

PROGNOZOWANIE PĘKANIA ELEMENTÓW ZE SZCZELINAMI I KARBAMI Z UWZGLĘDNIENIEM CZŁONÓW NIEOSOBLIWYCH ROZWIĄZANIA ASYMPTOTYCZNEGO

Adam ADAMOWICZ*, Andrzej SEWERYN*

* Katedra Mechaniki i Informatyki Stosowanej, Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

adamow@pb.edu.pl, seweryn@pb.edu.pl

Streszczenie: W pracy przedstawiono metodę elementów analitycznych, służącą do wyznaczania wartości parametrów opisujących osobliwe pola naprężeń w pobliżu wierzchołków ostrych naroży. Wykorzystano ją do wyznaczenia klasycznych i uogólnionych współczynników intensywności naprężeń oraz współczynników stojących przy członach wyższych rzędów rozwinięcia asymptotycznego opisującego pole naprężeń w pobliżu wierzchołków szczelin oraz korbów trójkątnych. Otrzymane wyniki posłużyły do wyznaczenia warunków krytycznych pęknięcia przy zastosowaniu nielokalnego naprężeniowego kryterium kruche go pęknięcia.

1. WPROWADZENIE

Identyfikacja osobliwych pól naprężeń w pobliżu wierzchołków szczelin lub korbów jest nieodzownym elementem prognozowania pęknięcia. Sprowadza się ona do wyznaczenia wartości parametrów analitycznych opisujących te pola, a wykorzystywane do tego techniki obliczeniowe podzielić można na trzy grupy (Seweryn, 2003). W metodach asymptotycznych poszukiwane parametry analityczne wyznaczane są na podstawie porównania wyników obliczeń np. metody elementów skończonych z rozkładami teoretycznymi (He i inni, 1997). W metodach energetycznych wartości poszukiwanych parametrów wyznaczane są na podstawie zmian energii potencjalnej układu wywołanej zmiany wymiaru szczeliny (np. Yang i inni, 2001) lub wykorzystania twierdzenia o wzajemności prac (np. Sinclair i inni, 1984). Prezentowana w pracy metoda elementów analitycznych (Seweryn, Adamowicz, 2005), obok elementów hybrydowych (Lin, Tong, 1980) i metody węzłów analitycznych (Seweryn, 2002), należy do trzeciej grupy - metod bezpośrednich. Poszukiwane parametry analityczne znajdują się w wektorze niewiadomych zagadnienia metody elementów skończonych, obok składowych przemieszczeń węzłów elementów skończonych i wyznaczane są z układu równań równowagi sił węzłowych.

2. OSOBLIWE POLA NAPRĘŻEŃ

2.1. Rozkład pól naprężeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny

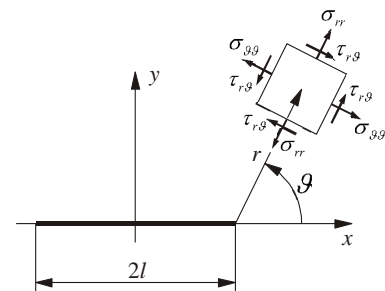
Opis osobliwego pola naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka szczeliny, w zagadnieniach liniowej teorii sprężystości może być przedstawiony w układzie współrzędnych biegunowych (r, ϑ) (rys. 1) w postaci rozwinięcia (Williams, 1957):

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{m_I} K_{Ik} r^{\frac{k}{2}-1} f_{ij}^{Ik}(\vartheta) + \sum_{k=1}^{m_{II}} K_{IIk} r^{\frac{k}{2}-1} f_{ij}^{IIk}(\vartheta), \quad (1)$$

$$u_i = \sum_{k=1}^{m_I} K_{Ik} r^{\frac{k}{2}} g_i^{Ik}(\vartheta) + \sum_{k=1}^{m_{II}} K_{IIk} r^{\frac{k}{2}} g_i^{IIk}(\vartheta) + u_{Ci},$$

gdzie K_{In} , $K_{II n}$ – współczynniki przy n -tym członie rozwiązania asymptotycznego, a K_{II} i K_{III} odpowiadają klasycznym współczynnikom intensywności naprężeń K_I i K_{II} :

$$K_I + iK_{II} = \lim_{\vartheta \rightarrow 0, r \rightarrow 0^+} \left[\sqrt{2\pi r} (\sigma_{\vartheta\vartheta} + i\tau_{r\vartheta}) \right]. \quad (2)$$



