

ROZKŁAD ASYMPTOTYCZNY PÓL NAPRĘŻEŃ, PRZEMIESZCZEŃ I ENERGII POTENCJALNEJ ODKSZTAŁCENIA W OTOCZENIU PUNKTU WIERZCHOŁKOWEGO WIELOKLINOWEGO CIAŁA SPRĘŻYSTEGO

Heorgij SULYM*, Mykoła MACHORKIN**

* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

** Instytut Podstawowych Zagadnień Mechaniki i Matematyki im. Ja. S. Pidstryhača Narodowej Akademii Nauk Ukrainy, Lwów, ul. Naukowa 3 b, Ukraina

sulym@pb.edu.pl, mahorkin@ukr.net

Streszczenie: W pracy dokonano analizy rozkładów asymptotycznych pól naprężeń, przemieszczeń i energii potencjalnej odkształcenia w otoczeniu wspólnego wierzchołka wielu połączonych w ciało sprężyste klinów w warunkach odkształcenia antypłaskiego. Jako przykład podano rozkłady asymptotyczne naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka układu, złożonego z dwóch oraz trzech klinów. Metodą numeryczną zbadano rząd osobliwości naprężeń i poziom potencjalnej energii odkształcenia w tych układach.

1. WSTĘP

Elementy konstrukcji budowlanych, węzły oraz części maszyn i mechanizmów często są modelowane jako niejednorodne wieloskładnikowe struktury. Występują również klinopodobne załamania powierzchni połączenia różnych materiałów, ciała które mieszczą w sobie cienkie wady podobne do szczelin albo inkluzji z innych materiałów, szczególnie przy naruszeniu kontaktu idealnego między składnikami. Analogicznymi strukturami można modelować styki płyt litosfery, strefę połączenia ziaren w polikryształach, okolice spiczastych inkluzji w metalach i inne. Jak świadczą dane z eksperymentów, zniszczenie w takich systemach najczęściej zaczyna się właśnie w miejscach połączenia kilku materiałów albo w miejscach, w których wady (szczególnie cienkie) dotykają granic połączenia materiałów. Dlatego też trzeba rozwijać metody analityczne oraz analityczno-numerycznego prognozowania wytrzymałości elementów konstrukcji, w których mogą być inicjowane procesy zniszczenia lub pęknięcia

Konstrukcje, złożone z kilku materiałów, które zbiegają się do jednego wspólnego punktu, badali Bogy (1971a, 1971b), Grinčenko i Ulitko (1998), Ulitko i Lovejkin (1999, 2000), Zadoân (1987). Zagadnienia teorii szczelin, wychodzących na granicę podziału materiałów rozważane w pracach Rice i Sih (1965), Bogy (1971b), Dunders (1969). Defekty na granicach podziału materiałów przeanalizowano w artykułach Denysûka (1992), Butvinnika i innych (1989, 1983), Savruka i Shkarayeva (1999); Savruka (2002). Dość dokładną, ale tym nie mniej niepełną analizę tego pytania, można znaleźć w pracach Sinclair (2004a, 2004b). Modelowali oni kompozyty jako

układy połączonych ze sobą klinów przy odpowiednich sposobach obciążenia w nieskończoności lub na powierzchniach brzegowych układu. Rozwiązania odpowiednich zagadnień brzegowych otrzymywano przy pomocy metody kompleksowych potencjałów Kołosowa-Muschieliszwiliego albo z wykorzystaniem funkcji Eri. Wobec konieczności wykonywania skomplikowanych przekształceń płaskie zadanie było otrzymane dla dwuklinowych bimateriałów (Bogy, 1971a) oraz szczeliny na granice łamanej podziału materiałów (Bogy, 1971b), a w warunkach zagadnienia antypłaskiego – dla kompozytu trzyklinowego (Butvinnik i inni, 1983), oraz dla defektu, leżącego na linii podziału faz (Savruk, 2002). Autorzy ci ograniczali się do badania rzędu osobliwości w otoczeniu punktów osobliwych.

