

# KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ WOKÓŁ OWALNEGO OTWORU

Andrzej KAZBERUK\*

[a.kazberuk@pb.edu.pl](mailto:a.kazberuk@pb.edu.pl)

\* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia rozciąganej płaszczyzny osłabionej otworem o kształcie owalnym z wierzchołkami o dowolnej krzywiźnie. Wykorzystano metodę jednolitego podejścia do rozwiązywania zagadnień koncentracji naprężeń wokół korbów ostrych i zaokrąglonych. Dla parametrów, charakteryzujących geometrię otworu, zmieniających się w bardzo szerokim zakresie obliczono współczynniki koncentracji naprężeń w wierzchołku owalu. Wykorzystując zależność wiążącą współczynniki koncentracji naprężeń ze współczynnikami intensywności naprężeń, wyznaczono wartości współczynników intensywności dla odpowiedniego otworu o wierzchołkach ostrych. Przeprowadzając porównanie wyników obliczeń ze znanym rozwiązaniem analitycznym dla otworu soczewkowego, wykazano nie tylko dużą precyzję zastosowanej metody lecz również jej uniwersalność i efektywność. Otrzymane rezultaty posłużyły do skonstruowania przydatnych w praktyce inżynierskiej wzorów aproksymacyjnych służących do oszacowania wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku soczewki oraz koncentracji naprężeń w wierzchołku otworu owalnego.

## 1. WPROWADZENIE

Geometryczne nieciągłości występujące w elementach konstrukcyjnych wywołują, jak wiadomo, lokalne zaburzenia pola naprężeń. W wierzchołkach ostrych koncentratorów, naprężenia zgodnie z liniową teorią sprężystości, osiągają wartości nieskończone. W przypadku korbów zaokrąglonych dochodzi również do znacznej koncentracji naprężeń w otoczeniu karbu. Pomimo, że naprężenia te są skończone, trudności rachunkowe przy rozwiązywaniu tego typu zagadnień są często większe niż w przypadku występowania osobliwości pola naprężeń. Wiedza o rozkładzie pola naprężeń w ciele sprężystym w pobliżu koncentratorów jest niezbędna w procesie prawidłowego projektowania, ponieważ nawet w przypadku, gdy pole naprężeń nie zawiera osobliwości to wartości maksymalnych naprężeń mogą znacznie przekroczyć nośność materiału elementu konstrukcyjnego.

W pracy zaprezentowano zastosowanie metody przedstawionej w pracach Savruka i Kazberuka z 2006 i 2007, do rozwiązania problemu koncentracji naprężeń wokół owalnego otworu osłabiającego rozciąganą płaszczyznę sprężystą. Do obliczenia naprężeń wokół otworu wykorzystano metodę osobliwych równań całkowych (Savruk, 1981). Stosując zależność pomiędzy współczynnikami intensywności oraz koncentracji naprężeń dla korbów o dużej krzywiźnie wierzchołków wyznaczono wartości współczynników intensywności naprężeń w odpowiednim otworze o wierzchołkach ostrych. Fakt istnienia rozwiązań analitycznych zagadnienia rozciąganego otworu w kształcie soczewki umożliwił przeprowadzenie porównań i oceny efektywności oraz dokładności metody. Korzystając z otrzymanych wyników zaproponowano wzory przydatne w praktyce inżynierskiej.

## 2. ZALEŻNOŚĆ POMIĘDZY WSPÓLCZYNNIKAMI INTENSYWNOŚCI I KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ DLA KARBÓW OSTRYCH I ZAOKRĄGLONYCH

Wielkość naprężeń w wierzchołku karbu o kącie rozwarcia  $2\beta$  zaokrąglonego krzywą o niewielkim promieniu  $\rho$  określa wzór

$$\sigma_{\max} = \frac{K_I^V}{\sqrt{2\pi}} R_I \rho^{-\lambda} \quad (1)$$

gdzie  $K_I^V$  to uogólniony współczynnik intensywności naprężeń dla odpowiedniego karbu ostrego, a  $R_I$  nazywany jest współczynnikiem wygładzenia naprężeń (Benthem 1987). Dolne indeksy  $I$  odnoszą się do typu pola naprężeń wywołanego przez obciążenia rozciągające w otoczeniu wierzchołka karbu. Wykładnik osobliwości  $\lambda$  przyjmuje się jako najmniejszy dodatni pierwiastek równania charakterystycznego

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad \alpha = \pi - \beta \quad (2)$$