Rys. 1. Szczelina z biegunowym układem współrzędnych (r, ϑ)

Wyrażenia opisane wzorami (1) zostaną zapisane w postaci macierzowej:

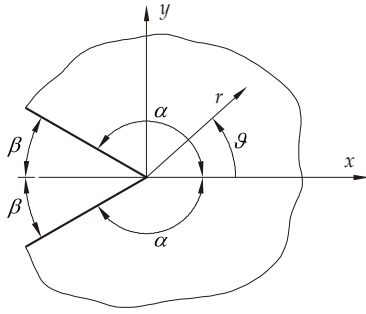
$$\sigma = \mathbf{f} \mathbf{u}_K, \quad \mathbf{u} = \mathbf{g} \mathbf{u}_K, \quad (3)$$

gdzie σ i \mathbf{u} są wektorami kolumnami zawierającymi odpowiednio składowe tensora naprężeń i składowe przemieszczeń, \mathbf{f} i \mathbf{g} są macierzami funkcji współrzędnych, a \mathbf{u}_K jest wektorem parametrów analitycznych, opisujących osobliwe pole naprężeń i przemieszczeń:

$$\mathbf{u}_K^T = \{K_I, K_{II}, \dots, K_{Im_1}, K_{II}, K_{II2}, \dots, K_{II m_2}, u_{Cr}, u_{C\vartheta}\}, \quad (4)$$

u_{Cr} i $u_{C\vartheta}$ są składowymi przemieszczenia wierzchołka szczeliny.

2.2. Rozkład pól naprężeń w otoczeniu wierzchołka karbu trójkątnego



Rys. 2. Karb trójkątny o kącie wierzchołkowym 2α

Osobliwe pole naprężeń i przemieszczeń w pobliżu wierzchołka ostrego karbu o kącie rozwarcia 2β w układzie współrzędnych biegunowych (r, ϑ) (rys. 2), może być przedstawione w postaci następującego rozwinięcia (Seweryn, Molski, 1996):

$$\sigma_{ij} = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{m_I} \frac{K_{In}^\lambda}{(2\pi r)^{1-\lambda_{In}}} A_{ij}(\vartheta, \lambda_{In}) + \sum_{n=1}^{m_{II}} \frac{K_{II n}^\lambda}{(2\pi r)^{1-\lambda_{II n}}} B_{ij}(\vartheta, \lambda_{II n}) \right],$$

$$u_i = \frac{r}{2\mu} \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{m_I} \frac{K_{In}^\lambda}{(2\pi r)^{1-\lambda_{In}}} C_{ij}(\vartheta, \lambda_{In}) + \sum_{n=1}^{m_{II}} \frac{K_{II n}^\lambda}{(2\pi r)^{1-\lambda_{II n}}} D_{ij}(\vartheta, \lambda_{II n}) \right],$$
(5)

gdzie K_{In}^λ , $K_{II n}^\lambda$ – współczynniki przy n -tym członie rozwiązania asymptotycznego, λ_{In} i $\lambda_{II n}$ – n -te pierwiastki o dodatnich częściach rzeczywistych równań charakterystycznych:

$$\lambda_1 \sin 2\alpha - \sin 2\lambda_1 \alpha = 0, \quad \lambda_{II} \sin 2\alpha - \sin 2\lambda_{II} \alpha = 0, \quad (6)$$

A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} i D_{ij} – kombinacje funkcji trygonometrycznych kąta ϑ .

Występujące w wyrażeniu (5) uogólnione współczynniki intensywności naprężeń dla rozrywania (przypadek I) i ścinania wzdłużnego (przypadek II) są zdefiniowane w następujący sposób (Seweryn i Zwoliński, 1993):

$$K_I^\lambda = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{1-\lambda_I} \sigma_{\vartheta\vartheta}(r, \vartheta) \right],$$

$$K_{II}^\lambda = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{1-\lambda_{II}} \tau_{r\vartheta}(r, \vartheta) \right].$$
(7)

Wyrażenia (5) można zapisać w postaci macierzowej (3), wektor parametrów analitycznych \mathbf{u}_K przybierze wówczas postać:

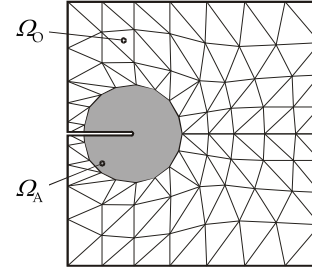
$$\mathbf{u}_K^T = \{K_I^\lambda, K_{II}^\lambda, \dots, K_{Im_1}^\lambda, K_{II}^\lambda, K_{II2}^\lambda, \dots, K_{II m_{II}}^\lambda, u_{Cr}, u_{C\vartheta}\}. \quad (8)$$

3. METODA ELEMENTÓW ANALITYCZNYCH

Metoda elementów analitycznych jest techniką wyznaczania wartości parametrów opisujących osobliwe pola naprężeń, opartą na metodzie elementów skończonych i polegającą na wykorzystaniu specjalnego elementu skończonego w obszarze przywierzchołkowym ostrego naroża.

