

# ANALIZA PŁYT LAMINOWANYCH Z ZASTOSOWANIEM ZASTĘPCZYCH MODELI JEDNOWARSTWOWYCH

Agnieszka SABIK, Ireneusz KREJA\*

\* Katedra Mechaniki Budowli i Mostów, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, Politechnika Gdańska,  
ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk

[agsa@pg.gda.pl](mailto:agsa@pg.gda.pl), [ikreja@pg.gda.pl](mailto:ikreja@pg.gda.pl)

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono analizę porównawczą wybranych modeli obliczeniowych płyt warstwowych, zgodnych z koncepcją *zastępczego modelu jednowarstwowego* (*Equivalent Single Layer - ESL*). Rozważono trzy modele bazujące na teorii ścinania pierwszego rzędu: dwa modele autorskie oraz model paneli laminowanych dostępny w systemie *MSC/NASTRAN*. Zróżnicowanie modeli wynika z odmiennego podejścia do tzw. korekty ścinania. Przeprowadzono obliczenia dla szeregu przykładów testowych dostępnych w literaturze. Jeśli było to możliwe, dokonano porównań z innymi modelami typu ESL, zwłaszcza bazującymi na teorii ścinania wyższych rzędów. Analizę ograniczono do statyki liniowej.

## 1. WPROWADZENIE

Przedmiotem rozważań są modele obliczeniowe stosowane w liniowej analizie płyt laminowanych zbudowanych na drodze idealnego połączenia kilku lub kilkunastu warstw. Najpopularniejszymi odmianami płyt warstwowych są *plyty sandwichowe* oraz *kompozyty laminowane*. W skali makroskopowej obydwie odmiany można potraktować jako płyty anizotropowe, przyjmując do ich analizy zastępcze modele jednowarstwowe (*ESL*), w których własności mechaniczne warstwy zastępczej są wypadkową parametrów poszczególnych warstw. Bardziej zaawansowanymi dwuwymiarowymi modelami obliczeniowymi są dyskretne modele wielowarstwowe (*Layer-Wise – LW*), w których bezpośrednio uwzględnia się warstwową strukturę laminatu, co powoduje niestety, że liczba niewiadomych zależy od liczby warstw. Najbardziej zaawansowane modele trójwymiarowe charakteryzują się jeszcze większą liczbą niewiadomych, dlatego ich zastosowanie jest praktycznie ograniczone do analizowania wyselekcjonowanych fragmentów konstrukcji, w których ze względu na istotne zaburzenia (np. połączenia z innymi obiektami) taka szczegółowa analiza jest niezbędna.

Liczne przykłady w literaturze wykazują, że mimo dość ostrych założeń upraszczających, modele *ESL* okazują się często bardzo efektywne w analizie płyt warstwowych w skali makro, tj. np. przy obliczaniu ugięć czy obciążeń krytycznych. Niewątpliwą zaletą modeli *ESL*, z punktu widzenia obliczeń numerycznych, jest niezależność od liczby warstw liczba stopni swobody.

W pracy przetestowano kilka wybranych zastępczych modeli jednowarstwowych, w tym także model dostępny w programie *MSC/Nastran*. Prezentowane wyniki są zestawione – tam gdzie to możliwe – z rezultatami bardziej zaawansowanych modeli, głównie wielowarstwowych bazujących na teoriach ścinania wyższych rzędów.

## 2. ZASTĘPCZE MODELE JEDNOWARSTWOWE

Płyty warstwowe znamionuje skokowa zmienność parametrów materiałowych w przekroju płyty, jak również znaczna odkształcalność poprzeczna materiałów warstw. Cechy te powodują, że pod wpływem obciążenia przekroje płyty przyjmują postać linii łamanej, co określa się często mianem efektu *zig-zag*. Istotnym problemem w modelowaniu płyt uwarstwionych jest spełnienie warunków ciągłości naprężeń poprzecznych na granicach warstw. Opisanie zachowania tak złożonych struktur przy pomocy zastępczego modelu jednowarstwowego związane jest zatem ze znacznym uproszczeniem, które może istotnie ograniczyć dokładność uzyskiwanych wyników.

Większość zastępczych modeli jednowarstwowych bazuje na teorii ścinania pierwszego rzędu (*First Order Shear Deformation – FOSD*), w której przyjmuje się liniową na wysokości deformację przekrojów poprzecznych. Zaletą takiego podejścia jest niewielka liczba łatwo interpretowalnych fizycznie stopni swobody. Poważną wadę stanowi natomiast stały na wysokości rozkład odkształceń postaciowych w warstwach, co utrudnia spełnienie warunków równowagi na ich granicach. W przypadku standardowych sformułowań przemieszczeniowych modele *FOSD* wymagają specjalnych procedur obliczania sztywności ścinania poprzecznego lub wprowadzenia współczynników korekty ścinania (Jemielita, 2002).