Pierwszą zależnością typu (1), szeroko stosowaną w praktyce inżynierskiej do oszacowania wielkości maksymalnych naprężeń normalnych  $\sigma_{\max}$  w wierzchołku wąskiego U-podobnego karbu poprzez współczynnik intensywności naprężeń  $K_I$ , w wierzchołku odpowiedniej szczeliny był wzór

$$\sigma_{\max} = 2K_I / \sqrt{\pi\rho}, \quad (3)$$

występujący w wielu publikacjach m.in. Creagera i Parisa (1967) i Neubergera (1977). Łatwo go uzyskać korzystając ze znanego rozwiązania zadania o koncentracji naprężeń wokół otworu eliptycznego (np. Savruk 1989). Wynika

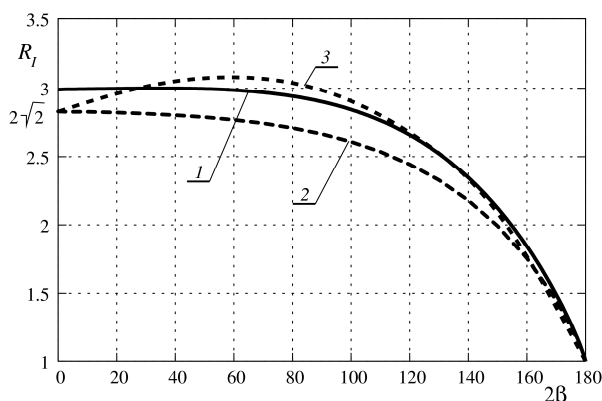
z niego, że dla karbu o kącie rozwarcia  $2\beta=0$  współczynnik  $R_I$  ma wartość  $2\sqrt{2}$ . Do niedawna uważano, że wzór (3) jest dokładny dla karbów U-podobnych. Dopiero ostatnio przeprowadzone badania (Savruk, Kazberuk 2006) dowiodły, że relacja pomiędzy współczynnikami intensywności a koncentracji naprężeń powinna uwzględniać nie tylko wielkość promienia krzywizny w wierzchołku karbu, jak do tej pory sądzono, lecz również kształt karbu w otoczeniu wierzchołka. Uwzględnienie tego faktu prowadzi do wartości  $R_I=2.989$  dla zagadnienia tzw. szczeliny fizycznej ( $2\beta=0$ ).

W pracy (Savruk, Kazberuk 2006) zaproponowano następującą formułę aproksymacyjną na wyznaczanie wartości współczynnika wygładzenia naprężeń  $R_I$ . Wzór dotyczy karbów zaokrąglonych łukiem kołowym i umożliwia oszacowanie  $R_I$  z błędem nie przekraczającym 0.1% dla  $\beta < 165^\circ$ :

$$R_I = \frac{1 + 28.75\gamma + 98.04\gamma^2 - 102.1\gamma^3 + 47.4\gamma^4 - 8.436\gamma^5}{1 + 20.71\gamma}, \quad (4)$$

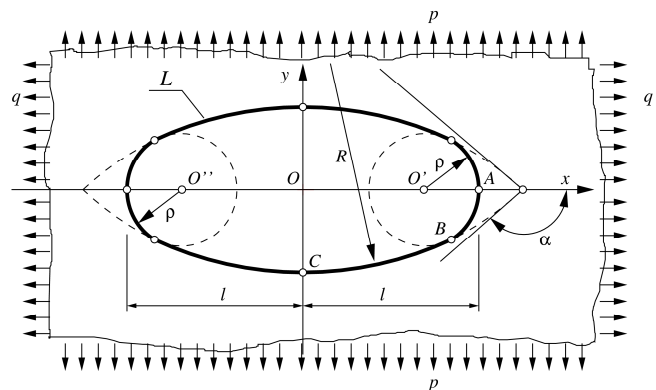
gdzie  $\gamma = \pi/2 - \beta$ .

