w założeniu nie powinna wykazywać deformacji w kierunku normalnym do płaszczyzny płyty. Jednakże złożoność procedur numerycznych, a także uwarunkowania natury hardwareowej mogą prowadzić do wyników sugerujących poprawność błędnego rozwiązania.

W celu ilościowego zilustrowania zagadnienia rozbieżności wyników w stosunku do oczekiwanych, dokonano analizy numerycznej przyjmując jako podstawę, geometrię płyty wg rys.2 ze szczeliną o długości  $L=30\text{mm}$ . Przyjęto idealnie sprężysto-plastyczną charakterystykę fizyczną materiału (rys.3):  $Re=50\text{MPa}$ ,  $E=3000\text{MPa}$ ,  $\nu=0.36$  oraz obciążenie w formie sił rozciągających, przykładanych za pośrednictwem sztywnych uchwytów do krótszych krawędzi płyty. Wzdłuż brzegów dłuższych blokowano stopień swobody odpowiadający przemieszczeniu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny płyty. Ponadto, ograniczono przemieszczenia wzdłuż kierunku obciążania w dwóch węzłach, położonych na dłuższych krawędziach, na osi poprzecznej symetrii płyty. Analizę nieliniową przeprowadzono stosując oprogramowanie MSC-Marc-7 oraz pre- i postprocesor MSC-Patran. W wyniku, w strefie sąsiadującej ze szczeliną otrzymano symetryczną postać deformacji poprzecznej przedstawioną w formie warstwic na rys. 9.



Rys. 9. Warstwiec stałych wartości ugięć [cm] w strefie szczeliny płyty bez imperfekcji Model oparty na regularnej siatce (12 700 elementów).

Mimo geometrycznego podobieństwa rozkładu warstwic przedstawiających jednakowe wartości ugięć, pod względem ilościowym wyniki nie odwzorowują zidentyfikowanego w eksperymencie stanu deformacji. Zwraca uwagę pomijalnie mała, maksymalna wartość bezwzględna ugięcia wynosząca  $1.43 \cdot 10^{-17}\text{cm}$ . Podobne wyniki otrzymano niezależnie od przyjmowanych parametrów sterujących przebiegiem analizy, stosowanej metody przyrostowej oraz strategii korekcyjnej. Na rys. 10 przedstawiono rozkład naprężeń zredukowanych wg hipotezy H-M-H.



Rys. 10. Płyta bez imperfekcji. Warstwiec obrazujące rozkład wyteżenia wg hipotezy H-M-H.  $\sigma_{\max}=386$  [daN/cm<sup>2</sup>]

Maksymalna wartość naprężenia zredukowanego wynosiła 38.6MPa co oznacza, że w warunkach obciążenia siłą rozciągającą  $P=1500\text{N}$  nie wystąpiła deformacja niesprężysta. Rezultat ten jest rozbieżny z wynikami badań eksperymentalnych, potwierdzających obecność deformacji trwałych po odciążeniu. Można zatem wnioskować, iż rozwiązywanie problemu płaskiej płyty bez imperfekcji osłabionej obecnością szczeliny jako zagadnienia geometrycznie nieliniowego prowadzi do błędnych wyników, zaniżających poziom wyteżenia.

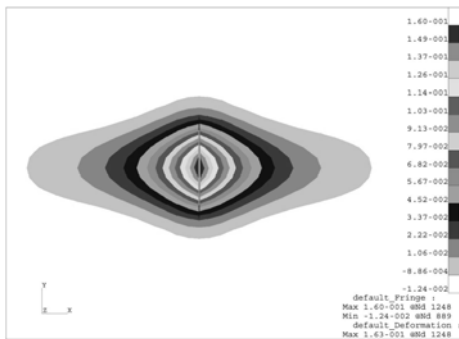
### 3.2. Płyta z zadaną imperfekcją geometryczną