Istnieją też podejścia, w których podstawą jest teoria ścinania wyższego rzędu (*Higher Order Shear Deformation – HOSD*). Zakładana tu nieliniowa deformacja przekroju wydaje się bardziej odpowiednia dla ośrodka warstwowego niż liniowa w *FOSD*. Eliminuje ona potrzebę stosowania współczynników korekty ścinania. Warto jednak podkreślić, że modele bazujące na *HOSD* charakteryzuje większa niż podejścia wychodzące od *FOSD* liczba stopni swobody, często o nieokreślonej interpretacji fizycznej oraz, że w przypadku najchętniej stosowanych w analizie MES sformułowań przemieszczeniowych, warunki

równowagi na granicach warstw nadal pozostają niespełnione.

### 3. ANALIZOWANE MODELE

W pracy porównywane są podejścia wychodzące od *FOSD* jak i *HOSD*. W przypadku modeli *HOSD* ograniczono się jedynie do cytowania wyników z literatury, natomiast w celu porównania modeli *FOSD* prezentuje się również wyniki analizy własnej, w której zastosowano dwa modele autorskie oraz pakiet *MSC/Nastran*. Szczególnie interesujące wydaje się porównanie modeli *FOSD* z różnie przyjętym sposobem modyfikacji członu ścinania w macierzy sztywności.

#### 3.1. Modele wykorzystane w obliczeniach

W przyjętych modelach pomijamy efekt poprzecznego rozciągania oraz zakładamy, że materiał pojedynczej warstwy wykazuje własności ortotropowe w układzie osi materiałowych  $a$ ,  $b$  i  $c$ :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{aa} \\ \sigma_{bb} \\ \sigma_{ab} \\ \sigma_{bc} \\ \sigma_{ca} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_a}{s} & \frac{\nu_{ab}E_b}{s} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{ba}E_a}{s} & \frac{E_b}{s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa G_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa G_{ca} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{aa} \\ \varepsilon_{bb} \\ \gamma_{ab} \\ \gamma_{bc} \\ \gamma_{ca} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

gdzie:  $s=1-\nu_{ab}\nu_{ba}$ ;  $E_a$  oraz  $E_b$  reprezentują odpowiednie moduły Younga,  $\nu_{ab}$  i  $\nu_{ba}$  - współczynniki Poissona,  $G_{ab}$ ,  $G_{bc}$ ,  $G_{ca}$  - moduły ścinania. Współczynnik korekcyjny  $\kappa$  redukuje sztywność odkształcenia poprzecznego warstwy, podobnie jak w znanych modelach płyt jednorodnych Mindlina ( $\kappa = \pi^2/12$ ) czy Reissnera ( $\kappa = 5/6$ ).

Przyjmując pewien kąt obrotu osi materiałowych  $a$  i  $b$ , względem osi  $x_1$  i  $x_2$  jak na rys. 1, ogólny związek konstytutywny pomiędzy naprężeniami i odkształceniami wyrażonymi w układzie osi  $x_i$  zapisać można następująco:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Całkując po grubości płyty naprężenia poprzecznego ścinania otrzymamy odpowiednie składowe sił tnących

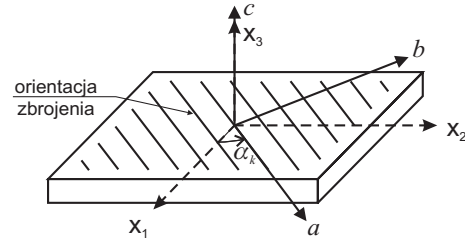
$$Q_{\alpha 3} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3, \quad \alpha = 1, 2 \quad (3)$$

oraz uogólniony związek konstytutywny

$$\begin{Bmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{45} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

gdzie współczynniki  $a_{ij}$  reprezentują globalną sztywność ścinania poprzecznego całego laminatu:

$$a_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{ij} dx_3, \quad i = 4, 5. \quad (5)$$



Rys. 1. Orientacja osi materiałowych

W modelach opartych na sformułowaniu *FOSD* sztywność (5) należy skorygować, np. przez wprowadzenie w związek (4) globalnych współczynników korekcyjnych (Whitney, 1973; Vlachoutsis, 1992)

$$\begin{Bmatrix} Q_{23} \\ Q_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_{23})^2 a_{44} & (k_{23}k_{13})a_{45} \\ (k_{23}k_{13})a_{45} & (k_{13})^2 a_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

lub ewentualnie przez zmodyfikowanie sposobu obliczania współczynników  $a_{ij}$  (Rolfes i Rohwer, 1997).

