

# ODKSZTAŁCENIOWY MODEL KUMULACJI USZKODZEŃ ZMĘCZENIOWYCH W ZAKRESIE OBCIĄŻEŃ NISKOCYKLOWYCH

Jarosław SZUSTA\*, Andrzej SEWERYN\*

\* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

szusta@pb.edu.pl, seweryn@pb.edu.pl

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono propozycję modelu obliczania trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych w warunkach złożonych obciążeń, w zakresie małej liczby cykli. Prezentowane podejście składa się z dwóch bloków obliczeniowych. Pierwszy służy do wyznaczania składowych tensora naprężenia i odkształcenia. Zawiera związki konstytutywne i prawo kinematycznego wzmocnienia. Wykorzystano w nim wielopowierzchniowy model Mroza. W drugim bloku znajdują się zależności określające zmianę miary kumulacji uszkodzeń oraz kryterium pęknięcia. W modelu kumulacji uszkodzeń wykorzystano podejście związane z przyrostem plastycznych odkształceń postaciowych na płaszczyźnie fizycznej.

## 1. WPROWADZENIE

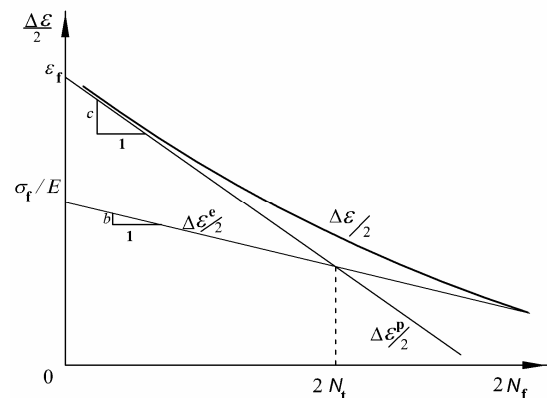
Wiele modeli prognozowania trwałości w warunkach obciążeń niskocyklowych było formułowanych przy użyciu parametrów makroskopowych. Można je podzielić na kilka kategorii: naprężeniowe (Harik i inni, 2002), odkształceniowe (Kuroda, 2001), energetyczne (Kaleta, 1995; Łagoda, 2001; Lee, 2003), a także związane z płaszczyzną krytyczną (Han, 2002) lub elementem objętościowym (Varvani-Farahami, 2000) oraz kohezynne (Pettit i inni, 2001). Są one formułowane na podstawie badań doświadczalnych lub analizy teoretycznej. Często wykazują analogie do klasycznych hipotez wyężeniowych. Mimo dużej liczby kryteriów kumulacji uszkodzeń w złożonych stanach obciążeń w zakresie małej liczby cykli, żadne z nich nie uzyskało ogólnej akceptacji. Posługiwanie się tymi kryteriami wymaga dużej ostrożności i powinno być ograniczone do udokumentowanych doświadczalnie przypadków szczególnych. Istnieje więc uzasadniona potrzeba stworzenia modelu kumulacji uszkodzeń, przy pomocy którego możliwe by było prognozowanie trwałości zmęczeniowej szerszej grupy przypadków obciążeń, w zakresie małej liczby cykli.

Wytrzymałość zmęczeniowa w zakresie stała amplitudowych obciążeń, uogólniona na obciążenia wieloosiowe, często jest opisywana z użyciem zakresu równoważnego odkształcenia  $\Delta \epsilon_{eq}$ . Wykorzystuje się do tego celu np. zależność Mansona-Coffina, zmodyfikowaną przez Morrow (1965) (rys. 1):

$$\frac{\Delta \epsilon_{eq}}{2} = \frac{\sigma_f}{E} (2N_f)^b + \epsilon_f (2N_f)^c, \quad (1)$$

gdzie:  $\epsilon_{eq} = \left( \frac{2}{3} e_{ij} e_{ij} \right)^{1/2}$ ,  $e_{ij}$  – składowe dewiatora odkształcenia,  $N_f$  - liczba cykli do zniszczenia,  $E$  - moduł Younga,  $\sigma_f$ ,  $b$  – odpowiednio współczynnik (naprężenie krytyczne podczas rozciągania) i wykładnik naprężeniowej (sprężystej) krzywej wytrzymałości zmęczeniowej,

$\epsilon_f$ ,  $c$  – współczynnik (odkształcenie krytyczne) i wykładnik plastycznej krzywej wytrzymałości zmęczeniowej.