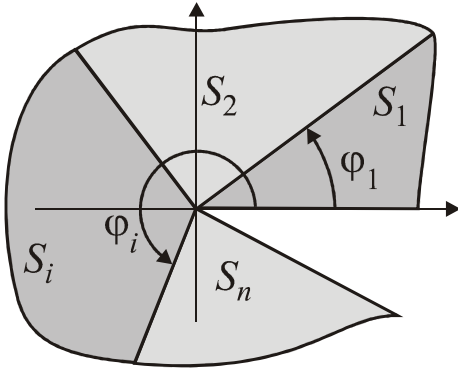
Dla oceny wytrzymałości układów mechanicznych z koncentratorami naprężeń, które powodują niepierwiastkową osobliwość naprężeń, celowo jest stosować kryteria energetyczne, w których zasadniczą wagę odgrywa zupełna lub właściwa energia odkształcenia w otoczeniu badanego koncentratora. Autorzy niniejszej publikacji nie znaleźli prac, w których podejście energetyczne byłoby omawiane z uwzględnieniem pakietów klinów.

W pracach szkoły naukowej Ja. S. Pidstryhača (Kušnir i inni, 2003; Podstrigač i inni, 1984) zaproponowano i rozwinięto metodykę modelowania układu złożonego z różnych jednorodnych (warstwowych) materiałów z wykorzystaniem jednolitego wzoru, który mieści funkcje skokowe. Wykorzystując takie podejście oraz aparat funkcji uogólnionych zaproponowano uniwersalną metodę otrzymania rozkładów asymptotycznych naprężeń

i przemieszczeń dla układów złożonych z dowolnej ilości klinów z jednym wspólnym punktem (rys. 1) przy podłużnym ścinaniu (zagadnienie antypłaskie). Jako przykład przeanalizowano układy, składające się z dwóch i trzech klinów, dla których zbadano również charakter rozkładu potencjalnej energii odkształcenia.

2. POSTAWIENIE ZAGADNIENIA

Niech ośrodek nieograniczony w postaci układu klinów (rys. 1), składa się z wycinka kąтового o kącie wierzchołkowym α_{n+1} oraz dowolnej ilości n klinów z kątami wierzchołkowymi α_j ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1} = 2\pi$) i znajdują się w warunkach odkształcenia antypłaskiego, gdy $u = u(r, \varphi) = 0$, $v = v(r, \varphi) = 0$, $w = w(r, \varphi)$. Zagadnienie wyznaczenia naprężeń i odkształceń ośrodka w otoczeniu punktu narożnego będziemy rozwiązywać w układzie biegunowym o środku w punkcie wierzchołkowym układu klinów.



Rys.1. Schemat geometryczny zagadnienia

Podejście ogólne do formułowania klasycznym modelem matematycznym zagadnienia sprężenia ze sobą części układu o różnych właściwościach mechanicznych sformułowane w wielu podręcznikach z teorii sprężystości (Bożydaryk i Sulym, 1994). Zgodnie z nim w każdym z elementów układu spełnione są:

1) związki geometryczne

$$\varepsilon_{rr}^i = \varepsilon_{\varphi\varphi}^i = \varepsilon_{zz}^i = \varepsilon_{r\varphi}^i = 0, \varepsilon_{\varphi z}^i = \frac{1}{2r} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi}, \varepsilon_{rz}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial w_i}{\partial r}; \quad (1)$$

2) związki fizyczne (prawo Hooke'a)

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= \sigma_{\varphi\varphi}^i = \sigma_{zz}^i = \sigma_{r\varphi}^i = 0, \\ \sigma_{\varphi z}^i &= \frac{\mu_i}{r} \frac{\partial w_i}{\partial \varphi}, \quad \sigma_{rz}^i = \mu_i \frac{\partial w_i}{\partial r}; \end{aligned} \quad (2)$$

3) równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{rz}^i}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^i}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}^i}{\partial \varphi} = 0; \quad (3)$$

4) warunki kontaktu mechanicznego doskonałego na liniach $\varphi_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$ połączenia klinów

$$w_i|_{\varphi_i} = w_{i+1}|_{\varphi_i}, \quad \sigma_{\varphi z}^i|_{\varphi_i} = \sigma_{\varphi z}^{i+1}|_{\varphi_i} \quad (i = \overline{1, n-1}); \quad (4)$$

5) warunki brzegowe na brzegach wycinka klinowego (jeden komplet z czterech możliwych)