Wzory postaci (1) publikowało wielu autorów, m. in. Benthem 1987, Lazzarin, Tovo 1996, Strandberg 1999, Filippi i in. 2002, obliczając wartości współczynnika wygładzenia naprężeń bądź jego analogów. Niektóre z nich przedstawiono na rys.1 porównując z przebiegiem funkcji (4). W celu rozwiązania zagadnienia własnego (Williams 1952) na drodze analitycznej bądź numerycznej, odwzorowywano kształt nieskończonego klina wykorzystując różne krzywe gładkie mające w otoczeniu wierzchołka zmienny promień krzywizny (karby paraboliczne, hiperboliczne). Próby wykorzystania ich zależności do obliczeń współczynników intensywności naprężeń prowadziły do wartości o niewystarczającej dokładności. Z kolei użycie bardzo specyficznych funkcji do opisu karbu lub otworu o dowolnej geometrii stwarza znaczne trudności matematyczne. Stąd wyniknęła konieczność opracowania własnej zależności dla najbardziej oczywistego sposobu zaokrąglenia wierzchołka karbu.



**Rys. 1.** Współczynnik wygładzenia naprężeń  $R_I$  w funkcji kąta  $\beta$  dla różnych krzywych zaokrąglających wierzchołek karbu; 1- Savruk, Kazberuk 2006, 2- Benthem 1987, 3- Filippi, Lazzarin, Tovo 2002

### 3. KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ WOKÓŁ OWALNEGO OTWORU



**Rys. 2.** Owalny otwór w rozciąganej płaszczyźnie

Rozważa się nieograniczoną płaszczyznę sprężystą osłabioną owalnym otworem (rys. 2). Kontur brzegu  $L$  składa się z łuków kołowych o promieniach  $R$  przecinających się pod kątem  $\alpha$ . Wierzchołki w ten sposób utworzonej soczewki zaokrąglono łukami o promieniu  $\rho$ . Stosunki wielkości tych promieni do połowy rzutu długości owalu na oś  $x$  określają parametry  $\varepsilon = \rho/l$  oraz  $\vartheta = R/l$ . Zakłada się, że brzeg otworu (gładki kontur  $L$ ) jest wolny od obciążeń zewnętrznych. Płaszczyzna poddana jest rozciąganiu naprężeniami  $\sigma_x^\infty = q$ ,  $\sigma_y^\infty = p$  w nieskończoności.

Potencjały zespolone naprężeń (Muskhelishvili, 2003) przyjęto w następującej postaci:

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z), \quad (5)$$

gdzie  $\Phi_0(z)$  i  $\Psi_0(z)$  – funkcje opisujące jednorodny stan naprężeń w płaszczyźnie sprężystej

$$\Phi_0(z) = (p+q)/4, \quad \Psi_0(z) = (p-q)/2, \quad (6)$$

a  $\Phi(z)$  i  $\Psi(z)$  – określają zaburzenie naprężeń. Poszukuje się przedstawień całkowych potencjałów  $\Phi(z)$  i  $\Psi(z)$  w następującej postaci (Savruk 1981):

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi\kappa^2} \int_L \left[ t g'(t) dt - t \overline{g'(t)} dt \right] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_L \left[ \frac{g'(t)}{t-z} dt - \frac{\overline{t g'(t)}}{(t-z)^2} dt \right] \end{aligned} \quad (7)$$

Wtedy warunek graniczny na brzegu  $L$  przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \sigma_n + i\tau_{ns} &= p(t) \\ &= - \left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[ t \overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\}, \quad t \in L, \quad (8) \end{aligned}$$

a w nieskończoności naprężenia dążą zera.

Tak sformułowane zagadnienie brzegowe sprowadza się do rozwiązywania osobliwego równania całkowego (Savruk, 1981)

$$\frac{1}{\pi} \int_L [\tilde{K}(t, t')g'(t)dt + \tilde{L}(t, t')\overline{g'(t)}dt] = p(t'), \quad t' \in L, \quad (9)$$

którego jądra mają postać

$$\begin{aligned} \tilde{K}(t, t') &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-t'} + \frac{\overline{dt'}}{dt} \left( \frac{1}{t-t'} - \frac{\bar{t}}{(\bar{t}')^2} \right) \right) + \frac{1}{l} \cdot \frac{ds'}{dt'}, \\ \tilde{L}(t, t') &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-t'} - \frac{\overline{dt'}}{dt} \left( \frac{t-t'}{(t-t')^2} - \frac{\bar{t}}{(\bar{t}')^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie  $s'$  jest odciętą łukową punktu  $t'$  na brzegu  $L$ . W jądrach (8) obecne są dodatkowe składniki tworzące w równaniu (9) zerowe funkcjonały zapewniające w przypadku zamkniętego konturu  $L$  jednoznaczność rozwiązania równania całkowego dla dowolnej prawej strony.