W wektorze kolumnie parametrów węzłowych \mathbf{q} zagadnienia MES wydzielono podwektor \mathbf{u}_O , zawierający składowe przemieszczenia węzłów standardowych elementów skończonych (obszar Ω_O – rys. 3), podwektor \mathbf{u}_A składowych przemieszczeń węzłów leżących na granicy obszaru analitycznego Ω_A oraz \mathbf{u}_K – wektor poszukiwanych parametrów analitycznych (8):

$$\mathbf{q}^T = \{ \mathbf{u}_O^T, \mathbf{u}_A^T, \mathbf{u}_K^T \} \quad (9)$$



Rys. 3. Ciało ze szczeliną oraz obszary Ω_A i Ω_O .

Energia odkształcenia sprężystego rozpatrywanego układu przyjmie postać:

$$U = \frac{1}{2} \{ \mathbf{u}_O^T, \mathbf{u}_A^T, \mathbf{u}_K^T \} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OO} & \mathbf{K}_{OA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{AO} & \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_O \\ \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_K \end{Bmatrix} \quad (10)$$

gdzie \mathbf{K}_A jest macierzą sztywności elementu analitycznego Ω_A , której postać wyprowadzona została z wyrażenia na energię odkształcenia sprężystego obszaru analitycznego Ω_A przy wykorzystaniu związków pomiędzy wektorami kolumnami odkształceń $\boldsymbol{\varepsilon}$ i naprężeń $\boldsymbol{\sigma}$ oraz przy zastosowaniu opisu pola naprężeń za pomocą parametrów analitycznych (4) lub (8):

$$U_A = \frac{1}{2} \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_A} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{u}_K^T \left(\int_{\Omega_A} \mathbf{f}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{f} \, d\Omega \right) \mathbf{u}_K = \frac{1}{2} \mathbf{u}_K^T \mathbf{K}_A \mathbf{u}_K$$
(11)

gdzie t – grubość elementu. Stąd macierz sztywności elementu analitycznego:

$$\mathbf{K}_A = \int_{\Omega_A} \mathbf{f}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{f} \, d\Omega. \quad (12)$$

Ciągłość pola przemieszczeń i naprężeń pomiędzy obszarem analitycznym Ω_A a obszarem modelowanym za pomocą standardowych elementów skończonych Ω_O zapewniono przez zastosowanie metody więzów analitycznych (Seweryn i Adamowicz, 2005). Wykorzystano wymuszenie przemieszczeń węzłów granicznych obu obszarów zgodnie z zadanym rozkładem teoretycznym, uzależniając je od poszukiwanych wartości parametrów analitycznych:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_O \\ \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_O \\ \mathbf{u}_K \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_A = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{u}_K. \quad (13)$$

Postać macierzy więzów analitycznych Ψ wynika bezpośrednio z przyjętego opisu osobliwego pola przemieszczeń (1) lub (5). Wprowadzenie macierzy więzów analitycznych spowoduje modyfikację globalnej macierzy sztywności. Ostatecznie energia odkształcenia sprężystego układu przybierze postać:

$$U = \frac{1}{2} \{ \mathbf{u}_o^T, \mathbf{u}_k^T \} \mathbf{K}^* \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_o \\ \mathbf{u}_k \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

gdzie \mathbf{K}^* jest zmodyfikowaną macierzą sztywności układu:

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{OO} & \mathbf{K}_{OA} \Psi \\ \Psi^T \mathbf{K}_{AO} & \Psi^T \mathbf{K}_{AA} \Psi + \mathbf{K}_A \end{bmatrix}. \quad (15)$$

4. PROGNOZOWANIE PĘKANIA ELEMENTÓW Z KARBAMI

W nielokalnym naprężeniowym kryterium pęknięcia, zaproponowanym przez Seweryna i Mroza (1995), zakłada się, że inicjacja lub propagacja szczeliny następuje wówczas, gdy uśredniona na odcinku d_0 długości strefy pęknięcia (rys. 4), funkcja naprężeń normalnych σ_n i tnących τ_n w płaszczyźnie fizycznej osiągnie wartość krytyczną, czyli:

$$\max_{(r, x_0)} \left[\frac{1}{d_0} \int_0^{d_0} R_\sigma(\sigma_n, \tau_n) dr \right] = 1, \quad (16)$$

gdzie, \mathbf{x}_0 – początek lokalnego układu współrzędnych (r, ϑ) określający miejsce pęknięcia.