Rys. 1. Krzywa Mansona-Coffina; osie w układzie logarytmicznym

## 2. MODEL WZMOCNIENIA MATERIAŁU

Przedstawiony w niniejszej pracy model składa się z dwóch bloków obliczeniowych:

### Blok I:

- związki konstytutywne (wiążące historię obciążenia z historią stanu naprężenia i odkształcenia);
- prawo kinematycznego wzmocnienia (model wielopowierzchniowy Mroza (1967) z uwzględnieniem modyfikacji Garuda (1981));

### Blok II:

- zależności obliczeniowe zmian miary kumulacji uszkodzeń;
- prawo kumulacji uszkodzeń (związane z przyrostem plastycznych odkształceń postaciowych) oraz kryterium pęknięcia materiału (warunek naprężeniowy związany z płaszczyzną krytyczną).

Analiza zachowania materiału poddanego działaniu nieproporcjonalnych wymuszeń, wiąże się

z wykorzystaniem przyrostowych związków fizycznych (uogólnionego prawa Hooke'a oraz gradientowego prawa płynięcia stowarzyszonego z powierzchnią plastyczności):

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (2)$$

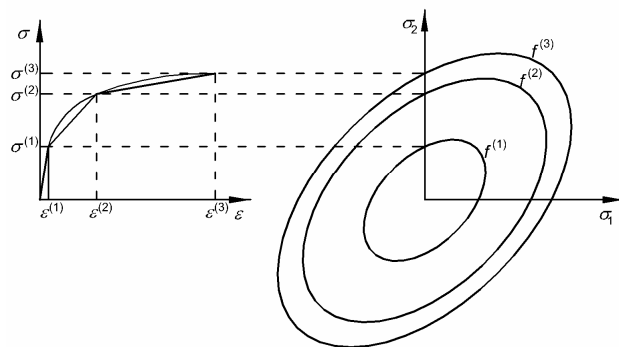
gdzie:  $d\varepsilon_{ij}$ ,  $d\sigma_{ij}$  – przyrost składowych tensora odkształcenia i naprężenia,  $d\lambda$  – współczynnik proporcjonalności,  $\nu$  – współczynnik Poissona,  $\delta_{ij}$  – delta Kroneckera.

Powierzchnie plastyczności określono warunkiem Hubera-von Misesa:

$$f = \frac{3}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - R_i^2 = 0, \quad (3)$$

gdzie:  $s_{ij}$  – składowe dewiatora naprężenia;  $\alpha_{ij}$  – składowe tensora określającego translację powierzchni plastyczności;  $R_i$  – rozmiar powierzchni plastyczności.

Wartości składowych tensorów naprężenia i odkształcenia wyznaczono na podstawie prawa kinematycznego wzmocnienia, wykorzystującego model wielopowierzchniowy Mroza (1967) z uwzględnieniem modyfikacji Garuda (1981).

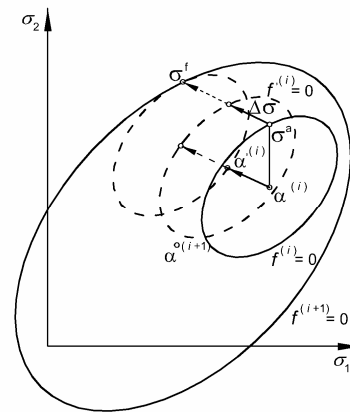


**Rys. 2.** Pierwszy postulat Mroza i odpowiadająca mu wieloliniowa reprezentacja krzywej rozciągania oraz ślady przecięcia powierzchni plastyczności płaszczyzną  $\sigma_3 = 0$

Mróz sformułował dwa postulaty. Pierwszy postulat (rys. 2) dotyczy podziału przestrzeni naprężeń na obszary związane ze stałymi modułami plastycznymi. Są one ograniczone sąsiednimi powierzchniami plastyczności.

