

PŁASKIE KONTAKTOWE ZAGADNIENIE Z UWZGLĘDNIENIEM TARCIA DLA PÓŁPRZESTRZENI ZE SZCELINĄ

Mykhaylo SAVRUK*, Adam TOMCZYK*, Aleksander YEVTUSHENKO*

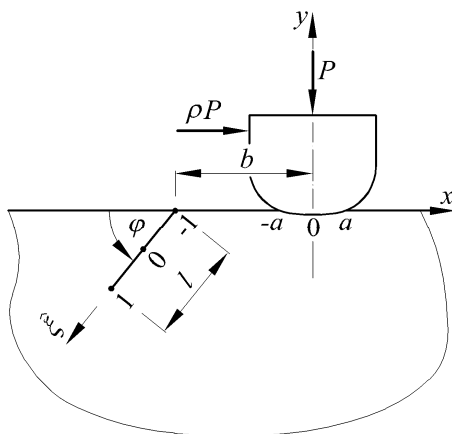
* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

savruk@pb.edu.pl, atom@pb.edu.pl, ayevt@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki analizy wpływu przesuwania się dociskanego stempla po powierzchni półprzestrzeni sprężystej, osłabionej pojedynczym pęknięciem. Zaprezentowano układ algebraicznych równań liniowych, do którego można sprowadzić układu równań całkowych reprezentujący zagadnienie ogólne (Savruk i Yevtushenko, 2005). Zbadano wpływ współczynnika tarcia na rozkład naprężeń kontaktowych pod stemplem i wpływ odległości szczeliny od stempla oraz kąta nachylenia szczeliny na wartości współczynników intensywności naprężeń.

1. WPROWADZENIE

Niniejsza praca stanowi kontynuację pracy Savruka i Yevtushenki (2005) dla przypadku szczeliny o długości l , wnikającej jednym z wierzchołków w powierzchnię półprzestrzeni w odległości b od osi symetrii stempla. Założono się, że stempel znajduje się w równowadze pod wpływem siły normalnej P i stycznej ρP , gdzie ρ jest współczynnikiem tarcia. (rys. 1). Na krawędziach szczeliny zadane jest samorzównoważone obciążenie. Kontur szczeliny oznaczono przez L , a strefę kontaktu stempla z powierzchnią półprzestrzeni – L_0 .



Rys. 1. Schemat zagadnienia

Należy znaleźć rozkład ciśnienia pod stemplem oraz wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny, znajdującym się wewnątrz półprzestrzeni.

2. UKŁAD RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

Układ równań całkowych zagadnienia, otrzymany w sposób analogiczny jak w pracy Savruka i Yevtushenki (2005), ma postać:

$$\varepsilon \rho \sigma(\eta) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(\xi) d\xi}{\xi - \eta} + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-1}^1 \left[K_1(\bar{\xi}, \eta) g'(\bar{\xi}) + L_1(\bar{\xi}, \eta) \overline{g'(\bar{\xi})} \right] d\bar{\xi} = F(\eta), \quad |\eta| < 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[K_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}) g'(\bar{\xi}) + L_2(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \overline{g'(\bar{\xi})} \right] d\bar{\xi} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \bar{\eta}) \sigma(\xi) d\xi = p(\bar{\eta}), \quad |\bar{\eta}| < 1, \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \sigma(\xi) d\xi = A = -\frac{P}{a}, \quad \int_{-1}^1 g'(\bar{\xi}) d\bar{\xi} = 0. \quad (3)$$

gdzie:

$$K_1(t, x) = \frac{2}{\kappa + 1} \left[\kappa f_{21}(t, x) - \overline{f_{22}(t, x)} - x \overline{g_{22}(t, x)} - \overline{h_{22}(t, x)} \right]$$

$$L_1(t, x) = \frac{2}{\kappa + 1} \left[\kappa f_{22}(t, x) - \overline{f_{21}(t, x)} - x \overline{g_{21}(t, x)} - \overline{h_{21}(t, x)} \right]$$

$$K_2(t, t') = f_{21}(t, t') + \overline{f_{22}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{22}(t, t')} + \overline{h_{22}(t, t')} \right]$$