Punktem wyjścia do obliczenia skorygowanej sztywności ścinania poprzecznego jest najczęściej porównanie energii tego stanu, obliczanej raz jako scałkowana praca naprężeń stycznych na odkształceniach postaciowych, a następnie jako praca siły tnącej na uśrednionym w przekroju kącie odkształcenia postaciowego. Niewiadome naprężenia stycznycze uzależnia się tu na ogół od naprężeń normalnych wykorzystując lokalne równania równowagi. Zróżnicowanie podejść uwarunkowane jest dalszymi założeniami i uproszczeniami. W zastosowanym w obliczeniach programie *MSC/Nastran* wyznaczone są poszczególne składniki macierzy globalnych modułów ścinania (2x2) przy założeniu zginania cylindrycznego płyty (*MSC/Nastran Encyclopedia*, 1996). Przyjmuje się przy tym szereg dodatkowych uproszczeń, które odpowiadają rozprężeniu dwukierunkowej pracy płyty na dwa niezależne modele typu „belkowego”. Schemat takiego postępowania został nakreślony w 1973 roku przez Whitney’a (1973), a następnie rozwinięty przez Vlachoutsis’a (1992), który podał zamknięte formuły na globalne współczynniki korekcyjne oddzielnie dla każdej z dwóch płaszczyzn poprzecznego ścinania, obliczane przy założeniu zginania walcowego, jednak z uwzględnieniem wpływu współczynnika Poissona. Podobną taktykę zastosowali Rolfes i Rohwer (1997) wyznaczając macierze (2x2) zastępczych sztywności ścinania poprzecznego; warto podkreślić, że w równaniach równowagi uwzględnili oni naprężenia stycznycze w płaszczyźnie płyty ( $\sigma_{12}$ ), jednak zakładając rozprężenie momentów w dwóch kierunkach, także oni nie ujęli w pełni dwukierunkowej pracy płyty. Analogiczne podejście odnalazć można w pracy Jemielity (2002), który w swojej teorii płyt średniej grubości

wprowadził aż 9 korekcyjnych współczynników ścinania.

Należy zauważyć, że wykorzystanie innej postaci słabej problemu brzegowego niż najczęściej stosowana zasada przemieszczeń wirtualnych, np. naprężeniowego lub mieszanego sformułowania wariacyjnego, pozwala przyjąć niezależną od przemieszczeń interpolację naprężeń poprzecznych w przekroju. Umożliwia to założenie praktycznie dowolnych, w tym zrównoważonych na granicach warstw, profili naprężeń poprzecznych. Warto dodać, że zupełnie wystarczające są sformułowania mieszane, w których niezależnie od przemieszczeń interpolowane są jedynie składowe naprężeniowe związane z poprzecznym ścinaniem i ewentualnie rozciąganiem. Popularna jest tu zmodyfikowana zasada wariacyjna Reissner'a, tzw. *Reissner's Mixed Variational Theorem (RMVT)* (Carrera, 2001), zgodnie z którą energia odkształconej płyty dana jest następująco:

$$W_{in} = \int_A \left( \sum_{k=1}^{N_L} \int_{h_k} \delta \epsilon_b^T \sigma_{b,H,k} + \delta \epsilon_s^T \sigma_{s,k} + \delta \sigma_{s,k}^T \cdot (\epsilon_s - \epsilon_{s,H}) \right) dz dA, \quad (7)$$

gdzie  $\epsilon$ -odkształcenia,  $\sigma$ -naprężenia,  $k$ -numer warstwy,  $N_L$ - liczba warstw,  $A$ -pole powierzchni środkowej, indeksy  $b, s$  oznaczają odpowiednio zginanie i ścinanie, a indeks  $H$  wyróżnia wielkości obliczane zgodnie z prawem Hooke'a. Podkreślimy, że naprężenia poprzecznego ścinania w (7) dane są dowolnym rozkładem w kierunku grubości warstwy. Pierwszy składnik sumy w wyrażeniu podcałkowym stanowi energię związaną ze zginaniem płyty, drugi jest energią ścinania poprzecznego. Trzeci człon natomiast jest dodatkowym warunkiem minimalizacji funkcjonału

i wyraża zgodność naprężeń poprzecznych na granicach warstw. Pozwala on wyeliminować niewiadome naprężeniowe poprzez uzależnienie ich od przemieszczeń. Finalny model posiada jedynie kinematyczne stopnie swobody. Wprowadzony w (7) warunek zgodności naprężeń pełni więc podobną funkcję do opisanych wcześniej współczynników korekcyjnych (Carrera, 2001).

### 3.2. Modele zastosowane w analizie własnej

Zastosowane w obliczeniach modele autorskie płyt laminowanych oraz model dostępny w programie *MSC/Nastran* bazują na teorii ścinania pierwszego rzędu (*FOSD*). Modele autorskie rozróżnia przede wszystkim postać sformułowania słabego problemu brzegowego.