Drugi postulat (rys. 3) wiąże się z kinematycznym wzmocnieniem materiału i dotyczy prawa translacji powierzchni plastyczności, traktowanych jako sztywne obiekty geometryczne. Zmodyfikowany sposób wyznaczania wektora translacji powierzchni plastyczności  $f^{(i)} = 0$  zaproponował Garud (1981). Przyjął on, że punkt opisujący aktualny stan naprężenia  $\sigma^a$ , leżący na powierzchni plastyczności  $f^{(i)} = 0$ , oraz punkt  $\sigma^f$ , opisujący fikcyjny stan naprężenia na powierzchni  $f^{(i+1)} = 0$ , są związane kierunkiem przyrostu stanu naprężenia  $\Delta\sigma$  (rys. 3). Wektor translacji powierzchni plastyczności  $f^{(i)} = 0$  wyznacza się z warunku styczności powierzchni  $f^{(i)} = 0$  oraz  $f^{(i+1)} = 0$  w punkcie  $\sigma^f$ . Powyższe założenie tożsamościowo spełnia warunek zgodności i jest wystarczające do wyznaczenia kierunku i modułu wektora hipotetycznego przemieszczenia powierzchni. Szczegółowy opis wyznaczania składowych tensorów naprężenia i odkształcenia w prezentowanym

przypadku znaleźć można np. w pracach Seweryna (2004, 2007).

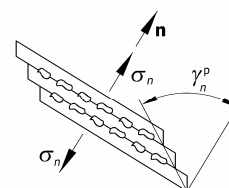


**Rys. 3.** Prawo translacji powierzchni plastyczności (drugi postulat Mroza zmodyfikowany przez Garuda)

### 3. PRAWO KUMULACJI USZKODZEŃ

Źródłem powstawania i rozwoju uszkodzeń w materiałach polikrystalicznych są poślizgi w ziarnach, tworzące później pasma poślizgów, blokujące się na granicach ziaren. Przełamanie tych blokad, czyli wzbudzenie poślizgów w sąsiednich ziarnach, sprzyja łączeniu się pasm poślizgów, a w następstwie powstaniu odkształceń plastycznych (postaciowych) oraz inkubacji i rozwojowi mikropęknięć Kocańda i Kocańda(1989).

Duży wpływ na proces kumulacji uszkodzeń, wywołanych poślizgami na płaszczyźnie fizycznej, ma składowa normalna wektora naprężenia na tej płaszczyźnie. W przypadku, gdy na płaszczyźnie fizycznej występuje naprężenie rozciągające, następuje ułatwione generowanie nowych uszkodzeń i szybszy rozwój już istniejących. Naprężenie ściskające natomiast spowalnia proces kumulacji uszkodzeń.



**Rys. 4.** Generowanie defektów na płaszczyźnie fizycznej przez pasma poślizgów

Proponowane w niniejszej pracy prawo kumulacji uszkodzeń, wywołanej odkształceniami plastycznymi, sformułowano przyrostowo i uzależniono od naprężeniowej funkcji kumulacji uszkodzeń oraz przyrostu plastycznych odkształceń postaciowych na danej płaszczyźnie fizycznej, a mianowicie:

$$d\omega_{np} = A_p \Psi_p(\sigma_n, \omega_{np}) d\gamma_n^p, \quad (4)$$

gdzie  $d\omega_{np}$  jest przyrostem miary kumulacji uszkodzeń na płaszczyźnie fizycznej, spowodowanym rozwojem odkształceń plastycznych,  $\sigma_n$  jest naprężeniem normalnym, a  $d\gamma_n^p$  - jest przyrostem plastycznych odkształceń

postaciowych na tej płaszczyźnie.

Przyrost miary kumulacji uszkodzeń  $d\omega_{np}$  uzależniono od wartości naprężeń normalnych  $\sigma_n$  oraz miary kumulacji uszkodzeń  $\omega_{np}$  na płaszczyźnie fizycznej za pomocą funkcji kumulacji uszkodzeń  $\Psi_p$ . Funkcję tę zaproponowano w następującej postaci:

$$\Psi_p(\sigma_n, \omega_{np}) = \left(1 - \frac{1}{3} R_\sigma(\sigma_n, \omega_{np})\right)^{1/c}, \quad (5)$$

gdzie  $R_\sigma$  jest naprężeniową funkcją pęknięcia,  $c$  jest wykładnikiem występującym w równaniu (1).