$$L_2(t, t') = f_{22}(t, t') + \overline{f_{21}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{21}(t, t')} + \overline{h_{21}(t, t')} \right]$$

$$M(t, t') = f_{11}(t, t') + \overline{f_{11}(t, t')} + \frac{dt'}{dt} \left[t' \overline{g_{11}(t, t')} + \overline{h_{11}(t, t')} \right]$$

$$f_{11}(t, z) = -\frac{1+i\rho}{2i} \frac{1}{t-z}, \quad f_{21}(t, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} \right),$$

$$f_{22}(t, z) = \frac{t-\bar{t}}{2(\bar{t}-z)^2}, \quad g_{11}(t, z) = -\frac{1+i\rho}{2i} \frac{1}{(t-z)^2},$$

$$g_{21}(t, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(\bar{t}-z)^2} \right),$$

$$g_{22}(t, z) = \frac{t-\bar{t}}{(\bar{t}-z)^3},$$

$$h_{11}(t, z) = -\frac{1}{2i} \left[\frac{1-i\rho}{t-z} - \frac{t(1+i)}{(t-z)^2} \right],$$

$$h_{21}(t, z) = -\frac{\bar{t}}{2} \left(\frac{1}{(t-z)^2} - \frac{1}{(\bar{t}-z)^2} \right),$$

$$h_{22}(t, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{\bar{t}-z} - \frac{(t-\bar{t})(\bar{t}+z)}{(\bar{t}-z)^3} \right),$$

$$F(\eta) = 4G(\kappa+1)df(x)/dx,$$

$$p(\bar{\eta}) = N^\pm(\bar{\eta}) + iT^\pm(\bar{\eta}),$$

$$t = a\xi, \quad x = a\eta, \quad -1 < \xi, \eta < 1, \quad (t, x \in L_0),$$

$$t = a\omega(\bar{\xi}), \quad t' = a\omega(\bar{\eta}), \quad -1 < \bar{\xi}, \bar{\eta} < 1, \quad (t, t' \in L),$$

$$\omega(\bar{\xi}) = -\frac{b}{a} - \frac{l}{2a}(\bar{\xi}+1)e^{i\varphi} = -b^* - \frac{l^*}{2}(\bar{\xi}+1)e^{i\varphi},$$

$$\frac{d\bar{t}'}{dt} = e^{-2i\varphi}, \quad b^* = b/a, \quad l^* = l/a,$$

$$\varepsilon = (\kappa-1)/(\kappa+1), \quad \kappa = 3-4\nu,$$

gdzie G – moduł Kirchhoffa, ν – współczynnik Poissona, $f(x)$ – funkcja, opisująca kształt podstawy stemplą, $g'(\zeta)$ – funkcja niewiadoma na konturach szczelin, N i T – normalna i styczna, składowe wektora powierzchniowych naprężeń na brzegach szczelin.

W przypadku półprzestrzeni jednorodnej, bez szczelin, mamy $g'(\zeta)=0$ i układ równań całkowych (1), (2) sprowadza się do jednego równania przy spełnieniu warunku (3). Łatwo zapisać rozwiązanie ogólne tego równania, w niniejszej pracy ograniczymy się tylko do rozwiązania dla stemplą o płaskiej podstawie (Galın, 1980; Muskhelishvili, 1962)

$$q(\eta) = \pi^{-1} A \cos \pi \mu. \quad (4)$$

3. UKŁAD LINIOWYCH RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH

Rozwiązania układu równań całkowych (1), (2), spełniającego warunki (3), poszukujemy w klasie funkcji, posiadających osobliwości całkwalne (Savruk, 1981):

$$\sigma(\xi) = w(\xi)q(\xi),$$

$$w(\xi) = (1-\xi)^\alpha(1+\xi)^\beta, \quad -1 < \alpha, \beta < 0, \quad (5)$$

$$\alpha = -0.5 + \mu, \quad \beta = -0.5 - \mu, \quad = \arctan \varepsilon \rho,$$

$$g'(\bar{\xi}) = (1-\bar{\xi}^2)^{-0.5}u(\bar{\xi}),$$

gdzie $g(\zeta)$ i $u(\zeta)$ są funkcjami ciągłymi w przedziale domkniętym $[-1, 1]$.