W świetle przedstawionych wyników, w kolejnym rozważaniu uwzględniono imperfekcję geometryczną płyty. Polegała ona na umiejscowieniu centralnie usytuowanego punktu A (rys.2) poza płaszczyzną płyty, w kierunku normalnym. W celu określenia rzędu wielkości wprowadzonego defektu w stanie neutralnym, przeprowadzono szereg wstępnych analiz, w których zakładano szereg zróżnicowanych jego wartości. Ostatecznie analizę numeryczną prowadzono przyjmując wartość wstępnego ugięcia punktu A

równą 1mm. Rozważano szereg wariantów siatki. Jako podstawową przyjęto siatkę nieregularną, zagęszczoną w obszarze sąsiadującym ze szczeliną. Brano również pod uwagę wariant siatki regularnej. W obu przypadkach liczba elementów nie przekraczała 13000. Obecność szczeliny modelowano wprowadzając podwójne węzły o identycznych współrzędnych, przyporządkowane symetrycznie dwóm sąsiadującym obszarom po obu stronach krawędzi szczeliny. Stosowano identyczny schemat mocowania i obciążania modelu jak w przypadku płyty bez imperfekcji.

Obliczenia przeprowadzono posługując się programem MSC-Marc-7, zapewniającym możliwość dokonywania wyboru parametrów analizy nieliniowej, alternatywnego wyboru metody przyrostowej oraz strategii korekcyjnej.

W rezultacie uzyskano rozwiązanie, w którym rozkład ugięć w sąsiedztwie szczeliny (rys.11) okazał się zgodny w swym charakterze z otrzymanym na drodze eksperymentalnej (rys. 7a).

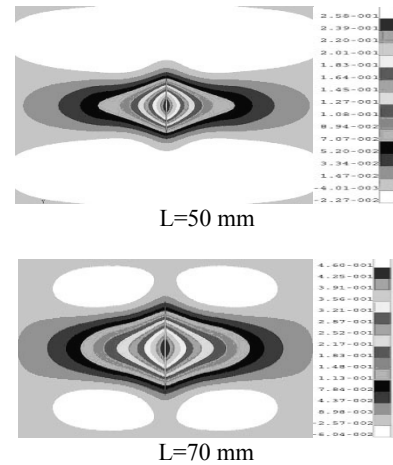


**Rys. 11.** Warstwice ugięć płyty w sąsiedztwie szczeliny o długości L=30mm. Model oparty na regularnej siatce z geometryczną imperfekcją [cm].

W przypadku zastosowania siatki nieregularnej, przy zachowaniu identycznych procedur numerycznych oraz identycznego zbioru parametrów sterujących, uzyskiwano podobny rezultat.

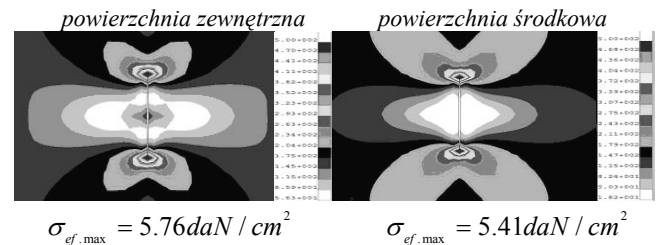
Ograniczając się do oceny porównawczej przedstawionych wyników obliczeń z wynikami eksperymentu (rys.7a) można stwierdzić, iż otrzymany rezultat wykazuje zadowalającą zgodność co do rozkładu ugięć. Porównania ilościowe wskazują jednakże na rozbieżność wyników obliczeń w stosunku do eksperymentu. Liczbowym wyrazem owej rozbieżności są maksymalne wartości obliczonych ugięć, wynoszące poniżej 80% wartości rzeczywistej. Obliczenia wykonane dla płyty ze szczeliną o długości 50 mm wykazały nieznacznie lepszą zgodność maksymalnego ugięcia z eksperymentem, przekraczającą nieco wartość 80%. Zasadniczą zmianę otrzymano dla szczeliny o długości 70mm. Tutaj zgodność sięgała 95%.

Na rys. 12 przedstawiono w formie warstwicy rozkładu ugięć płyty dla przypadków, w których szczelina osiągała kolejno długości: 50 i 70mm. W obu przypadkach przyjmowano identyczną imperfekcję geometryczną, wyrażającą się usytuowaniem punktu A (rys. 2) poza płaszczyzną płyty w odległości 1mm.