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi z}^n|_{\varphi_n} &= \sigma_{\varphi z}^1|_{\varphi=0} = 0, \quad w_n|_{\varphi_n} = w_1|_{\varphi=0} = 0, \\ \sigma_{\varphi z}^n|_{\varphi_n} &= w_1|_{\varphi=0} = 0, \quad w_n|_{\varphi_n} = \sigma_{\varphi z}^1|_{\varphi=0} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Rozważmy cały obszar z połączonych klinów

$$S = \bigcup_{i=1}^n S_i \text{ jako jedną całość. Dla niego według metody}$$

przedstawionej w publikacjach (Kušnir i inni, 2003; Podstrigač i inni, 1984), za pomocą funkcji skokowej Heaviside'a przedłużymy zdefiniowane w obszarach S_i funkcje przemieszczeń w_i oraz stałe współczynniki Kirchhoffa μ_i na cały obszar S w postaci

$$w(\varphi, r) = w_1(\varphi, r) + \sum_{i=1}^n (w_{i+1} - w_i) S_+(\varphi - \varphi_i),$$

$$\mu(\varphi) = \mu_1 + \sum_{i=1}^n (\mu_{i+1} + \mu_i) S_+(\varphi - \varphi_i), \quad (6)$$

$$S_+ = \{1 (\xi > 0); 0 (\xi \leq 0)\}.$$

Po uwzględnieniu związku pomiędzy klasycznymi pochodnymi oraz uogólnionymi (Kušnir i inni, 2003), zamiast układu równań (3) z warunkami (4) otrzymamy równania w postaci (Kušnir i inni, 2003; Podstrigač i inni, 1984)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = \sum_{i=1}^n C_{\sigma i} \delta_+(\varphi - \varphi_i); \quad (7)$$

$$C_{\sigma i} = -\frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi_i-0}, \quad (8)$$

$$w|_{\varphi=\varphi_i+0} - w|_{\varphi=\varphi_i-0} = 0 \quad (i = \overline{1, n-1}),$$

z warunkami brzegowymi (5).

Tak sformułowane zagadnienie według (Kušnir i inni, 2003; Podstrigač i inni, 1984), nazywa się uogólnionym zagadnieniem sprężenia.

3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Rozwiązanie zagadnienia (7) poszukujemy w postaci (6), gdzie

$$w_i = \sum_{j=1}^{\infty} r^{q_j} (A_{ij} \cos(q_j \varphi) + B_{ij} \sin(q_j \varphi)) = \sum_{j=1}^{\infty} r^{q_j} w_{ij}^* \quad (9)$$

Zaznaczmy, że parametr q w otoczeniu wierzchołka układu klinowego określający rząd osobliwości naprężeń za pomocą zależności $\lambda=1-q$, jest w przypadku ogólnym wielkością zespoloną. Dlatego z całego zbioru możliwych wartości q_j będziemy wybierać tylko te, które należą do zbioru $(0;1)$. Decydujący wpływ na wartość naprężeń w otoczeniu punktu osobliwego ma parametr q_j o minimalnej wartości (Bogy, 1971a, 1971b; Liebovitz, 1968). Wobec tego nie będziemy dalej stosować sumowania względem wskaźnika j , zakładając, że w otoczeniu punktu osobliwego asymptotykę naprężeń określa współczynnik znajdujący się obok największej osobliwości. Jeżeli zajdzie potrzeba, taką sumę nietrudno uzyskać. Rozwiązanie ogólne zagadnienia (7) z uwzględnieniem (9) zapiszemy jak poniżej:

$$\frac{w}{r^q} = A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) + \sum_{i=1}^{n-1} [A_i^* \cos(q\varphi) + B_i^* \sin(q\varphi)] S_+(\varphi - \varphi_i), \quad (10)$$

$$A_i^* = A_{i+1} - A_i, \quad B_i^* = B_{i+1} - B_i.$$

Spełniając warunek (8), z uwzględnieniem (10) wyznaczamy współczynniki A_i^* , B_i^* , wskutek czego dla asymptotyk naprężeń i przemieszczeń otrzymujemy następujące wyrażenia

$$w(r, \varphi) r^{1-\lambda} = A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \sin[q(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (11)$$