Mechanizm kumulacji uszkodzeń opisywany zależnościami (4)-(5) przedstawiono na rys. 4.

Kryterium inicjacji szczeliny można zapisać w postaci warunku naprężeniowego związanego z płaszczyzną fizyczną, a mianowicie:

$$R_{f\sigma} = \max_{(n)} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_c}\right) = 1, \quad (6)$$

gdzie  $R_{f\sigma}$  jest naprężeniowym współczynnikiem pęknięcia,  $\sigma_c = \sigma_c^*(1 - \omega_{np})$  jest aktualną wartością normalnych naprężeń niszczących dla materiału, zależną od miary kumulacji uszkodzeń. Do obliczeń można przyjąć, że wartość naprężeń niszczących dla materiału nieuszkodzonego  $\sigma_c^* = \sigma_f$ .

Można także zaproponować prostszy warunek inicjacji szczeliny, a mianowicie Seweryn i inni (2007):

$$\max_{(n)} \omega_{np} = 1. \quad (7)$$

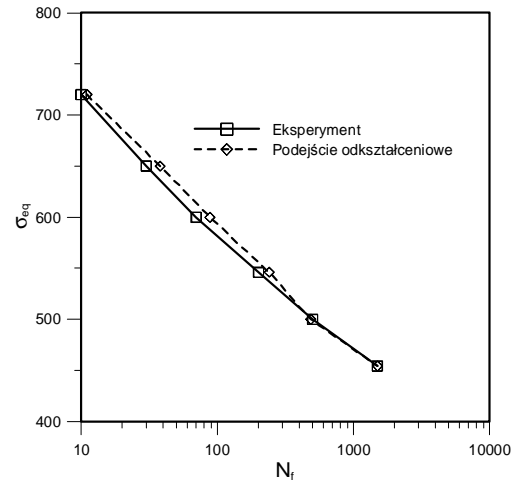
W tym przypadku zakłada się, że inicjacja szczeliny nastąpi wówczas, gdy miara kumulacji uszkodzeń wywołanych odkształceniami plastycznymi na wybranej płaszczyźnie fizycznej osiągnie wartość krytyczną.

W celu określenia miejsca i kierunku inicjacji szczeliny rozpatruje się wszystkie płaszczyzny fizyczne, na których zachodzi kumulacja uszkodzeń wywołana obciążeniami. Uszkodzenia sumuje się niezależnie dla wszystkich płaszczyzn, po czym sprawdza się na której z nich warunek inicjacji szczeliny (6) lub (7) został osiągnięty najszybciej.

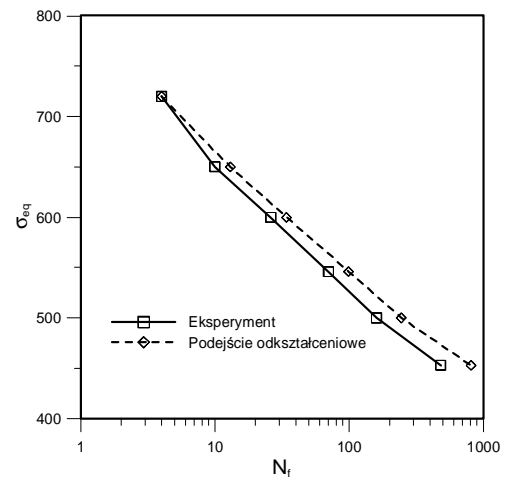
Zaproponowany opis kumulacji uszkodzeń zweryfikowano wykorzystując dane materiałowe dla stali SAE1045 (Leese i inni, 1989). Testy numeryczne wykonano dla dwóch podstawowych typów obciążenia. W pierwszym przypadku próbki poddano działaniu cyklicznego, symetrycznego rozciągania - ściskania. Obciążenie realizowano za pomocą zadanych przyrostów naprężenia normalnego. Wyniki przeprowadzonych obliczeń porównano z danymi doświadczalnymi (rys. 5).