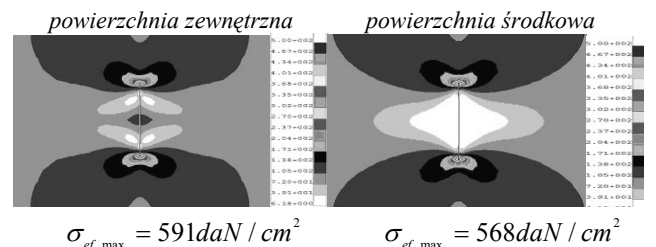


**Rys. 12.** Warstwice ugięć w sąsiedztwie szczeliny w modelach o nieregularnej siatce

Na rysunkach:13,14,15 przedstawiono rozkłady wyężenia wg hipotezy H-M-H odpowiadające obliczonym deformacjom. Z porównania wyników można wnioskować, że różnice w maksymalnych wartościach naprężeń zredukowanych w strefie frontu szczeliny, w obu powierzchniach: środkowej i zewnętrznej, uwzględniającej giętny i błonowy stan naprężenia osiągają wyższe wartości w przypadku szczeliny o długości mniejszej. W miarę przyrostu długości szczeliny, strefa uplastycznienia staje się praktycznie jednorodna wzdłuż grubości płyty. W najbardziej zaawansowanej fazie deformacji zmalały również gradienty ugięć, co wskazuje na to, iż w miarę wzrostu długości szczeliny dominującym staje się stan błonowy.

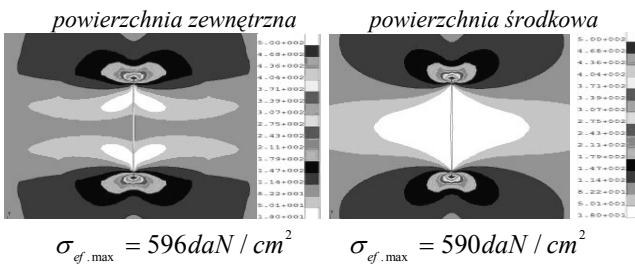


**Rys. 13.** Rozkład wyężenia wg hipotezy H-M-H. L=30mm model płyty o nieregularnej siatce z geometryczną imperfekcją



**Rys. 14.** Rozkład wyężenia wg hipotezy H-M-H, L=50mm Model płyty o nieregularnej siatce z geometryczną imperfekcją





Rys. 15. Rozkład wyteżenia wg hipotezy H-M-H, L=70mm  
Model płyty o nieregularnej siatce z geometryczną imperfekcją

Dokonane badania i analizy pozwalają stwierdzić, iż określanie pola naprężeń w płaskiej konstrukcji z osłabieniem na podstawie nieliniowej analizy numerycznej uwarunkowane jest wprowadzaniem takiej imperfekcji, która zapewni odwzorowanie geometrii obiektu w stanie pokrytycznym, pozostającej w możliwie najlepszej zgodności z wynikami eksperymentu.