Pierwsze podejście (Fc) jest standardowym sformułowaniem przemieszczeniowym o 5 stopniach swobody; bazuje na zasadzie przemieszczeń wirtualnych i jako takie wymaga procedur korygujących człon macierzy sztywności związane ze ścinaniem. Dokonując korekty na kilka sposobów uzyskano następujące warianty modelu FSD:

- Fc0 – przyjęto lokalny współczynnik korekcyjny ścinania  $\kappa = 5/6$  dla każdej z warstw (Kreja i inni, 1997);
- Fc1 – zastosowano globalne współczynniki korekcyjne ścinania dla całego przekroju, ich wartości obliczono zgodnie z propozycją Vlachoutsis'a (1992);

- Fc2 – zastosowano globalne współczynniki korekcyjne ścinania dla całego przekroju, ich wartości liczbowe przyjęto ze wskazanych źródeł literatury;
- Fc3 – zastosowano globalne współczynniki korekcyjne ścinania dla całego przekroju; wartości współczynników obliczono zgodnie z podejściem opisanym przez Rolfes'a i innych (1997);
- Fc4 – zastosowano lokalny współczynnik korekcyjny ścinania  $\kappa = 1$  dla całego przekroju ('czysta' teoria FOSD bez korekty sztywności ścinania poprzecznego).

W drugim modelu autorskim (ZZ-IC) (Sabik i Kreja, 2006) pięcioparametrowe pole przemieszczeń *FOSD* wzbogacono dwoma stopniami swobody  $D_1$  i  $D_2$  (Sabik i Kreja, 2006; Carrera, 1998):

$$U_i(x_1, x_2, x_3) = u_i(x_1, x_2) + \varphi_i(x_1, x_2) + (-1)^k \cdot \xi_k \cdot D_i(x_1, x_2), \quad (8)$$

$$i = 1, 2$$

$$W(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2)$$

Rozkład dodatkowych stopni w kierunku grubości płyty dany jest funkcją typu zig-zag Murakami'ego (Carrera, 1998). Postać słabą w modelu stanowi zasada wariacyjna (7). Ponieważ we wszystkich podejściach efekt poprzecznego rozciągania jest pomijany, narzucany rozkład naprężeń w ZZ-IC dotyczy jedynie składowych związanych z poprzecznym ścinaniem. Przyjęto paraboliczny na wysokości warstwy rozkład składowych  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  (Sabik i Kreja, 2006; Carrera, 1998). Po eliminacji niewiadomych naprężeniowych elementy skończone posiadają 7 kinematycznych stopni swobody w węźle.

## 4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

W obliczeniach z wykorzystaniem programów autorskich stosowano 9-węzłowy element izoparametryczny z interpolacją Lagrange'a. Ze względu na efekt blokady (*shear locking*) na etapie obliczeń macierzy sztywności niezbędna była technika całkowania selektywnie zredukowanego. W programie *MSC/Nastran* dyskretyzację przeprowadzono przy pomocy elementów 4-węzłowych QUAD4. Zakres analizy ograniczony jest do statyki liniowej.

### 4.1. Swobodnie podparta płyta cross-ply (0/90/0)

Przykład zaczerpnięto z pracy Reddy'ego (1984). Analizowane jest maksymalne ugięcie kwadratowej, swobodnie podpartej trójwarstwowej płyty cross-ply (0/90/0) pod obciążeniem równomiernym  $q$  dla różnych proporcji  $a/h$ , gdzie  $a$  - długość boku płyty,  $h$  - całkowita grubość płyty. Wszystkie warstwy mają jednakową grubość. Przyjęto parametry materiałowe:  $E_1/E_2 = 25$ ,  $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$ ,  $G_{23}/E_2 = 0.2$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ . W pracy zastosowano następującą normalizację wyników:

$$w^* = w \cdot \left( m \cdot E_2 h^3 / q a^4 \right), \quad (9)$$

gdzie  $m$  przyjmuje różne wartości w zależności od zadania; w tym przykładzie  $m=10$ . Przykład ten jest klasycznym benchmarkiem analizowanym m.in. w pracach (Carrera i Ciuffreda, 2005; Carrera i Demasi, 2002; Kong i Cheung,

1995; Sheikha i Chakrabartib, 2003). W poniższych tabelach przedstawiono wyniki analizy własnej (tab. 1), oraz rozwiązania dostępne w literaturze (tab. 2). Warto dodać, że nie wszystkie cytowane wyniki uzyskano metodą elementów skończonych, toteż informację o siatce elementów dla tych rezultatów pomija się.

W tab. 2 użyto następujących oznaczeń: HOSD\_3 – model teorii ścinania trzeciego rzędu, LM3 – dyskretny model warstwowy, w którym wykorzystano zasadę wariacyjną (7), a rozkład przemieszczeń i naprężeń poprzecznych w warstwie opisano wielomianem trzeciego stopnia oraz uwzględniono efekt poprzecznego rozciągania. W nawiasach okrągłych podano numer pozycji w spisie literatury, z której wyniki zostały zaczerpnięte.