$$r^\lambda \mu(\varphi) \sigma_{\varphi z}(r, \varphi) = -A_1 q \sin(q\varphi) + q B_1 \cos(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i + B_1 L_2^i) \cos[q(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (12)$$

$$\mu(\varphi) r^\lambda \sigma_{r z}(r, \varphi) = A_1 \cos(q\varphi) + B_1 \sin(q\varphi) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} (A_1 L_1^i - B_1 L_2^i) \sin[q(\varphi - \varphi_i)] S_+(\varphi - \varphi_i); \quad (13)$$

gdzie L_1^i, L_2^i określają zależności rekurencyjne

$$L_1^i = -q \sin(q\varphi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_j - \varphi_i)], \quad (14)$$

$$L_2^i = q \cos(q\varphi_j) - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_j - \varphi_i)].$$

W celu wyznaczenia niewiadomych A_1, B_1 wykorzystamy warunki (5), spełnienie których daje jednorodny układ równań algebraicznych. Warunek istnienia rozwiązania nietrywialnego stanowi jednocześnie równanie charakterystyczne dla wyznaczenia zbioru wartości parametru q . Ponieważ układ równań jest jednorodny, to jakiś jeden współczynnik pozostaje nieokreślony i zależy on w rzeczywistości od stanu naprężeń układu sprężystego (w całości). Jego wyznaczenie jest odrębnym zagadnieniem wykraczającym poza tematykę niniejszej publikacji. Jeden ze sposobów jego rozwiązania jest opisany w pracy (Parton and Perlin, 1984).

W zależności od tego, jakie dokładnie są przyjęte warunki brzegowe (5) na brzegach układu klinowego, określimy wartości współczynników i równania charakterystyczne do obliczenia parametru q :

1) brzegi wycinka są wolne od naprężeń -

$$\sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=0} = 0:$$

$$B_1 = 0,$$

$$-q \sin(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_1^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0; \quad (15)$$

2) brzegi wycinka są na sztywno zamocowane

$$w \Big|_{\varphi_n} = w \Big|_{\varphi=0} = 0:$$

$$A_1 = 0,$$

$$\sin(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{q\mu_{i+1}} L_2^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0; \quad (16)$$

3) jeden brzeg wycinka jest wolny od naprężeń, a drugi -

sztywnie zamocowany $w \Big|_{\varphi=\varphi_n} = \sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=0} = 0:$

$$B_1 = 0,$$

$$\cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu_{i+1} - \mu_i)}{q\mu_{i+1}} L_1^i \sin[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0, \quad (17)$$

badź $\sigma_{\varphi z} \Big|_{\varphi=\varphi_n} = w \Big|_{\varphi=0} = 0:$

$$A_1 = 0,$$

$$q \cos(q\varphi_n) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{\mu_{i+1}} L_2^i \cos[q(\varphi_n - \varphi_i)] = 0. \quad (18)$$

Na podstawie relacji (11) – (13) z uwzględnieniem (15) – (18) można stwierdzić, że dla dowolnej ilości klinów zależności asymptotyczne, przemieszczeń i naprężeń przy antypłaskim odkształceniu mają postać

$$\begin{aligned} w(r, \varphi) &= r^{1-\lambda} \tilde{K} f_1(\varphi), \quad \sigma_{\varphi z}(r, \varphi) = r^{-\lambda} \tilde{K} f_2(\varphi), \\ \sigma_{rz}(r, \varphi) &= r^{-\lambda} \tilde{K} f_3(\varphi), \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie \tilde{K} - współczynnik, określający stan naprężenia układu, $\lambda=1-q$ - rząd osobliwości naprężeń, q - najmniejsza wartość rozwiązania odpowiedniego równania (15) - (18), należąca do przedziału (0;1), $f_i(\varphi)$ ($i=1, 2, 3$) - funkcja, która występuje w zależności asymptotycznej obok najmniejszej wartości rzędu osobliwości i charakteryzuje rozkład kątowy naprężeń.

Warto szczególnie zaznaczyć, że współczynnik \tilde{K} jest odpowiednikiem współczynnika intensywności naprężeń dla defektu cienkiego, położonego w ośrodku jednorodnym (Bożydarnyk i Sulym, 1994). Podczas obliczania granicy dla jednakowych modułów ścinania klinów $\mu_1=\mu_2=\dots=\mu_n$ lub $\varphi_i=0$ ($i=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$) wartości \tilde{K} oraz współczynników intensywności naprężeń pokrywają się, tj. można uważać \tilde{K} jako uogólniony współczynnik intensywności naprężeń w otoczeniu punktu osobliwego układu wieloklinowego.