Drugi test polegał na symetrycznym skręcaniu próbek. Tak jak poprzednio, obciążenie realizowano za pomocą przyrostów naprężenia tnącego, tak aby zachować tę samą amplitudę mierzoną naprężeniem zredukowanym Hubera -

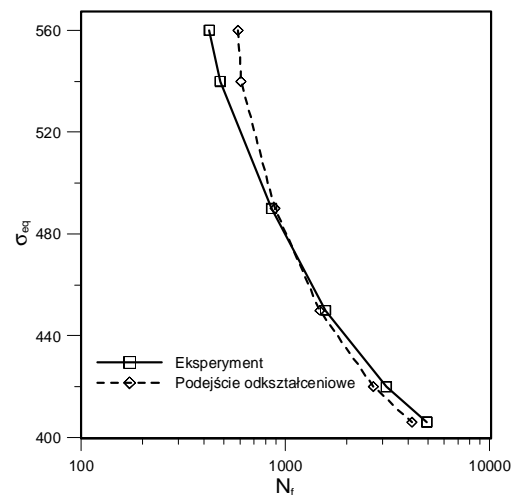
von Misesa  $\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^{1/2}$ , gdzie  $s_{ij}$  składowe dewiatora naprężeń. Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 6.



Rys. 5. Wyniki obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych (Leese i inni, 1989) dla jednoosiowego, symetrycznego rozciągania – ściskania (stal SAE 1045)

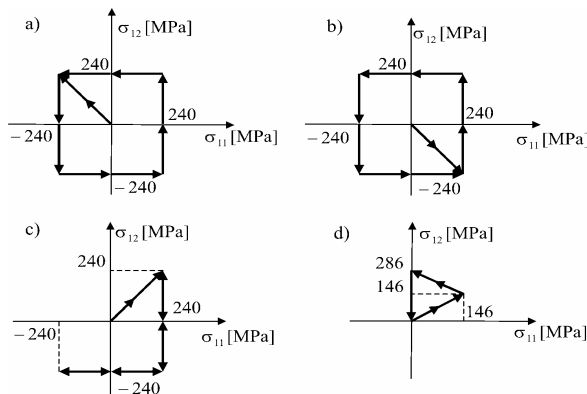


Rys. 6. Wyniki obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych (Leese i inni, 1989) dla symetrycznego skręcania (stal SAE 1045)



Rys. 7. Wyniki obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych (Baum i inni 2003) dla jednoosiowego, symetrycznego rozciągania – ściskania (stal L290GA)

Następne obliczenia numeryczne wykonano dla stali do budowy rurociągów L290GA (Baum i inni, 2003). Rozpatrzono dwa przypadki obciążeń: jednoosiowe, symetryczne rozciąganie - ściskanie oraz obciążenia złożone.



Typ obciążenia	a)	b)	c)	d)
Eksperyment	2880	2640	1648	kilkaset tysięcy
$N_f$ (podejście odształceniowe)	2077	2077	1718	$\infty$

**Rys. 8.** Historie obciążeń nieproporcjonalnych i odpowiadające im zestawienie wyników obliczeń numerycznych i badań doświadczalnych (Baum i inni, 2003) dla stali L290GA

Konfiguracje pętli obciążenia przedstawione za pomocą odpowiednich wartości amplitud składowej normalnej i stycznej wektora naprężenia, pokazano na rys. 8. Obliczoną trwałość, dla wybranych obciążeń proporcjonalnych (symetrycznego rozciągania - ściskania) – rys. 7, oraz nieproporcjonalnych – rys. 8, porównano z wynikami badań eksperymentalnych Bauma i innych (2003).

#### 4. PODSUMOWANIE

Przedstawiony model umożliwi określenie miejsca i kierunku inicjacji szczeliny oraz liczbę cykli lub czas działania złożonego obciążenia niskocyklowego dla dowolnego kształtu elementu konstrukcyjnego. Niezbędna jest wówczas znajomość pól naprężeń i odształceń w elemencie.