Uwzględniając symetrię konturu  $L$  względem osi  $x$  i  $y$ , równanie parametryczne brzegu zapisano w postaci

$$t = l\omega(\xi) = l \begin{cases} \omega_0(\xi), & 0 \leq \xi < \pi/2, \\ -\omega_0(\pi - \xi), & \pi/2 \leq \xi < \pi, \\ -\omega_0(\xi - \pi), & \pi \leq \xi < 3\pi/2, \\ \omega_0(2\pi - \xi), & 3\pi/2 \leq \xi < 2\pi, \end{cases} \quad (11)$$

gdzie funkcja  $\omega_0(\xi)$

$$\omega_0(\xi) = \begin{cases} (1 - \varepsilon) + \varepsilon \cos \frac{\xi c}{\varepsilon} - i \sin \frac{\xi c}{\varepsilon}, & 0 \leq \xi \leq \xi_B, \\ \vartheta \cos \left( c \frac{\xi - \xi_B}{\vartheta} + \theta_B \right) + \\ + i \left[ \cos \beta - \sin \left( c \frac{\xi - \xi_B}{\vartheta} + \theta_B \right) \right], & \xi_B \leq \xi \leq \pi/2, \end{cases}$$

opisuje kontur  $L$  leżący w czwartej ćwiartce układu współrzędnych (kierunek obejścia konturu brzegu jest zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara). Znaczenie użytych oznaczeń objaśniono poniżej

$$\xi_B = \frac{\varepsilon \theta_B}{c}, \quad c = 2\varepsilon \frac{\theta_B}{\pi} + \vartheta \left( 1 - 2 \frac{\theta_B}{\pi} \right), \quad \theta_B = \arctan \frac{\vartheta \cos \beta}{1 - \varepsilon}$$

Długość krzywej  $AC$  jest równa  $l_{AC} = \pi c / 2$ .

Dokonując koniecznej zamiany zmiennych

$$t = l\omega(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi; \quad t' = l\omega(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi$$

równanie całkowe (8) zapisuje się w postaci kanonicznej

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [M(\xi, \eta)u(\xi) + N(\xi, \eta)\overline{u(\xi)}] d\xi = p(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi,$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$M(\xi, \eta) = l\tilde{K}(\omega(\xi), \omega(\eta)), \quad N(\xi, \eta) = l\tilde{L}(\omega(\xi), \omega(\eta));$$

$$u(\xi) = g'(\omega(\xi))\omega'(\xi), \quad p(\eta) = p(\omega(\eta)).$$

Poszukiwana  $2\pi$ -okresowa ciągła funkcja  $u(\xi)$  ma quasi-osobliwości w otoczeniu wierzchołków rombu, co komplikuje uzyskanie dostatecznie dokładnego rozwiązania dla małych wartości promienia  $\rho$ . Ostatnio w celu poprawienia dokładności rozwiązań tego typu równań stosuje się różnorodne nieliniowe odwzorowania zmiennych prowadzące do zagęszczenia węzłów kwadratur całkowania i węzłów kolokacji w otoczeniu wierzchołków otworu. W rozważanym przypadku zastosowano następującą zamianę zmiennych (Johnston 1999)

$$\begin{aligned} \xi &= G(\tau) = \tau - (1/2) \sin 2\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi; \\ \eta &= G(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Funkcja  $G(\tau)$  jednoznacznie odwzorowuje odcinek  $\tau \in [0, 2\pi]$  w odcinek  $\xi \in [0, 2\pi]$ .

W rezultacie uzyskuje się równanie całkowe postaci

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [M(\xi, \eta)u^*(\tau) + N(\xi, \eta)\overline{u^*(\tau)}] G'(\tau) d\tau = p^*(\theta),$$

gdzie  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  oraz  $u^*(\tau) = u(G(\tau))$ ,  $p^*(\tau) = p(G(\theta))$ .