Korzystając ze wzorów (15) - (19) i relacji (1) wyznaczmy energię właściwą odkształcenia w otoczeniu punktu osobliwego układu klinowego oraz energie odkształcenia w każdym z elementów układu według wzorów (Liebiovitz, 1968)

$$W = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\varphi z} \sigma_{\varphi z} + \varepsilon_{rz} \sigma_{rz}) = \frac{1}{2} \left(\sigma_{rz} \frac{\partial w}{\partial r} + \sigma_{\varphi z} \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \quad (20)$$

$$W^* = \iint_S W ds.$$

Uwzględniając przedstawienie naprężeń i przemieszczeń (19) oraz przyjmując, że całkowanie odbywa się po małym obszarze S ($ds=rdrd\varphi$) dla wartości r od 0 do r_0 i φ od θ_1 do θ_2 , to przy $\lambda \in (0,1)$ zależność (20) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} W &= \frac{r^{-2\lambda} \tilde{K}^2}{2} f_4(\varphi), \quad W^* = \frac{\tilde{K}^2 r_0^{2(1-\lambda)}}{4} f^*, \\ f_4(\varphi) &= \frac{1}{\mu(\varphi)} (f_3^2(\varphi) + f_2^2(\varphi)), \end{aligned} \quad (21)$$

$$f^* = \frac{1}{(1-\lambda)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\frac{1}{\mu(\varphi)} (f_3^2(\varphi) + f_2^2(\varphi)) \right] d\varphi.$$

Ponieważ θ_1 i θ_2 są liczbami określonymi, to wartość f^* dla zadanej geometrii i stałych sprężystych jest stałą. Określa ona wartość energii odkształcenia, a funkcja $f_4(\varphi)$ charakteryzuje rozkład energii właściwej jako funkcji kąta.

Dla układu zbudowanego z dwóch lub trzech klinów na podstawie wzorów (14) otrzymujemy następującą postać funkcji L_1^j, L_2^j :

$$\begin{aligned} L_1^1 &= -q \sin(q\varphi_1), \quad L_1^2 = -q \sin(q\varphi_2) + \\ &+ \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2} q \sin(q\varphi_1) \cos[q(\varphi_2 - \varphi_1)], \\ L_2^1 &= q \cos(q\varphi_1), \quad L_2^2 = q \cos(q\varphi_2) - \\ &- \frac{(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_2} q \cos(q\varphi_1) \cos[q(\varphi_2 - \varphi_1)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Wykorzystując zależność (22) i w oparciu na wzory (11)–(13), (19), (21) wyznaczamy wartości funkcji $f_i(\varphi)$ $i=1,4$ wewnątrz układu oraz wartość f_i^* dla każdego z jej elementów S_i ($i=1,3$).

4. ANALIZA NUMERYCZNA

Numeryczne obliczenia potencjalnej energii odkształcenia w otoczeniu wierzchołka każdego z klinów układu przeprowadzono dla przypadku, gdy kąt wierzchołkowy wycinka klinowego był równy zero i jego brzegi były wolne od naprężeń (szczelina półnieskończona) lub sztywnie zamocowane (półnieskończona doskonale sztywna inkluzja). Wyniki obliczeń przedstawiono w tab. 1-2

W tab.1 przedstawiono wyniki badań układu zbudowanego z dwóch połączonych klinów. Obliczenia wykazały, że przy stosunku modułów ścinania $\gamma=0,1; 0,01; 0,001$ obraz jakościowy rozkładu energii potencjalnej odkształcenia wewnątrz klinów słabo zależy od γ . Obecność półnieskończonej szczeliny powoduje koncentrację największej ilości potencjalnej energii odkształcenia w klinie o mniejszym module ścinania dopóki jego kąt wierzchołkowy nie zacznie spełniać warunku $5\pi/4 < \alpha_1 < 6\pi/4$. Wtedy w zależności od stosunku modułów ścinania, przy pewnych wartościach kąta z tego przedziału, większa ilość energii skupia się w klinie z większym modulem ścinania. Dla doskonale sztywnej inkluzji podobna sytuacja powstaje przy kątach $\pi/2 < \alpha_1 < 3\pi/4$. Otrzymane rzędy osobliwości pokrywają się z wynikami pracy (Butvinnik i inni, 1983).