Do przewidywania pęknięcia materiałów kruchych z wykorzystaniem kryterium (16), wystarczające jest przyjęcie lokalnej funkcji pęknięcia w postaci warunku naprężeń normalnych (Seweryn, 2003):

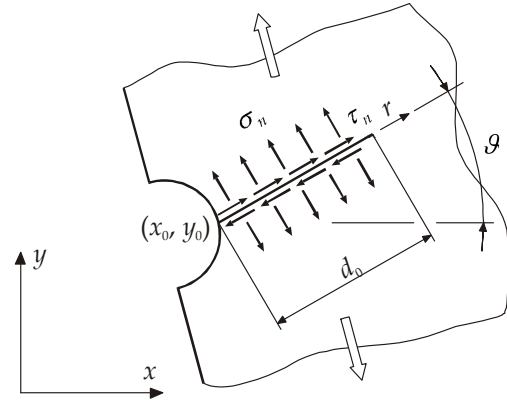
$$R_\sigma(\sigma_n) = \sigma_n / \sigma_C. \quad (17)$$

Długość strefy pęknięcia d_0 wyznacza się z równowagi kryterium Griffitha – Irwina ($K_I = K_{IC}$) oraz nielokalnego kryterium pęknięcia (16) dla przypadku

rozrywanej szczeliny (Seweryn, 2003):

$$d_0 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_C} \right)^2, \quad (18)$$

gdzie σ_C, K_{IC} – naprężenia niszczące i krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń.

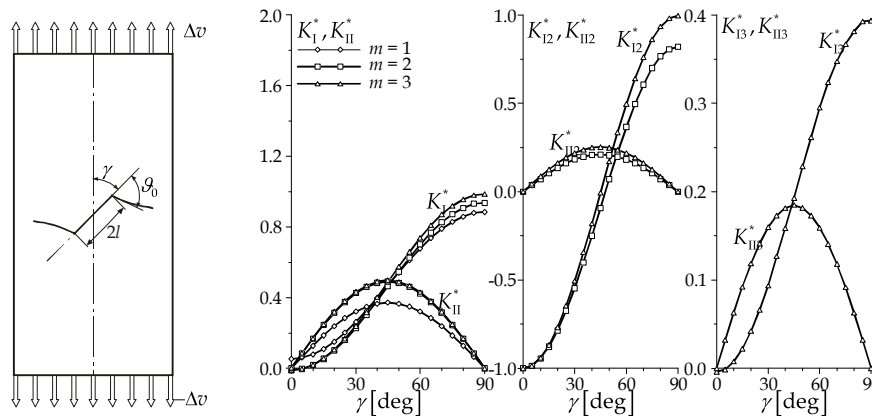


Rys. 4. Lokalny biegunowy układ współrzędnych (r, ϑ) o początku w miejscu przewidywanej inicjacji szczeliny, naprężenia σ_n i τ_n wywołujące dekohezję materiału w strefie uszkodzenia d_0

Nielokalne kryterium kruchego pęknięcia posłużyło do wyznaczenia warunków krytycznych pęknięcia dla zagadnienia tarczy ze szczeliną oraz tarczy z karami trójkątnymi w złożonych stanach obciążenia a wyniki porównano z literaturowymi badaniami doświadczalnymi.

4.1. Zagadnienie tarczy ze szczeliną

W pracy Williamsa i Ewinga (1971) przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych pęknięcia tarczy wykonanej z polimetakrylanu metylu, ze szczeliną nachyloną w stosunku do kierunku działania obciążenia (rys. 5).