Dyskretnym analogiem równania całkowego jest algebraiczny układ równań liniowych (Savruk, 1981)

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{4n} [M(\xi_k, \eta_m)u^*(\tau_k) + N(\xi_k, \eta_m)\overline{u^*(\tau_k)}] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), \quad (12)$$

gdzie  $m = \overline{1, 4n}$  oraz

$$\begin{aligned} \xi_k &= G(\tau_k), \quad \tau_k = \frac{\pi(2k-1)}{4n}, \quad k = \overline{1, 4n}; \\ \eta_m &= G(\theta_m), \quad \theta_m = \frac{2\pi(m-1)}{4n}, \quad m = \overline{1, 4n}. \end{aligned}$$

Uwzględniając symetrię zadania względem osi  $Ox$  i  $Oy$ , rząd układu równań (12) zostaje zmniejszony czterokrotnie. Nakładając warunki wynikające z symetrii na poszukiwaną postać funkcji rozwiązania

$$u^*(2\pi - \tau) = \overline{u^*(\tau)}, \quad u^*(\pi - \tau) = -\overline{u^*(\tau)}, \quad (13)$$

a także warunki zerowania się naprężeń stycznych w punktach leżących na osiach symetrii, otrzymuje się układ  $n$  zespolonych równań algebraicznych

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m)u^*(\tau_k)] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m = 1, \\ \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m)u^*(\tau_k) \\ + N^*(\xi_k, \eta_m)\overline{u^*(\tau_k)}] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m = \overline{2, \dots, n}, \\ \frac{1}{n} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n [M^*(\xi_k, \eta_m)u^*(\tau_k)] G'(\tau_k) = p^*(\theta_m), & m = n+1 \end{cases} \quad (14)$$

dla  $n$  niewiadomych wartości funkcji  $u^*(\tau_k)$  ( $k = \overline{1, \dots, n}$ ).  
Tutaj:

$$M^*(\xi_k, \eta_m) = M(\xi_k, \eta_m) - N(\pi - \xi_k, \eta_m) - M(\pi + \xi_k, \eta_m) + N(2\pi - \xi_k, \eta_m),$$

$$N^*(\xi_k, \eta_m) = N(\xi_k, \eta_m) - M(\pi - \xi_k, \eta_m) - N(\pi + \xi_k, \eta_m) + M(2\pi - \xi_k, \eta_m).$$

Należy zauważyć, że wartości funkcji  $p^*(\theta)$  w węzłach  $\theta_1=0$  i  $\theta_{n+1}=\pi/2$  są rzeczywiste;

Po uzyskaniu rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych (14) można wyznaczyć zespolone potencjały naprężeń (7), określające stan naprężeń i odkształceń w całej płaszczyźnie sprężystej. Obliczenie wartości naprężenia normalnego  $\sigma_s$  w punktach leżących na brzegu otworu przeprowadza się korzystając bezpośrednio ze znalezionej funkcji  $u^*(\tau)$  (Savruk i inni 1989)

$$\sigma_s(t) = 4\text{Re}[\Phi_0(t) + \Phi^+(t)] = 4\text{Re}\Phi_0(t) - 4\text{Im}g'(t) =$$

$$= 4\text{Re}\Phi_0(t) - 4\text{Im}[u(\xi)/\omega'(\xi)] =$$

$$= 4\text{Re}\Phi_0(t) - 4\text{Im}[u^*(\tau)/\omega'(\xi)], \quad t \in L.$$

Współczynnik koncentracji naprężeń w wierzchołku  $A$  (rys.1) otworu oblicza się ze wzoru

$$k_A = -4\text{Im}[u^*(0)/\omega'(0)],$$

przy czym wartość  $u^*(0)$  wyznacza się korzystając z wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a (patrz np. Savruk i inni 1989)

$$u^*(\tau) = \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{4n} u^*(\tau_k) \sin[2n(\tau - \tau_k)] \cot\left(\frac{\tau - \tau_k}{2}\right).$$

Uwzględniając warunki symetrii (13), otrzymano

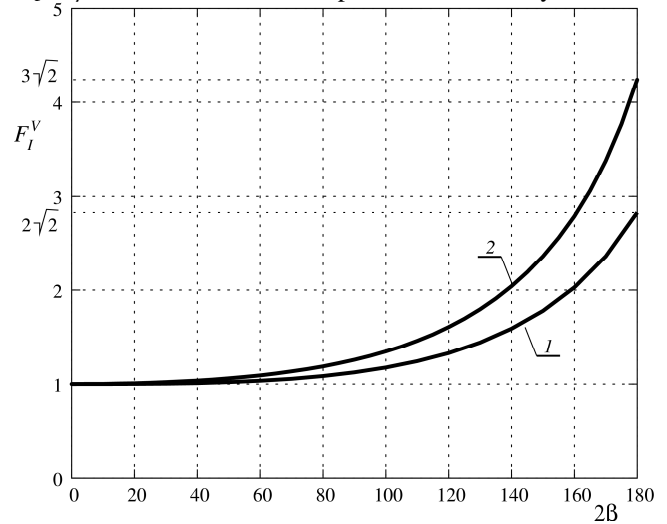
$$u^*(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sin \tau_k} \text{Re} u^*(\tau_k).$$