Dla znalezienia nieznanych funkcji $g(\zeta)$ i $u(\zeta)$ skorzystamy się z metody kolokacji po węzłach Gaussa-Chebysheva (Savruk et al., 1999). W wyniku jej zastosowania do układu równań całkowych (1)-(2) otrzymano układ liniowych równań algebraicznych postaci:

$$\sum_{k=1}^n a_{mk}q(\xi_k) + \text{Im} \sum_{k=1}^{\bar{n}} [b_{1mk}u(\bar{\xi}_k) + c_{1mk}\overline{u(\bar{\xi}_k)}] = F(\eta_m), \quad (6)$$

$$m = 1, \dots, n-1,$$

$$\sum_{k=1}^{\bar{n}} [b_{2mk}u(\bar{\xi}_k) + c_{2mk}\overline{u(\bar{\xi}_k)}] + \sum_{k=1}^n d_{mk}q(\xi_k) = p(\bar{\eta}_m), \quad (7)$$

$$m = 1, \dots, \bar{n}-1$$

$$\sum_{k=1}^n a_{nk}q(t_k) = A, \quad \sum_{k=1}^{\bar{n}} u(\bar{\xi}_k) = 0, \quad (8)$$

gdzie współczynniki określono jak niżej:

$$a_{mk} = -\frac{1}{n}(-1)^k \sqrt{1-\xi_k^2} \left\{ \frac{X_0}{1-\eta_m} \left[\frac{1}{1-\xi_k} - \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{R_0}{1+\eta_m} \left[\frac{(-1)^n}{1+\xi_k} + \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right] + X_3(\eta_m) + X_4(\eta_m) \frac{T_n(\eta_m)}{\eta_m - \xi_k} \right\}$$

$$a_{nk} = \frac{\pi}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} \left[w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0}{1-\xi_k} + (-1)^{k+n} \frac{R_0}{1+\xi_k} \right]$$

$$b_{1mk} = \frac{1}{\bar{n}} K_1(\bar{\xi}_k, \eta_m) \quad b_{2mk} = \frac{1}{\bar{n}} K_2(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_m)$$

$$c_{1mk} = \frac{1}{\bar{n}} L_1(\bar{\xi}_k, \eta_m) \quad c_{2mk} = \frac{1}{\bar{n}} L_2(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_m)$$

$$d_{mk} = \frac{1}{n} \sqrt{1-\xi_k^2} [M(\xi_k, \bar{\eta}_m)w(\xi_k) - (-1)^k \frac{X_0 M(1, \bar{\eta}_m)}{1-\xi_k} + (-1)^{n+k} \frac{R_0 M(-1, \bar{\eta}_m)}{1+\xi_k}]$$

$$X_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{2\alpha}{\sin \pi \alpha} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right]$$

$$R_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{2\beta}{\sin \pi \beta} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n R(\xi_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \right]$$

$$X_1(x) = \frac{1}{2} \left[X(x) \cot \pi \alpha - \frac{1}{\sin \pi \alpha} - R(x) \cot \pi \beta + \frac{1}{\sin \pi \beta} \right]$$

$$X_3(x) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^n w(\xi_r) \sqrt{1-\xi_r^2} F(x, \xi_r, \xi_k),$$

$$X_4(x) = \varepsilon \rho w(x) + X_1(x),$$

$$X(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^\alpha, R(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\beta,$$

$$F(x, \xi_r, \xi_k) = \begin{cases} \frac{T_n(x)}{(x-\xi_k)(x-\xi_r)}, & x \neq \xi_k, x \neq \xi_r, \xi_k \neq \xi_r, \\ -\frac{n(-1)^r}{\sqrt{1-\xi_r^2}(\xi_r-x)} + \frac{T_n(x)}{(\xi_r-x)^2}, & x \neq \xi_k = \xi_r. \end{cases}$$

$$\xi_k, \bar{\xi}_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad \eta_m, \bar{\eta}_k = \cos \frac{\pi m}{n},$$

przy czym $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ jest wielomianem Chebysheva pierwszego rodzaju stopnia n .