Tab. 1. Potencjalna energia odkształcenia, nagromadzona w komponentach układu dwuklinowego

$n = 2; \frac{\mu_2}{\mu_1} \equiv \gamma = 0.01; \alpha_1 \in (0; 2\pi); \alpha_2 = 2\pi - \alpha_1$					
α_1	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Szczelina półnieskończona					
λ	0,500	0,634	0,500	0,365	0,500
f_1^*	0	1,430	1,960	3,230	3,926
f_2^*	0,392	7,541	19,63	0,435	0
Doskonale sztywne cienka inkluzja półnieskończona					
λ	0,500	0,365	0,500	0,634	0,500
f_1^*	0	0,886	1,963	2,850	3,926
f_2^*	39,27	10,27	0,196	0,115	0

Tab. 2. Potencjalna energia odkształcenia, nagromadzona w komponentach układu trzyklinowego

$n = 3; \mu_1/\mu_2 = \gamma_1 = 0.001; \mu_3/\mu_1 = \gamma_2 = 0.1, \alpha_1 = \kappa\alpha_3; \kappa = 2; \alpha_2 \in [0; 2\pi]; \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$					
α_2	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Szczelina półnieskończona					
λ	0,352	0,496	0,254	0,335	0,500
$f_1^* \cdot 10^{-3}$	1,570	1,350	0,960	0,510	0
f_2^*	0	0,670	1,150	2,99	3,920
$f_3^* \cdot 10^{-3}$	0,001	49,12	42,31	0,014	0
Doskonale sztywne cienka inkluzja półnieskończona					
λ	0,603	0,950	0,957	0,950	0,500
$f_1^* \cdot 10^{-3}$	683,0	6,890	2,590	1,370	0
f_2^*	0	9,320	6,220	3,070	0,004
$f_3^* \cdot 10^{-3}$	13,86	0,800	0,020	0,0008	0

Tab. 2 obrazuje niektóre wyniki obliczeń dla układu trzyklinowego. Dla inkluzji sztywnej i dla szczeliny największa ilość potencjalnej energii odkształcenia skupia się w klinie o kącie wierzchołkowym większym od π .

Zmniejszenie stosunku modułów ścinania γ_1, γ_2 lub stosunku kątów wierzchołkowych κ powoduje zmianę nagromadzonej w klinach energii. Nie ma to jednak wpływu na jakościowe prawo rozdzielania energii na poszczególne kliny. Zaznaczmy również, że w przypadku ogólnym ośrodka, złożonego z trzech klinów, przy niektórych wartościach parametrów $\gamma_1, \gamma_2, \kappa$ istnieją obszary wartości α_2 , w których rzeczywiste rozwiązania dla rzędu osobliwości nie istnieją. Dla tego, by otrzymać rozkład energii odkształcenia w takich układach potrzebne są dodatkowe badania.

5. WNIOSKI

Sformułowano uogólnione zagadnienie sprężenia dla obszaru, złożonego z dowolnej ilości klinów i odnaleziono jego rozwiązanie ogólne. Zaproponowana została efektywna metoda konstruowania rozkładów asymptotycznych pól fizyko-mechanicznych w otoczeniu środka układu klinowego. Wyprowadzono postać jawną równań charakterystycznych dla obliczenia rzędów osobliwości naprężeń w punkcie osobliwym. Wprowadzono pojęcie uogólnionego współczynnika naprężeń w otoczeniu wierzchołka układu wieloklinowego. Przeprowadzono analizę numeryczną rzędu osobliwości oraz charakteru rozkładu potencjalnej energii odkształcenia w dwuklinowym oraz trzyklinowym układach.