**Tab. 1.** Znormalizowane ugięcie  $w^*$  swobodnie podpartej płyty cross-ply (0/90/0), analiza własna, ćwiartka płyty

$a/h$	Fc0 4x4	Fc1 4x4	Fc3 4x4	Fc4 4x4	ZZ-IC 4x4	Nastran 10x10
10	1.0220	1.1677	1.1676	0.9642	1.1545	1.1693
20	0.7577	0.7968	0.7968	0.7426	0.7948	0.7972
50	0.6818	0.6882	0.6882	0.6793	0.6871	0.6877
100	0.6697	0.6713	0.6713	0.6691	0.6713	0.6718

**Tab. 2.** Znormalizowane ugięcie  $w^*$  swobodnie podpartej płyty cross-ply (0/90/0), rozwiązania odniesienia

$a/h$	HOSD_3 (10)	FOSD (10)	LM3 (4)	LM3 (3)	HOSD_3 (13)	HOSD_3 (6)
10	1.0900	1.0219	1.1541	1.1593	1.0910	1.0898
20	0.7760	0.7573	-	-	0.7763	-
50	0.6838	0.6807	-	-	0.6841	-
100	0.6705	0.6697	0.6713	0.6743	0.6708	0.6699

Model LM3 ze względu na swe rozbudowanie może być traktowany jako podejście *quasi* 3D i stanowić rozwiązanie odniesienia w tym przykładzie, mimo, że rezultaty nim otrzymane znane są jedynie dla płyt o proporcjach  $a/h = 10$  i  $a/h = 100$ . Łatwo bowiem zauważyć w tab. 1 i tab. 2, że wraz ze wzrostem  $a/h$  różnice między wynikami z poszczególnych modeli maleją. Niezależnie od zastosowanego podejścia dla najcieńszej z badanych płyt otrzymano praktycznie identyczną wartość ugięcia. Bardziej zróżnicowane są wyniki dla płyt grubszych, w przypadku których efekt ścinania poprzecznego zaczyna odgrywać znaczącą rolę. Uzasadniona jest zatem ocena efektywności poszczególnych modeli jedynie na podstawie wyników dla płyty umiarkowanie grubej ( $a/h = 10$ ), dla której dysponujemy rozwiązaniem *quasi* 3D. Można zauważyć, że najmniej efektywny jest model ‘czystej’ teorii ścinania pierwszego rzędu (Fc4), nieco lepsze są modele, w których zastosowano lokalne współczynniki korekcyjne (Fc0 i FOSD (10)), następnie podejścia zgodne z teorią ścinania wyższego rzędu (HOSD\_3). Zdecydowanie najskuteczniejsze jednak okazują się modele bazujące na FOSD, w których ‘ulepszono’ człon macierzy sztywności związany ze ścinaniem. Największą zgodność z podejściem LM3 wykazuje model ZZ-IC. Modele Fc1, Fc3 oraz Nastran zawyżają nieco wartość ugięcia, co może wynikać

z rozprężenia w ich sformułowaniu dwukierunkowej pracy płyty.

## 4.2. Swobodnie podparta płyta sandwicz

Przykład zaczerpnięto z pracy (Carrera i Ciuffreda, 2005). Porównywane są wyniki maksymalnych ugięć kwadratowej płyty sandwiczowej zbudowanej z trzech warstw dla różnych proporcji  $a/h$ . Płyta jest swobodnie podparta i obciążona ciśnieniem równomiernym  $q$ . Dane okładek:  $h_o = 0.1h$ ,  $E_1/E_2 = 25$ ,  $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$ ,  $G_{23}/E_2 = 0.2$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ . Dane wypełnienia:  $h_w = 0.8h$ ,  $E_1/E_2 = 1$ ,  $G_{13}/E_2 = G_{23}/E_2 = 0.06$ ,  $G_{12}/E_2 = 0.016$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ . Przyjęto normalizację wyników wg wzoru (9) z mnożnikiem  $m=100$ . Tab. 3 ilustruje rezultaty obliczeń własnych oraz rozwiązanie odniesienia uzyskane przy zastosowaniu modelu LM4 (Carrera i Ciuffreda, 2005), gdzie LM4 jest podejściem podobnym do LM3 jak w 4.1, z tym, że w LM4 przyjęto wielomian czwartego stopnia do interpolacji przemieszczeń i naprężeń poprzecznych w warstwie. Wyniki z tego modelu przyjęto za rozwiązania odniesienia. Analiza wyników otrzymanych w tym przykładzie potwierdza wnioski z zadania poprzedniego. Tym razem jednak model Fc3 daje rozwiązanie bliższe ZZ-IC i LM4.