### 3.3. Imperfekcja zadana obciążeniem normalnym do płaszczyzny płyty

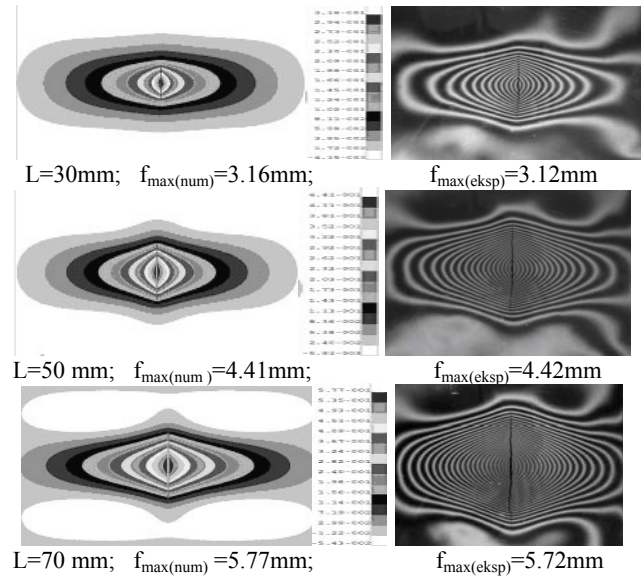
Jako alternatywną w stosunku do imperfekcji geometrycznej, rozważono koncepcję polegającą na wprowadzaniu dla idealnie płaskiej konstrukcji niewielkiego poprzecznego zaburzenia, nie pomijalnego w nieliniowej, statycznej analizie numerycznej. Najprostszy sposób realizacji tego rodzaju defektu polegał przykładaniu do płyty normalnej siły skupionej, zlokalizowanej w punkcie centralnym A, w połowie długości szczeliny. Jak wykazały wstępne analizy, sposób taki prowadził do znacznej rozbieżności wyników obliczeń w stosunku do wyników badań eksperymentalnych. Skuteczne natomiast okazało się zastosowanie ciągłego obciążenia poprzecznego o stałej intensywności wzdłuż obu krawędzi szczeliny, o wartości kilka rzędów mniejszej w stosunku do siły obciążającej płytę.

Sposób ten zastosowano w nieliniowych analizach identycznych modeli jakie rozpatrywano stosując imperfekcję geometryczną. Wartości obciążenia dobierano tak, by osiągalną była możliwie najlepsza zgodność pola ugięć płyty uzyskiwana w wyniku analizy numerycznej i eksperymentu. Jako kryterium zgodności przyjmowano maksymalne wartości ugięć oraz podobieństwo warstwicy, obrazujących stałe wartości poziomów ugięć. Najlepszą zbieżność wyników otrzymywano stosując metodę przyrostową siecznych, połączoną ze strategią korekcyjną kontroli długości łuku Riksa-Ramma lub kontroli hipersferycznej Crisfielda.

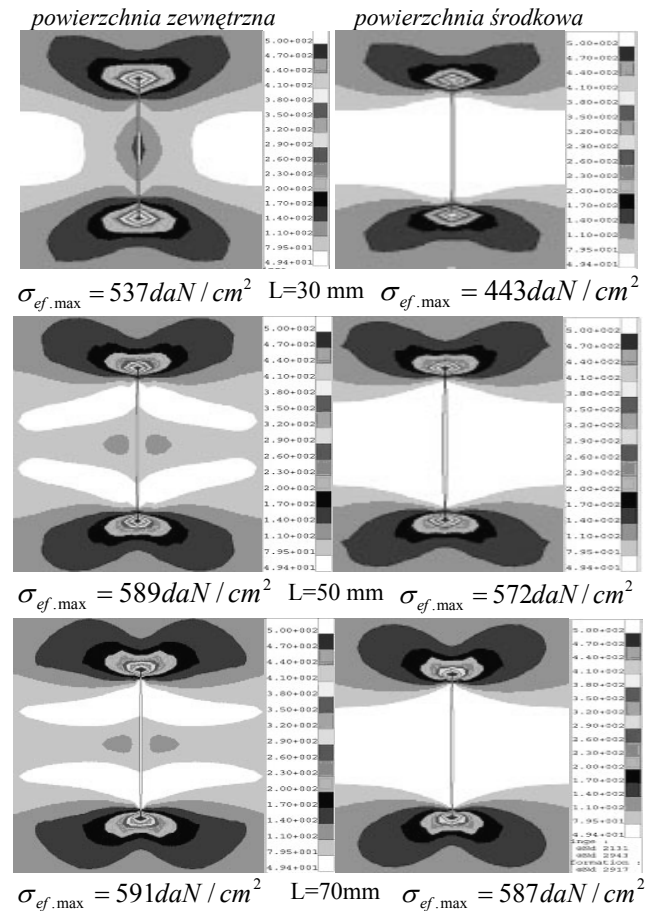
Rys. 16 przedstawia rozkłady ugięć w stanie zakrytycznym w badanej płycie dla trzech wartości długości szczeliny: 30mm, 50mm, 70mm, przy identycznym obciążeniu siłą rozciągającą o wartości 1500N. Zwraca uwagę niemal idealna zgodność maksymalnych wartości ugięć otrzymanych w wyniku analizy numerycznej –  $f_{\max(\text{num})}$  oraz badań eksperymentalnych –  $f_{\max(\text{eksp})}$ .