W wyniku rozwiązywania układu równań liniowych (6)-(8) znajdujemy wartości funkcji $q(\xi)$ oraz $u(\xi)$ odpowiednio w węzłach ξ_k i $\bar{\xi}_k$. Wtedy za pomocą interpolacyjnego wielomianu Lagrange'a dla węzłów $\bar{\xi}_k$ znajdujemy wartości funkcji $u(\xi)$ w dowolnym punkcie

$$u(\xi) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k u(\bar{\xi}_k) \sqrt{1-\xi_k^2} \frac{T_n(x)}{\xi-\bar{\xi}_k}, \quad -1 \leq \xi \leq 1. \quad (9)$$

a w szczególności

$$u(1) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{\frac{1+\bar{\xi}_k}{1-\bar{\xi}_k}} u(\bar{\xi}_k). \quad (10)$$

Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny $\bar{\xi} = 1(K_{I,II}^+)$ wyznaczamy według wzoru (Savruk, 1981):

$$K_I - iK_{II} = -\sqrt{\pi a} |\omega'(1)| \frac{u(1)}{\omega'(1)}. \quad (11)$$

Podstawiając wartości $u(1)$ daną zależnością (10) i $\omega'(1) = -0.5l e^{i\varphi}$ do równania (11) otrzymujemy:

$$K_I - iK_{II} = -\sqrt{\frac{2\pi a}{l^*}} e^{-i\varphi} u^*(1). \quad (12)$$

przy czym $u^*(1) = u(1)/A$.

3. ANALIZA NUMERYCZNA I WYNIKI

Obliczenia przeprowadzono dla przypadku wciskania w powierzchnię półprzestrzeni stępła o płaskiej podstawie o długości $2a$. Założono także, że brzegi szczeliny są wolne od obciążeń ($N = T = 0$)

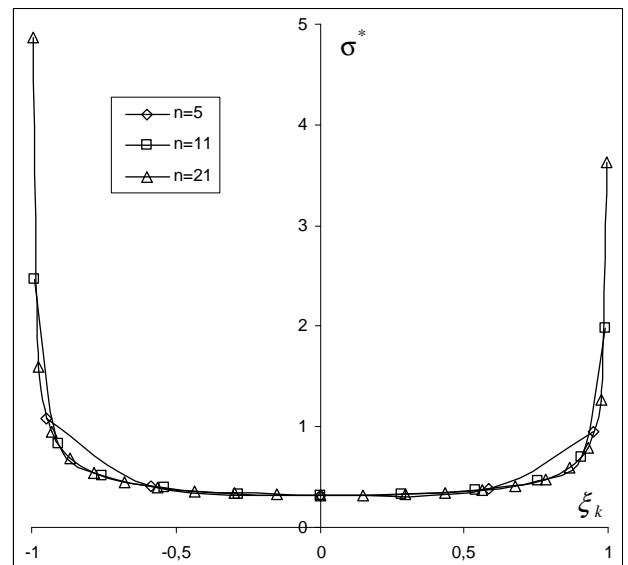
Bezwymiarowymi parametrami wejściowymi zagadnienia są $l^* = l/a$, $b^* = b/a$, oraz kąt nachylenia szczeliny φ i liczba węzłów kolokacji $n = \hat{n}$.

Na poniższych rysunkach przedstawiono wyniki

rozwiązania układu równań algebraicznych (6)-(8) ze względu na wartości naprężeń pod stępłem. Należy podkreślić, że prezentowane wykresy sporządzono w układach bezwymiarowych. Wartość naprężeń pod stępłem odniesiono do parametru A ($\sigma^* = \sigma/A$), podobnie obliczenia przeprowadzono dla unormowanych wartości $u^*(\bar{\xi}_k) = u(\bar{\xi}_k)/A$. Chcąc uzyskać bezwymiarowe wartości współczynników intensywności naprężeń K_i^* unormowano je w następujący sposób: $K_i^* = K_i A / \sqrt{a}$.