LITERATURA

1. **Bogy D.B.** (1971a), Two edge-bonded elastic wedges on different materials and wedge angles under surface tractions, *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 38, No. 2, 377-386.
2. **Bogy D.B.** (1971b), On the plane elastostatic problem of a loaded crack terminating at a material interface, *Ibid.*, 38, No. 4, 911-918.
3. **Bożydarnyk V.V., Sulym G.T.** (1994), *Elementy teorii plastyżnosti ta mcinosti*, Lviv: Svit, 945 s.
4. **Butvinnik I.P.** (1990), Theory of crack-type defects in the vicinity of the boundary of media, *Materials Science*, 25, No. 4, 428-431.
5. **Butvinnik I.P., Bereżnickij L. T., Pohmurskij V. I.** (1983), O porādke singularnosti naprāženij v kompozitah pri antiploskoj dēformacii, *Fiziko-himična mehanika materialiv*, No. 2, 96-97.
6. **Denysūk I. T.** (1992), Singular stresses in an isotropic matrix containing an elastic wedge, *Materials sciences*, 28, No. 4, 388 - 394.
7. **Dunders J.** (1969), Edge bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading, *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 36, No. 1, 650-652.
8. **Grinčenko V.T., Ulitko A.F.** (1998), O lokal'nyh osobennostāh v matēmatičeskikh modelāh fizičeskikh polēj, *Mat. metody i fiziko-mehanični polā*, 41, No. 1., 12-34.
9. **Kušnir R.M., Nikolyšin N.N., Osadčuk V.A.** (2003), *Pružny i pružnoplastyčnyj hranyčnyj stan obolonok z defektamy*, "Spolom" wydawnycy dim, Lviv. 318 s.
10. **Liebovitz H.** (1968), *Mathematical fundamentals*, v. 2, Academic Press, New York and London
11. **Parton V.Z., Perlin P.I.** (1984), *Mathematical methods of the theory of elasticity*. In 2 v. Moscow: Mir Publishers, 674 p.
12. **Podstrigač A.S., Lomakin V.A., Kolāno Ū.M.** (1984), *Termouprugost' tēl nēodnorodnoj struktury*, Moskva: Nauka, 368 c.
13. **Rice J.R., Sih G.C.** (1965), Plane problems of cracks in dissimilar media, *Trans. ASME. Journal of Applied Mechanics*, 32, No. 2, 418-423.
14. **Savruk M.P. and Shkarayev S.V.**, (1999), Similarity of Stress-Singularity Problems for Materials with Linear and Bilinear Behaviors, *Materials Science*, v. 2., 807 - 820.
15. **Savruk M.P.** (2002), Longitudinal Shear of an Elastic Wedge with Cracks and Notches, *Materials Science*, No. 5, 672-685.

16. **Sinclair G.B.** (2004a), Stress singularities in classical elasticity—I: Removal, interpretation, and analysis, *Applied Mechanics Reviews*, 57, No. 4, 251–298.
17. **Sinclair G.B.** (2004b), Stress singularities in classical elasticity—II: Asymptotic identification, *Ibid*, 57, No. 5, 385–439.
18. **Ulitko A.F, Lovejkin A.V.** (1999) Rivnovaga pružnogo prostoru poslablenogo ploskym, klynopodibnym v plani rozrizom, *Mat. metody i fiziko-mehanični polâ*, 42, No. 2, 108–114.
19. **Ulitko A.F, Lovejkin A.V.** (2000), Zadača pro rivnovagu prostoru z dvoma rozrizamy – po pivplošyni ta klynopodibnymy u plani, kotri ležat' v odnij plošyni, *Mat. metody i fiziko-mehanični polâ*, 43, No. 1, 109–114.
20. **Zadoân M.A.** (1987), Prodolnyj sdvig sostavnogo klina, *Doklady Akadēmii nauk SSSR*, 296, No. 2, 297–302.

**ASYMPTOTIC DISTRIBUTION OF STRESSES,
DISPLACEMENTS AND POTENTIAL DEFORMATION
ENERGY IN THE VICINITY OF CORNER POINT IN
MULTIWEDGE ELASTIC BODY**

Abstract: The asymptotic distribution of stresses, displacements and strain potential energy in the vicinity of corner point in a multi-wedge system under antiplane strain has been studied. As an example the asymptotic presentation of stresses and displacements near the top in a two- and three-wedge systems are constructed. The order of stress singularity and the level of strain potential energy have been investigated numerically

Pracę wykonano w ramach pracy statutowej S/WM/1/03 w Politechnice Białostockiej.