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch przypadków obciążenia – jednokierunkowego rozciągania ( $q=0$ ) w kierunku osi  $Oy$  (prostopadle do dłuższej przekątnej owalu) oraz wszechstronnego ( $q=p$ ) rozciągania. Kąt rozwarcia wierzchołka soczewki  $2\beta$  określany w wierzchołku  $A$  zmieniano w przedziale od  $0^\circ$  do  $180^\circ$  uzyskując stabilne rozwiązania dla  $\varepsilon=\rho/l \geq 0,0001$ .

Uogólnione współczynniki intensywności naprężeń  $K_I^V$  w ostrym narożu otworu obliczono ze wzoru

$$K_I^V = \left(\sqrt{2\pi}/R_I\right) \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^\lambda (\sigma_s)_{\max}. \quad (15)$$

Przebieg wartości bezwymiarowego współczynnika intensywności naprężeń  $F_I^V = K_I^V / (\rho l^\lambda \sqrt{\pi})$  w funkcji kąta  $2\beta$  w wierzchołku owalu przedstawiono na rys. 3.



**Rys. 3.** Uogólniony bezwymiarowy współczynnik intensywności naprężeń  $F_I^V$  w funkcji kąta wierzchołkowego  $2\beta$  owalu: 1 - wszechstronne rozciąganie, 2 - jednokierunkowe rozciąganie.

Porównano obliczone współczynniki intensywności naprężeń z rozwiązaniami analitycznymi. Korzystając z zależności przytaczanych w monografiach Savina z 1968 lub Morozova z 1984 roku, w przypadku jednokierunkowego rozciągania, naprężenia w ostrym wierzchołku soczewki oblicza się z następującego wzoru:

$$\sigma_{\theta\theta}(r,0) \Big|_{r \rightarrow 0} = pc_1(\alpha) \left(\frac{r}{2l}\right)^{-\lambda} + o\left(\left(\frac{r}{2l}\right)^{-\lambda}\right). \quad (16)$$

Podstawiając wyrażenie (16) do definicji współczynnika intensywności naprężeń wg Grossa i Mendelzona (1972) otrzymano

$$F_I^V = \frac{K_I^V}{\rho l^\lambda \sqrt{\pi}} = 2^{\lambda+1/2} c_1(\alpha), \quad (17)$$

gdzie

$$c_1(\alpha) = \frac{\pi}{2\alpha \cos(2(1-\lambda)\alpha) + \sin 2\alpha} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2K}{\lambda} [(1-\lambda)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2((1-\lambda)\alpha)] + \right.$$

$$\left. - (1-\lambda)^2 (2-\lambda) \sin^2 \alpha \right\}$$

a współczynnik  $K$  oblicza się z następującej zależności całkowitej:

$$K = \frac{1 - 2\sin^2 \alpha \int_0^\infty \frac{\alpha d\tau}{\sinh 2\tau\alpha + \tau \sin 2\alpha}}{4 \int_0^\infty \frac{\sinh^2 \tau\alpha - \tau^2 \sin^2 \alpha}{\tau(\tau^2 + 1)(\sinh 2\tau\alpha + \tau \sin 2\alpha)} d\tau}.$$

Otrzymane różnice w wynikach współczynników intensywności naprężeń obliczonych ze wzorów (15) oraz (17) we wszystkich analizowanych przypadkach rozwarcia wierzchołka soczewki nie przekroczyły 0.1%.

Ponieważ procedura obliczania współczynników intensywności naprężeń ze wzoru (17) jest dosyć kłopotliwa, opracowano wzory przybliżone aproksymując poszukiwane wielkości wielomianami 5-tego stopnia w funkcji kąta rozwarcia wierzchołka. Oznaczając

$$c_1(\alpha) = c_2(\gamma)$$

gdzie  $\gamma = \lambda\alpha$  otrzymano przy jednokierunkowym rozciąganiu

$$c_2(\gamma) = 3 - 5.53\gamma + 6.06\gamma^2 - 4.31\gamma^3 + 1.78\gamma^4 - 0.303\gamma^5 \quad (18)$$

oraz

$$c_2(\gamma) = 2 - 3.14\gamma + 3.18\gamma^2 - 2.21\gamma^3 + 0.954\gamma^4 - 0.173\gamma^5 \quad (19)$$

w przypadku wszechstronnego rozciąganiu płaszczyzny. Błąd oszacowania współczynnika intensywności naprężeń w przedziale  $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$  ze wzorów (18) i (19) nie przekracza 0.5%.