**Tab. 3.** Znormalizowane ugięcie  $w^*$  swobodnie podpartej płyty sandwicz, ćwiartka płyty

$a/h$	LM4 (4)	Fc0 4x4	Fc1 4x4	Fc3 4x4	Fc4 4x4	ZZ-IC 4x4	Nastran 10x10
4	10.682	6.5601	11.0060	10.6080	5.7287	10.698	11.0259
10	3.083	2.1823	3.0944	3.0023	2.0301	3.087	3.0994
100	1.262	1.2517	1.2621	1.2610	1.2501	1.262	1.2517

## 4.3. 3-warstwowa swobodnie podparta płyta sandwicz

Rozważane są dwa warianty trójwarstwowej swobodnie podpartej płyty sandwiczowej pod obciążeniem równomiernym  $q = 6.895$  kPa. Rozpiętość boku płyty wynosi  $a = 0.254$  m. W pierwszym wariantcie materiały warstw są izotropowe, natomiast w wariantcie drugim – ortotropowe. Grubość okładek wynosi  $h_o = 0.7112$  mm, a wypełnienia  $h_w = 19.05$  mm. Parametry materiałowe dla wariantu materiałów izotropowych: okładki (MATizo1) –  $E = 6.895 \cdot 10^7$  kPa,  $G = 2.652 \cdot 10^7$  kPa,  $\nu = 0.3$ ; wypełnienie (MATizo2) –  $E = 0.689$  kPa,  $G = 2.068 \cdot 10^5$  kPa,  $\nu = 0.3$ . W wariantcie materiałów ortotropowych: okładki (MATorto1) –  $E_1 = 6.895 \cdot 10^7$  kPa,  $E_2 = 2.758 \cdot 10^7$  kPa,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 1.293 \cdot 10^7$  kPa; wypełnienie (MATorto2) –  $E_1 = E_2 = 0.689$  kPa,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $G_{12} = 0.689$  kPa,  $G_{23} = 8.274 \cdot 10^4$  kPa,  $G_{13} = 2.068 \cdot 10^5$  kPa. Przykład zaczerpnięto z pracy (Mawenya i Davies, 1974), gdzie przedstawiono rozwiązania otrzymane dla dyskretnego sformułowania wielowarstwowego (*Layer-Wise Theory*) przy zastosowaniu metody elementów skończonych, a także szeregów Fouriera. Wyniki obliczeń maksymalnych ugięć dla obydwóch wariantów materiałowych zawiera tab. 4.

Analizowana w przykładzie płyta jest stosunkowo gruba ( $a/h = 12.4$ ). Przy tej grubości wpływ ścinania na ugięcie jest znaczny, co tłumaczy duże błędy wyników

otrzymanych modelami Fc4 oraz Fc0. Porównanie rezultatów uzyskanych tymi modelami wskazuje, że stosowanie lokalnych współczynników korekcyjnych dla poszczególnych warstw jest mało efektywne. Wyniki uzyskane przy zastosowaniu modeli o 'ulepszonym' opisie ścinania są znacznie lepsze i zbliżone do siebie. Tym razem model ZZ-IC i Fc1 dają identyczne rezultaty. Porównując do LWT (Mawenya i Davies, 1974) największą wartość ugięcia otrzymano programem MSC/Nastran. Podejście Fc3 nieco odbiega od pozostałych rozwiązań.

**Tab. 4.** Maksymalne ugięcie 3-warstwowych płyt sandwich [mm], ćwiartka płyty

Model	Wariant izotropowy	Wariant ortotropowy
LWT (8)	0.01880	0.03099
Fourier (8)	0.01880	0.03124
Nastran (10x10)	0.01885	0.03111
Fc0 4x4	0.01189	0.02179
Fc1 4x4	0.01867	0.03104
Fc3 4x4	0.01811	0.03020
Fc4 4x4	0.01173	0.02146
ZZ-IC 4x4	0.01867	0.03104

#### 4.4. 5-warstwowa swobodnie podparta płyta sandwich

Podobnie jak poprzedni przykład, zadanie to także zaczerpnięto z pracy (Mawenya i Davies, 1974). Tym razem analizowane jest ugięcie środka pięciowarstwowej płyty sandwichowej dla wariantów materiałów izo- i ortotropowych. Rozpiętość płyty, obciążenie oraz dane materiałowe są identyczne jak w zadaniu 4.3. Warstwy o numerach nieparzystych mają grubość  $h_n = 0.508$  mm i wykonane są materiałów odpowiednio MATizo1 i MATorto1 w zależności od wariantu zadania, natomiast wysokość warstw parzystych zbudowanych z MATizo2 i MATorto2 wynosi -  $h_n = 10.16$  mm. Wyniki analizy zawiera tab. 5. Wnioski z analizy tego przykładu są identyczne jak w zadaniu 4.4. Podsumowując zadanie 4.3 i 4.4 warto podkreślić, że rozkład efektywności modeli kształtuje się w obydwóch wariantach – izotropowym i ortotropowym - tak samo. Lokalna ortotropia i związany z nią sposób pracy warstw nie mają wpływu na skuteczność badanych podejść. Uzasadnia to stosowanie modeli ESL w analizie przemieszczeń kompozytów laminowanych.