Przedstawione na rysunku 16 wyniki dowodzą istnienia zadowalającego podobieństwa rozkładu warstwicy obrazujących stałe wartości ugięcia otrzymanych w wyni-

ku obliczeń numerycznych oraz badań eksperymentalnych. Stwarzają one podstawę wnioskowania, iż zgodnie z zasadą jednoznaczności rozwiązań, odpowiadające rozważanym stanom deformacji pola naprężeń określone na podstawie analizy numerycznej pozostają w zgodności ze stanem zachodzącym w konstrukcji rzeczywistej.



Rys. 16. Porównanie rozkładu ugięć w stanie zakrytycznym  
Modele z ciągłym obciążeniem normalnym.

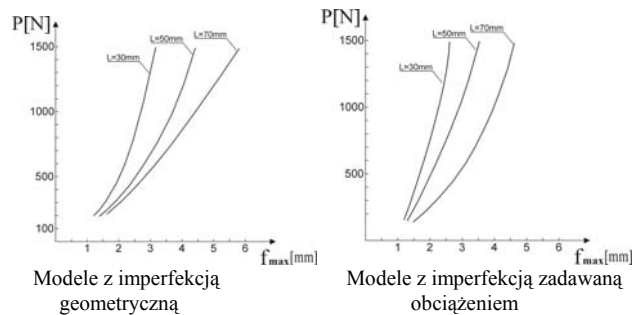


Rys. 17. Rozkład wyteżenia wg hipotezy H-M-H w strefie frontu szczeliny. Modele z ciągłym obciążeniem normalnym w stanie neutralnym.

Rys. 17 prezentuje rozkłady wyężenia wg hipotezy H-M-H w powierzchni środkowej oraz warstwie zewnętrznej, odpowiadające deformacjom przedstawionym na rys. 16. Rozkłady wyężenia wykazują, iż w miarę wzrostu długości szczeliny zanikają różnice w rozkładzie naprężeń w płaszczyznach: środkowej i zewnętrznych.

Wobec dominacji stanu błonowego w warunkach zaawansowanych deformacji, obserwowane efekty optyczne można interpretować jako „czyste” izochromy, nie zakłócone stanem giętnym.

Na rys. 18 przedstawiono reprezentatywne ścieżki równowagi dla modeli numerycznych z imperfekcjami geometrycznymi oraz modeli z imperfekcją zadaną wstępnym obciążeniem normalnym. Prezentują one zależności pomiędzy maksymalną wartością ugięcia (w połowie długości szczeliny), a wypadkową siłą rozciągającą płytę. Przedstawione ścieżki równowagi dla obydwu form zadawanej imperfekcji wykazujące podobieństwo co do charakteru zjawiska, są zróżnicowane jeśli chodzi o stronę ilościową. Wyniki oparte na koncepcji zakładania imperfekcji geometrycznej prowadzą do zawyżonej sztywności płyty.



Rys. 18. Ścieżki równowagi obrazujące zależność obciążenia w funkcji maksymalnego ugięcia

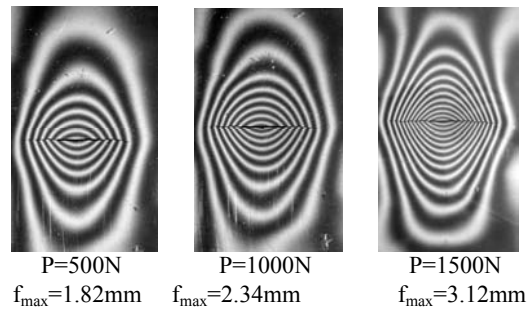
#### 4. PODSUMOWANIE

Przeprowadzone nieliniowe analizy numeryczne oraz badania doświadczalne nasuwają szereg konkluzji, które wydają się interesujące z poznawczego punktu widzenia.