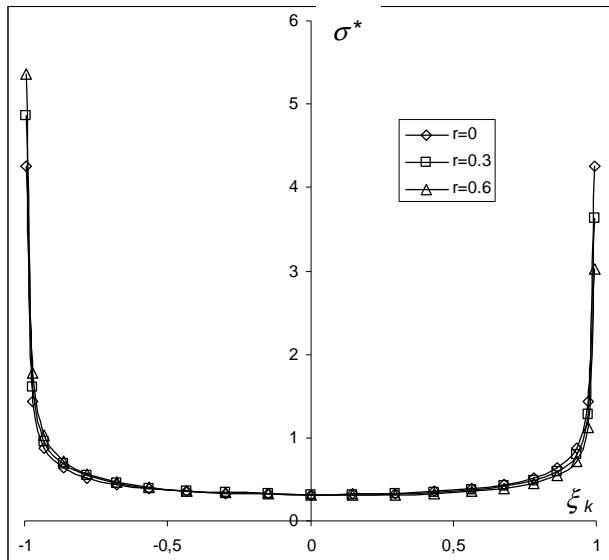
Rysunek 2 obrazuje zbieżność rozwiązania układu równań (6)-(8). Warto zauważyć, że w zasadzie dla liczby węzłów kolokacji wynoszącej 20 uzyskano już dobrą zbieżność. Na rysunku 3 pokazano wpływ wartości współczynnika tarcia na rozkład naprężeń kontaktowych. Łatwo zauważyć, że dla zagadnienia bez tarcia mamy niemal idealnie symetryczny rozkład naprężeń. Wzrost współczynnika tarcia wyraźnie powoduje zaburzenie tej symetrii. Wartości naprężeń w kierunku przesuwania się stępła maleją wraz ze wzrostem współczynnika tarcia.

Kolejne rysunki przedstawiają wyniki analizy parametrycznej obrazującej wpływ odległości szczeliny od osi stępła oraz jej długości na wartości współczynników intensywności naprężeń K_I i K_{II} . Łatwo zauważyć, że charakter obu rysunków jest zbliżony.

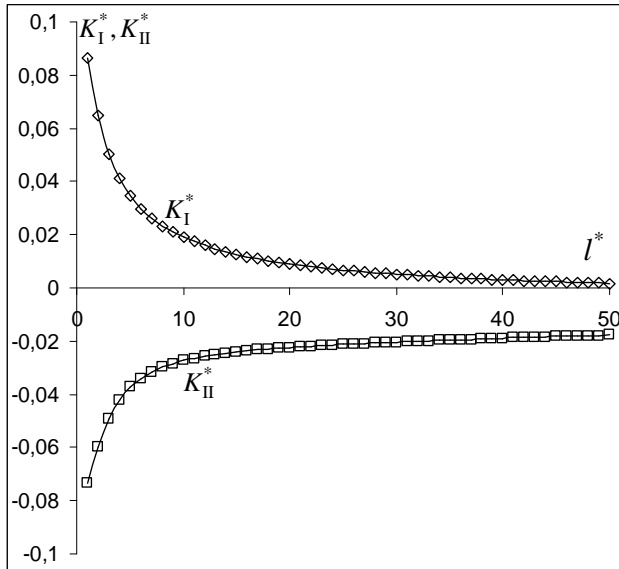


Rys. 2. Zbieżności rozwiązania układu równań w postaci rozkładów naprężeń pod stępłem dla różnych ilości węzłów kolokacji ($\nu = 0.3$, $\rho = 0.3$, $b^* = 5$, $l^* = 1$, $\varphi = 30^\circ$)

W tabeli 1 przedstawiono zależność współczynników intensywności naprężeń od kąta pochylenia szczeliny. Jesteśmy w stanie zaobserwować, że w raz ze wzrostem wartości kąta φ wartości współczynnika K_I wyraźnie wzrastają. W przypadku współczynnika K_{II} obserwujemy jego wzrost w przedziale od 0° do 45° , zaś po przekroczeniu wartości 45° - spadek wartości.