**Tab. 5.** Maksymalne ugięcie 5-warstwowych płyt sandwich [mm], ćwiartka płyty

Model	Wariant izotropowy	Wariant ortotropowy
LWT (8)	0.02037	0.03404
Fourier (8)	0.02035	0.03378
Nastran 10x10	0.02042	0.03416
Fc0 4x4	0.01394	0.02565
Fc1 4x4	0.02014	0.03409
Fc3 4x4	0.01961	0.03335
Fc4 4x4	0.01379	0.02535
ZZ-IC 4x4	0.02014	0.03409

#### 4.5. 9-warstwowa symetrycznie uwarstwiona płyta cross-ply

W zadaniu analizowana jest symetrycznie uwarstwiona 9-warstwowa kwadratowa płyta cross-ply

(0/90/0/90/0/90/0/90/0) dla wariantu swobodnego podparcia i utwierdzenia. Płyta jest poddana działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego  $q$ . Przykład pochodzi z pracy (Zhang i Kim, 2004). Suma grubości warstw o orientacji włókien  $0^\circ$  jest identyczna z sumą grubości warstw o orientacji  $90^\circ$ . Warstwy o tej samej orientacji mają identyczne grubości. Dane materiałowe<sup>1</sup>:  $E_1 = 3 \cdot 10^7$ ,  $E_2 = 0.75 \cdot 10^6$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.45 \cdot 10^6$ ,  $G_{23} = 0.375 \cdot 10^6$ ,  $\nu_{12} = 0.3$ . Przeprowadzono analizę maksymalnego ugięcia dla różnych proporcji  $h/a$ . Wyniki znormalizowano wg wzoru (9) z mnożnikiem  $m=1000$ . Rezultaty własne zestawiono w tab. 6 i tab. 8. Rozwiązania dostępne w literaturze zawierają tab. 7 i tab. 9.

**Tab. 6.** Znormalizowane ugięcia w\* 9-warstwowej płyty cross-ply swobodnie podpartej, ćwiartka płyty, wyniki własne

$h/a$	Fc0 8x8	Fc1 8x8	Fc2 <sup>2</sup> 8x8	Fc3 8x8	Fc4 8x8	ZZ-IC 8x8	Nastran 10x10
0.1	6.1218	6.1595	5.8410	6.1588	5.8483	5.9138	6.1652
0.01	4.4883	4.4885	4.4854	4.4885	4.4855	4.4862	4.4908
0.001	4.4718	4.4718	4.4718	4.4718	4.4718	4.4718	4.4737
0.0001	4.4716	4.4716	4.4716	4.4716	4.4716	4.4716	4.4733

W zadaniu analizowane są płyty cienkie oraz umiarkowanie gruba ( $h/a = 0.1$ ). W tab. 6 i tab. 8 można zauważyć, że w zakresie analizy płyt cienkich w obliczeniach własnych otrzymano bardzo zbliżone wyniki, zwłaszcza dla  $h/a = 0.01$  i  $h/a = 0.001$ . Pewne odchylenia wykazują rezultaty z programu MSC/Nastran. Wyniki dla badanych płyt cytowane z literatury w tab. 7 i tab. 9 nieznacznie odbiegają od rozwiązań własnych. Różnice nie są jednak znaczne i wynikają zapewne z różnic sformułowań zastosowanych elementów skończonych.

**Tab. 7.** Znormalizowane ugięcia w\* 9-warstwowej płyty cross-ply swobodnie podpartej, rozwiązania z literatury

$h/a$	Rozwiązanie dokładne (17)	RDKQL-20 (17)	HLCTS <sup>1d</sup> (14)
0.1	5.8500	5.851	7.4053
0.01	4.4900	4.488	4.4897
0.001	4.4700	4.475	4.4602
0.0001	4.4700	4.475	-

**Tab. 8.** Znormalizowane ugięcia w\* 9-warstwowej płyty cross-ply utwierdzonej, ćwiartka płyty, wyniki własne

$h/a$	Fc0 8x8	Fc1 8x8	Fc2 <sup>2</sup> 8x8	Fc3 8x8	Fc4 8x8	ZZ-IC 8x8	Nastran 10x10
0.1	2.5892	2.6455	2.3233	2.6450	2.3191	2.3782	2.6535
0.01	0.9662	0.9664	0.9632	0.9664	0.9634	0.9641	0.9719
0.001	0.9494	0.9494	0.9494	0.9494	0.9494	0.9494	0.9544
0.0001	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492	0.9493	0.9540

**Tab. 9.** Znormalizowane ugięcia w\* 9-warstwowej płyty cross-ply utwierdzonej, rozwiązania z literatury

$h/a$	RDKQL-20 (17)	HLCTS <sup>1d</sup> (14)
0.1	2.351	3.8857
0.01	0.9832	0.9536
0.001	0.9695	0.9148
0.0001	0.9694	-

<sup>1</sup> W pracy (Zhang i Kim, 2004) podano dane bez jednostek.

<sup>2</sup> Wartość współczynników korekcji ścinania poprzecznego przyjęto za (Zhang i Kim, 2004).