Wartość wykładnika osobliwości (2) można przybliżyć następującą zależnością:

$$\lambda \approx 0.5 - 0.0976143\beta^{3.57694}$$

z błędem nie przekraczającym 0.5%.

Przykładowe współczynniki intensywności naprężeń przy jednokierunkowym i wszechstronnym rozciąganiu oraz wartości parametrów  $R_I$  i  $\lambda R_I$  podano w tablicy 1.

Na podstawie uzyskanych wyników numerycznych uwzględniając przedstawione wcześniej związki współczynników koncentracji i intensywności naprężeń w wierzchołkach wycięć ostrych i zaokrąglonych skonstruowano zależność aproksymacyjną postaci

$$k_A = a + 2[1 - b \tanh(c \ln \varepsilon)]\varepsilon^{-\lambda}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1 \quad (20)$$

Otrzymana formuła pozwala na oszacowanie wartości współczynnika koncentracji naprężeń w wierzchołku owalu z błędem nie przekraczającym 0,5% w całym zakresie zmienności parametru  $\varepsilon$ . Stałą  $b$  wyznacza się z równości

$$b = \frac{K_I^V R_I l^{-\lambda}}{2p\sqrt{2\pi}} - 1 = F_I^V R_I / (2\sqrt{2}) - 1 \quad (21)$$

wynikającej z zależności (1) i (20). Stała  $c$  obliczana jest metodą najmniejszych kwadratów przy użyciu nieliniowego algorytmu Marquardt-Levenberga. Wartości stałych  $b$  i  $c$  dla jednokierunkowego i wszechstronnego rozciągania dla kilku reprezentatywnych wartości kąta  $2\beta$  przedstawiono w tablicy 2.

**Tab. 1.** Wartości wykładnika osobliwości  $\lambda$ , współczynnika wygładzenia naprężeń  $R_I$  oraz bezwymiarowego, uogólnionego współczynnika intensywności naprężeń  $F_I^V$  (jedno- i wielokierunkowe rozciąganie otworu owalnego), dla wybranych kątów rozwarcia karbu  $2\beta$

$2\beta$	$\lambda$	$R_I$	$F_I^V$	
			$q = 0$	$q = p$
0°	0.5000	2.989	1.000	1.000
15°	0.4998	2.995	1.005	1.000
30°	0.4986	2.999	1.020	1.004
45°	0.4950	2.997	1.048	1.015
60°	0.4878	2.986	1.096	1.035
75°	0.4753	2.957	1.161	1.069
90°	0.4555	2.901	1.260	1.125

**Tab. 2.** Wartości współczynników we wzorze aproksymacyjnym (20) dla wybranych kątów rozwarcia karbu  $2\beta$

$2\beta$	$q = 0, a = 1$		$q = p, a = 0$	
	$b$	$c$	$b$	$c$
0°	0.0568	0.3718	0.0568	0.6502
15°	0.0644	0.2859	0.0591	0.5991
30°	0.0816	0.2245	0.0646	0.5658
45°	0.1108	0.1963	0.0757	0.5377
60°	0.1571	0.1895	0.0927	0.5331
75°	0.2137	0.2070	0.1176	0.5467
90°	0.2923	0.2281	0.1535	0.5648

#### 4. PODSUMOWANIE

W prezentowanej pracy, metoda jednolitego podejścia do problemów koncentracji naprężeń wokół karbów ostrych i zaokrąglonych (Savruk, Kazberuk 2006, 2007) została zastosowana do rozwiązania zagadnienia rozciąganej płaszczyzny osłabionej otworem o owalnym kształcie. Dla parametrów, charakteryzujących geometrię otworu, zmieniających się w bardzo szerokim zakresie, obliczono współczynniki koncentracji naprężeń w wierzchołku owalu. Wykorzystując zależność wiążącą współczynniki koncentracji naprężeń ze współczynnikami intensywności, wyznaczono wartości współczynników intensywności dla odpowiedniego otworu o wierzchołkach ostrych. Przeprowadzając porównanie wyników obliczeń ze znanym rozwiązaniem analitycznym dla otworu soczewkowego, wykazano nie tylko dużą precyzję zastosowanej metody lecz również jej uniwersalność i efektywność. Wykazano również, że wartości współczynników wygładzenia naprężeń (4) określone dla karbów o krawędziach prostych, zachowują ważność dla innych geometrii brzegu (łuk kołowy). Otrzymane rezultaty umożliwiły zbudowanie zwartych wzorów aproksymacyjnych służących do oszacowania wartości współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku soczewki, które mogą być z powodzeniem stosowane w praktyce inżynierskiej. Przedstawiono również zależności aproksymujące wielkość koncentracji naprężeń w wierzchołku otworu owalnego dla kilku reprezentatywnych wartości kąta rozwarcia przy dowolnym promieniu zaokrąglenia wierzchołka otworu.