Zaletą modelu jest stosunkowo mała liczba parametrów materiałowych, które można wyznaczyć w bezpośredni sposób w testach monotonicznego i cyklicznego rozciągania oraz monotonicznego lub cyklicznego skręcania. Należy zwrócić uwagę na dobrą dokładność prognozowania wytrzymałości zmęczeniowej przy zastosowaniu podejścia odształceniowego, także w przypadku obciążeń złożonych.

#### LITERATURA

1. **Baum C., Ott W., Buczyński A., Trautmann K-H., Nowack H.**, (2003), *Further evaluation of the advanced prediction method EVICD for arbitrary multiaxial loading*, First Int. Conference on Fatigue Damage of Materials-Experiment and Analysis, 14-16, July, Toronto, Canada.
2. **Garud Y.S.**, (1981), A new approach to the evaluation of fatigue under multiaxial loadings, *J. Engng. Mater. Technol.*, ASME, 103, 118-125.
3. **Han C., Chen X., Kim K.S.**, (2002), Evaluation of multiaxial fatigue criteria under irregular loading, *Int. J. Fatigue*, 4: 913-922.
4. **Harik V. M., Klinger J. R., Bogett T. A.**, (2002), Low-cycle fatigue of unidirectional composites Bi-linear S-N-curves, *Int. J. Fatigue*, vol. 24, 455-462.
5. **Kaleta J., Piotrowski A., Harig H.**, (1995), Cyclic properties and hysteresis energy accumulation in selected sintered steels. In: Teoh SH, Lee KH, editors. *Proc. of Fracture Engineering Materials and Structures*. Singapore.
6. **Kocańda S., Kocańda A.**, (1989), *Niskocyklowa wytrzymałość zmęczeniowa metali*, PWN, Warszawa.
7. **Kuroda M.**, (2001), Extremely low cycle fatigue life prediction based on a new cumulative fatigue damage model, *Int. J. Fatigue*, vol. 24, 39-53
8. **Lee B. L., Kim K. S., Nam K. M.**, (2003), Fatigue analysis under variable amplitude loading using an energy parameter, *Int. J. Fatigue*, vol. 25, 621-631.
9. **Leese G. E., Socie G.**, (1989), *Multiaxial Fatigue: Analysis and Experiments*, Ae-14, ISBN: 0-89883-780-4.
10. **Łagoda T.**, (2001), Energy models for fatigue life estimation under uniaxial random loading. Part I: The model elaboration, *Int. J. Fatigue*, vol. 23, 467-480
11. **Morrow J.D.**, (1965), Cyclic plastic strain energy and fatigue of metals, In. *Internal Friction, Damping and Cyclic Plasticity*, ASTM STP, 378, Philadelphia, 45-84.
12. **Mróz Z.**, (1967), On the description of anisotropic workhardening, *J. Mech. Phys. Solids*, 15, pp. 163-175.
13. **Petti R. G., Chen C., Ingraffea A. R., Hui C.**, (2001), Process zone size effects on naturally curving cracks, *Engng Fract. Mech.*, vol. 68, 1181-1205
14. **Seweryn A. (red.)**, (2004), *Modelowanie zagadnień kumulacji uszkodzeń i pękania w złożonych stanach obciążeń*, Wyd. PB, Białystok.
15. **Seweryn A., Buczyński A., Szusta J.**, (2007), Damage accumulation model for low cycle fatigue, *Int. J. Fatigue* (w druku).
16. **Varvani-Farahani A.**, (2000), A new energy-critical plane parameter for fatigue life assesment of various metallic materials subjected to in-phase and out-of-phase multiaxial fatigue loading conditions, *Int. J. Fatigue*, 22: 295-305.

#### STRAIN-BASED DAMAGE ACCUMULATION MODEL FOR LOW CYCLE FATIGUE

**Abstract:** The paper presents the description of damage accumulation for analysis of fatigue life of structural elements under non-proportional loading states. The numerical algorithm consists of two calculation blocks. First presents method for calculation components of stress and strain tensors using multisurface hardening rule proposed by Mróz. Those components have been used for calculation of fatigue life in second block. Increment of damage accumulation has been addicted from increment of shear strain on physical plane.

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005 – 2007 jako projekt badawczy nr 4 T07A 030 28.