Istotne rozbieżności wyników pojawiają się dla płyt umiarkowanie grubych. Największe ugięcia otrzymano modelami Fc1, Fc3, Nastran oraz, co jest warte podkreślenia, Fc0. Jak wynika z porównania modeli Fc0 i Fc4, w tym przykładzie zastosowanie lokalnych współczynników korekcyjnych wpływa dość znacznie na zmianę wyniku. Dla wariantu swobodnego podparcia badanej płyty dysponujemy rozwiązaniem dokładnym, cytowanym z pracy (Zhang i Kim, 2004). Niestety, w źródle nie podano informacji na temat jego pochodzenia. Zgodność tego rozwiązania dla przypadku płyty umiarkowanie grubej z wynikiem modelu Fc4 poddaje jego 'dokładność' w wątpliwość. Należy też zauważyć, że Zhang i Kim (2004) nie przedstawili sposobu wyznaczenia wartości globalnych współczynników korekcji ścinania, które przyjęto w modelu RDKQL-20 (i powtórzone później w Fc2). Warto zaznaczyć, że model ZZ-IC daje wyniki na poziomie pośrednim z wszystkich zastosowanych podejść.

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano kilka zastępczych modeli jednowarstwowych wykorzystywanych w analizie płyt laminowanych. Szczególną uwagę zwrócono na sposoby opisu ścinania w modelach bazujących na założeniach teorii ścinania pierwszego rzędu. Poddano dyskusji kilka możliwości tzw. korekty ścinania charakterystycznej dla tego typu modeli, począwszy od zastosowania lokalnych współczynników korekcyjnych poprzez różnie kalkulowane współczynniki globalne w modelach o sformułowaniu przemieszczeniowym, aż po przyjęcie odpowiedniego sformułowania słabego dopuszczającego niezależną od przemieszczeń interpolację naprężeń poprzecznych. W celu porównania skuteczności wymienionych metod korekcyjnych przeprowadzono analizę numeryczną kilku przykładów z zastosowaniem dwóch programów autorskich oraz pakietu komercyjnego MSC/Nastran. Analizę ograniczono do statyki liniowej. W obliczeniach stosowano 9-węzłowy izoparametryczny element Lagrange'a oraz 4-węzłowy element powłokowy QUAD4 dostępny w programie MSC/Nastran. Otrzymane wyniki porównano z rozwiązaniami dostępnymi w literaturze.

## LITERATURA

1. **Carrera E.** (1998), A refined multilayered finite-element model applied to linear and nonlinear analysis of sandwich plates, *Composites Science and Technology*, Vol. 58, 1553-1569.
2. **Carrera E.** (2001), Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells, *American Society of Mechanical Engineers, Applied Mechanics Reviews*, Vol. 54, 301-329.
3. **Carrera E., Demasi L.** (2002), Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 2: Numerical implementations, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 55, 253-291.

4. **Carrera E., Ciuffreda A.** (2005), A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems, *Composite Structures*, Vol. 69, 271-293.
5. **Jemielita, G.** (2002), Coefficients of shear correction in transversely nonhomogeneous moderately thick plates, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 40, 73-84.
6. **Kong J., Cheung Y.** (1995), A generalized spline finite strip for the analysis of plates, *Thin-Walled Structures*, Vol. 22, 181-202.
7. **Kreja I., Schmidt R., Reddy J.N.** (1997), Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 32, 1123-1142.
8. **Mawenya A. S., Davies J. D.** (1974), Finite element bending analysis of multilayer plates, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, 215-225.
9. **MSC/Nastran** Encyclopedia for Version 69 (1996), Mac Neal-Schwendler Corp.
10. **Reddy, J. N.** (1984), A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, Vol. 51, 745-752.
11. **Rolfes R., Rohwer K.** (1997), Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 51-60.
12. **Sabik A., Kreja I.** (2006), Analiza płyt warstwowych z zastosowaniem funkcji zig-zag, *IV Sympozjon "Kompozyty. Konstrukcje warstwowe" Wrocław-Karpacz 2006*, 137-144.
13. **Sheikha A., Chakrabarti A.** (2003) A new plate bending element based on higher-order shear deformation theory for the analysis of composite plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 39, 883-903.
14. **To C., Wang B.** (1998), Hybrid strain-based three-node flat triangular laminated composite shell elements, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 28, 177-207.
15. **Vlachoutsis S.** (1992), Shear correction factors for plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, 1537-1552.
16. **Whitney J.** (1973), Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, Vol. 40, 302-303.
17. **Zhang Y., Kim K.** (2004), Two simple and efficient displacement-based quadrilateral plate elements for the analysis of composite laminated plates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, 1771-1796.

## ANALYSIS OF LAMINATED PLATES USING EQUIVALENT SINGLE LAYER MODELS

**Abstract:** The aim of the paper is to evaluate the performance of several equivalent single-layer models in the framework of linear static analysis of multilayered plates. The effectiveness of approaches based on the first-order as well as on the higher-order shear deformation theories is discussed. Special attention is paid to various techniques of shear correction, which is required in the case of first-order shear deformation based models. To test the efficiency of several shear correction methods, the authors perform computations with their own programs and commercial package MSC/Nastran.