## LITERATURA

1. **Benthem J.P.** (1987), Stresses in the region of rounded corners, *Int. J. Solids Struct.*, **23**, 239-252.
2. **Creager M., Paris P.C.** (1967), Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, // *Int. J. Fract. Mech.*, **3**, 247-252.
3. **Filippi S., Lazzarin P., Tovo R.** (2002), Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *Int. J. Solids Struct.*, **39**, 4543-4565.
4. **Gross B., Mendelson A.** (1972), Plane elastostatic analysis of V-notched plates, *Int. J. Fract. Mech.*, **8**, 267-276.
5. **Johnston P.R.** (1999), Application of sigmoidal transformations to weakly singular and near-singular boundary element integrals, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **45**, 1333-1348.
6. **Lazzarin P., Tovo R.** (1996), A unified approach to the evaluation of linear elastic stress field in the neighbourhood of crack and notches, *Int. J. Fract.*, **78**, 3-19.
7. **Morozov N.F.** (1984), *Matematičeskie voprosy teorii trešin*, Nauka, 256s.
8. **Muskhelishvili N.I.** (2003) Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, *Springer*, 768 p.
9. **Neuber H.** (1977), Die halbelliptische Kerbe mit Riss als Beispiel zur Korrelation von Mikro- und Makrospannungskonzentrationen, *Ing.-Arch.*, **46**, 389-399.
10. **Pilkey W.D.** (1997), *Peterson's Stress Concentration Factors*, 2 ed., 544 p.
11. **Savin G.N.** (1968) Raspredelenie naprâženij około otvierstij, *Nauk. Dumka*, 888 s.
12. **Savruk M.P.** (1981) Dvumernye zadači yprugosti dlâ tel s Teresinami, *Nauk. Dumka*, 324 s.
13. **Savruk M.P.** (1988) Koëfficienty intensivnosti naprâženij v telah s trešinami, *Meh. razrušeniâ i pročnost' materialov, Sprav. posobie* pod red. V.V.Panasûka, *Nauk. dumka*, 620 s.
14. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2006), Zaležnist' miž koëfficientamy intensyvnosti ta koncentracij napružen' dlâ gostryh i zakruglenyh kutovyh vyriziv, *Fiz.-him. mehanika materialiv*, **42**, 56-65.
15. **Savruk M.P., Kazberuk A.** (2007), Edinyj podhod k rešeniu zadač o koncentracii naprâženij około ostryh i zakruglennyh uglovyh vyrezov, *Prikladnaâ mehanika*, **43**, 70-87.
16. **Savruk M.P., Osiv P.N., Prokopčuk I.V.** (1989), Čislennyj analiz v ploskih zadačah teorii trešin, *Nauk. dumka*, 248 s.
17. **Strandberg M.** (1999), A numerical study of the elastic stress field arising from sharp and blunt V-notches in a SENT-specimen, *Int. J. Fract.*, **100**, 329-342.
18. **Uflând Â.S.** (1967), Integral'nyê prëobrazobaniâ v zadačah teorii uprugosti, *Nauka*, 2-ed, 402s.
19. **Williams M.L.** (1952), Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *J. Appl. Mech.*, **19**, 526-530.

## STRESS CONCENTRATION AROUND OVAL HOLE

**Abstract:** In the paper the application of the unified approach method to solve problems of stress concentration around sharp and rounded oval hole in elastic plane was presented. The stress field distribution was obtained for various vertex angles and curvature radii using singular integral equation method. The method based on passage to the limit (when curvature radius tends to zero), was used to obtain stress intensity factor at the vertex of sharp lens hole in a plane under tension. Accuracy of the new method was analyzed by comparing numerical results of stress intensity factors to well known analytical solution. The approximation formulas for estimation of stress intensity and concentration factors were presented.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr 4T07A03028.