Rys. 3. Wpływ współczynnika tarcia na rozkład naprężeń pod stemplem ($n = 21, \nu = 0.3, b^* = 5, l^* = 1, \varphi = 30^\circ$)



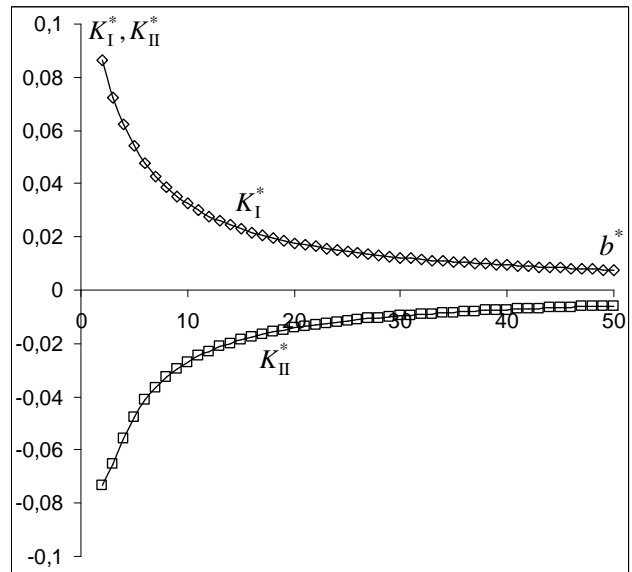
Rys. 4. Wpływ długości szczeliny na wartość współczynników intensywności naprężeń przed jej wierzchołkiem ($n = 21, \nu = 0.3, b^* = 2, \varphi = 45^\circ, \rho = 0.3$)

Tab. 1. Wartości współczynników intensywności naprężeń w funkcji kąta nachylenia szczeliny ($n = 21, \nu = 0.3, b^* = 5, l^* = 1, \rho = 0.3$)

$\varphi [^\circ]$	K_I^*	K_{II}^*
10	0.01996	-0.01880
30	0.04257	-0.02533
45	0.05414	-0.04756
60	0.07882	-0.02691
80	0.09648	-0.02018

Podsumowując należy stwierdzić, że przedstawiona w pracy metoda może być z powodzeniem stosowana do wyznaczania wartości współczynników intensywności naprężeń i rozkładów naprężeń kontaktowych w tego typu

zagadnieniach. Warto wspomnieć, że odpowiednia modyfikacja przedstawionych rozwiązań może pozwolić na analizę np. zagadnień w których występuje szczelina krzywoliniowa, układ szczelin czy też owalne otwory lub układy tych otworów.



Rys. 5. Wpływ odległości stempla od szczeliny na wartość współczynników intensywności naprężeń przed jej wierzchołkiem ($n = 21, \nu = 0.3, \varphi = 45^\circ, \rho = 0.3, l^* = 1$)

LITERATURA

1. Galin L.A. (1980), *Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity*, Nauka, Moscow, (in Russian).
2. Muskhelishvili N.I. (1962), *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. M.: Nauka, Moscow, (in Russian).
3. Savruk M.P. (1981), *Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks*, Naukova Dumka, Kiev, (in Russian).
4. Savruk M.P., Madenci E., Shkarayev S. (1999), Singular integral equations of the second kind with generalized Cauchy-type kernels and variable coefficients, *Int. J. Num. Methods in Engng.*, Vol. 45, No. 10, 1457-1470.
5. Savruk M., Yevtushenko A. (2005), Płaskie zagadnienie kontaktowe dla półprzestrzeni ze szczelinami z uwzględnieniem tarcia w strefie kontaktu, *Materiały III Symposium Mechniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji, Augustów 2005*, Wydaw. Polit. Białostockiej, 357-360.

PLANE CONTACT PROBLEM FOR SEMI-SPACE WITH CRACK TAKING INTO ACCOUNT FRICTION EFFECT

Abstract: The paper is concerned on effects produced by moving of punch pressed down to semi-space surface including single crack. Integral equations system represents general problem described by Savruk and Yevtushenko (2005) has been reduced to system of linear algebraic equations. Influence of friction coefficient on contact stress distribution and also dependence of crack angle and distance between crack and punch is discussed.