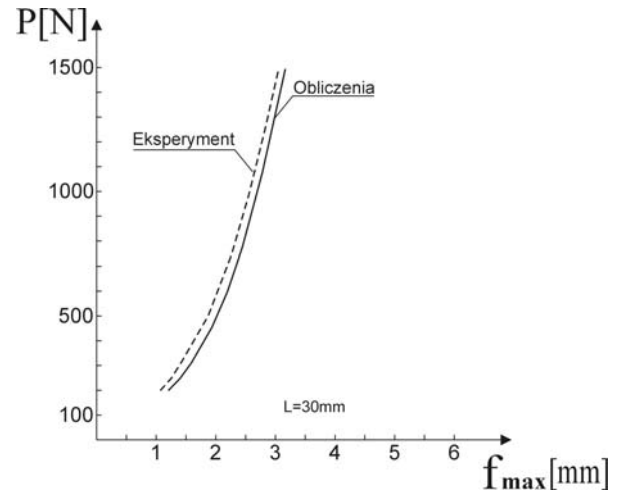
Jak wykazały badania doświadczalne, przechodzenie rozważanej konstrukcji w stan deformacji zakrytycznej następuje w sposób łagodny, wręcz trudny do zidentyfikowania obciążenia krytycznego, mimo stosowania metody pomiaru ugięć o dostatecznie dużej czułości w stosunku do rozważanego zadania.

Wyniki obliczeń oparte na koncepcji zakładania imperfekcji geometrycznej prowadzą do zawyżonej sztywności konstrukcji czego wyrazem jest nie zachowanie zgodności z eksperymentem w zadowalającym stopniu.

Istotnym elementem jest zgodność z eksperymentem ścieżki równowagi otrzymanej w wyniku obliczeń numerycznych przedstawionej na rysunku 20. Ścieżkę doświadczalną sporządzono na podstawie warstw ugięć zarejestrowanych w trakcie badań szczeliny o długości 30mm, przy trzech poziomach obciążenia: 500N, 1000N, 1500N. (Rys. 19).



Rys. 19. Warstwice poziomów ugięć dla stałej długości szczeliny  $L=30\text{mm}$



Rys. 20. Ścieżki równowagi dla szczeliny o długości  $L=30\text{mm}$

Przeprowadzona analiza pozwala wnioskować, iż zdecydowanie lepsze wyniki numerycznego odwzorowania efektu marszczenia płyt ze szczeliną, zapewniające zgodność z rzeczywistą deformacją konstrukcji jest wprowadzanie w strefie osłabienia zaburzenia w formie normalnego do płyty obciążenia ciągłego. Sposób ten wymaga jednakże doboru wartości obciążenia, co wiąże się z celowością, niekiedy koniecznością przeprowadzenia badań doświadczalnych obejmujących wyizolowany podzespół rozległego ustroju nośnego.

Do przeprowadzania adekwatnego eksperymentu wysoce przydatnymi okazały się badania modelowe, stwarzające ponadto podstawę oceny zarówno opracowanego modelu numerycznego, jak i przyjmowanej procedury rozwiązywania zagadnienia nieliniowego.

Transpozycja wyników obliczeń na obiekty rzeczywiste, wykonane z innych materiałów, których charakterystykę fizyczną można przybliżyć modelem ciała idealnie sprężysto-plastycznego sprowadza się do zmiany stałych materiałowych wprowadzanych do programu obliczeń, bądź też wydaje się możliwa na podstawie podobieństwa modelowego.



## LITERATURA:

1. **Aben H.** (1979), *Integrated photoelasticity*, McGraw-Hill Book Co., London.
2. **Brighenti R.** (2005), Buckling of cracked thin-plates under tension and compression, *Thin-Walled Structures*, 43, 209-224.
3. **Brighenti R.** (2005), Numerical buckling analysis of compressed or tensioned cracked thin plater, *Enging. Struct.*, 27, 265-276.
4. **Crisfield M.A.** (1997), *Non-linear finite element analysis of solid and structures*, J.Wiley & Sons, New York.
5. **Dyshel M.S.** (2002), Stability and fracture of plates with a central and an edge crack under tension, *Int. Appl. Mech.*, 38, 472-476.
6. **Felippa C.A.** (1976), *Procedures for computer analysis of large nonlinear structural system in large engineering systems* ed. by A. Wexler, Pergamon Press, London.
7. **Felippa C.A., Crivelli L.A., Haugen B.** (1994), A survey of the core-congruential formulation for nonlinear finite element, *Arch. of Comput. Meth. in Enging. I.*
8. **Kopeccki T. Dębski H.** (2007), Buckling and post-buckling study of open section cylindrical shells subjected to constrained torsion, *Arch. of Mech. Enging.*, Vol. LIV, 4.
9. **Kopeccki T. Zacharzewski J.** (2006), Fatigue life and stress state analysis of cracked thin-walled plate under cycles axial tension, *Maintenance and Reliability*, 3 (31), 19-26, Warsaw.
10. **Laermann K. H.** (1982) The principle of integrated photoelasticity applied to experimental analysis of plates with nonlinear deformations, Proc. 7<sup>th</sup> Intern. Conf. on Experim. Stress Analysis, Haifa.
11. **Markström K., Storäkers B.** (1980), Buckling of cracked members under tension, *Int. J. Solid & Struct.*, 16; 217-229.
12. **Patorski K., Kujawińska M.** (1993), *Handbook of the moiré fringe technique*, Elsevier, Amsterdam-London-New York-Tokyo.
13. **Rakowski G., Kacprzyk Z.** (1993), *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.
14. **Ramm E.** (1982), *The Riks/Wempner approach – An extension of the displacement control method in nonlinear analysis*, Pineridge Press, Swensea.
15. **Riks E., Rankin C.C., Brogan F.A.** (1992), The buckling behavior of a central crack in a plate under tension, *Enging. Fract. Mech.*, 43, 529-547.
16. **Shaw D., Huang Y.H.** (1990), Buckling behavior of a central cracked thin plate under tension, *Engng. Fract. Mech.* 35, 1019-1027.
17. **Sih G.C., Lee Y.D.** (1986), Tensile and compressive buckling of plates weakened by cracks, *Teor. Appl. Fract. Mech.* 6, 129-138.
18. Theory and user information. MSC Marc 2006.

**NUMERICAL-EXPERIMENTAL ANALYSIS OF POST-CRITICAL DEFORMATION STATES OF TENSIONED PLATE WEAKENED BY THE CRACK**

Paper presents the methodology of determining of the stress distribution in post-critical state of deformation of the rectangular plate weakened with the crack subjected to tension. The problem was formulated as physically and geometrically non-linear. Using finite elements method the numerical analyses were performed. While solving the nonlinear issue, the progressive change of geometry of the structure in the successive incremental steps were compared with results of an experimental studies, performed simultaneously. In order to reproduce the crack coming into existence in the real conditions, the tested plate was subjected to pulsating tension loading, increasing the length of the crack. During application of the static load, after exceeding the critical force value, in the weakened zone appeared the displacement in the normal direction to the surface of the plate, determined as the wrinkling. This kind of deformation is a cause of both membrane and bending stress state in the structure. In order to determine the influence of the extent of weakness to the stress magnitude and its distribution in the plate, the numerical analyses were performed for three selected cases of the weakness state, presented by three different lengths of the crack. Applying shadow moiré method for these cases, applying the same value of the load:  $P=1500\text{ N}$ , the deflection distributions were registered. Obtained results made the base of the assessment of the reliability of the effects of nonlinear numerical analysis, conditioned by the presence of imperfections of the plate in the neutral state. Two kinds of the imperfection were considered: geometric - based on the assumption of the preliminary deflection of the plate in the zone of weakness and second one, in the form of load perturbation, normal to the middle surface of the plate.

In the conclusion, one focused a special attention to the legitimacy of the concept of the problem formulating and to the choice of the solution strategy in the non-linear formulation, with the simultaneous experimental verification of the results.