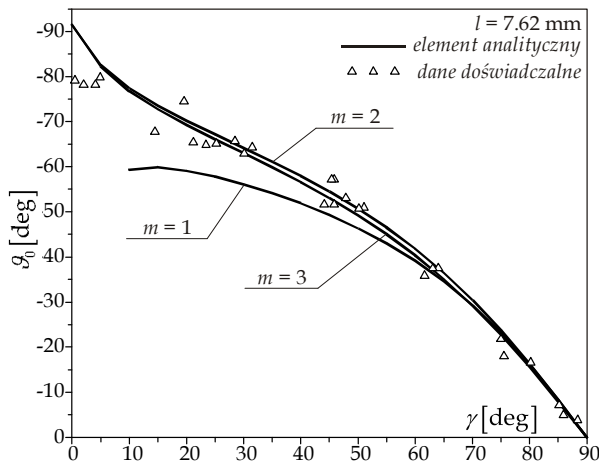
Rys. 5. Tarcza ze szczeliną ukośną oraz wartości współczynników intensywności naprężeń i współczynników stojących przy członach wyższych rzędów rozwinięcia asymptotycznego dla szczeliny o długości $l = 12.7$ mm w funkcji kąta pochylenia szczeliny γ

Zmieniając kąt nachylenia szczeliny γ uzyskiwano różny udział obciążeń rozrywających i ścinających. Dla prezentowanego zagadnienia, przy wykorzystaniu metody elementów analitycznych, obliczono wartości współczynników intensywności naprężeń i współczynników stojących przy członach wyższych rzędów rozwiązania asymptotycznego przy uwzględnieniu różnej liczby m członów rozwiązania asymptotycznego. Wyniki unormowano zgodnie z zależnościami:

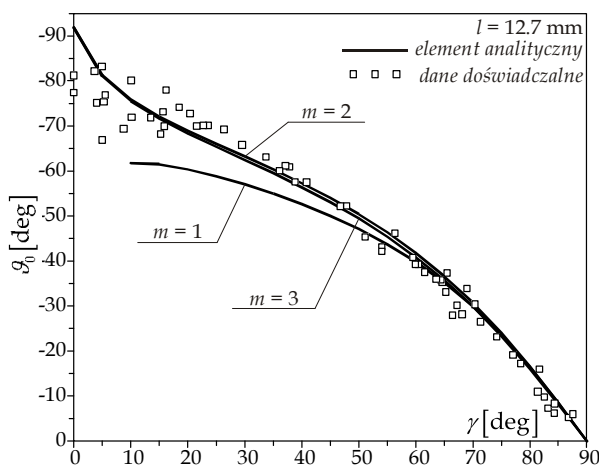
$$K_{In}^* = K_{In} / \sigma (\pi l)^{1-\frac{n}{2}}, \quad K_{II n}^* = K_{II n} / \sigma (\pi l)^{1-\frac{n}{2}} \quad (19)$$

i przedstawiono na rys. 5.

Wyznaczona w doświadczeniu krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężeń wyniosła $K_{IC} = 1.370 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. W obliczeniach przyjęto wartość naprężeń krytycznych $\sigma_C = 102.8 \text{ MPa}$, co na podstawie zależności (18) dało wartość strefy pęknięcia $d_0 = 0.113 \text{ mm}$. Kryterium pęknięcia (16) pozwoliło wyznaczyć kierunki, w których następować będzie propagacja szczeliny. Wybrane wyniki obliczeń przeprowadzonych przy uwzględnieniu różnej liczby członów rozwiązania asymptotycznego m zestawiono z wynikami doświadczalnymi na rys. 6 i 7.



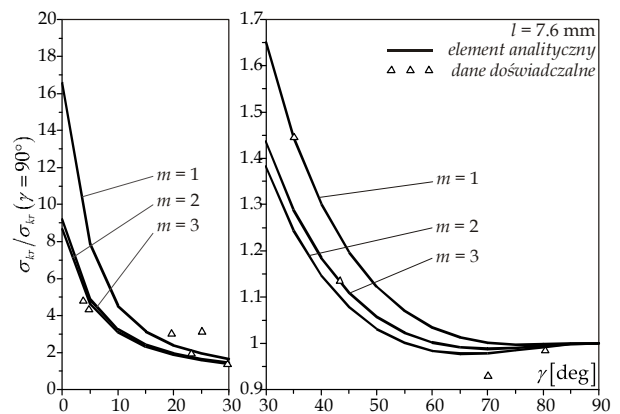
Rys. 6. Kąt propagacji szczeliny ϑ_0 w funkcji kąta nachylenia γ szczeliny o długości $l = 7.62 \text{ mm}$ (dane doświadczalne: Williams, Ewing; 1971)



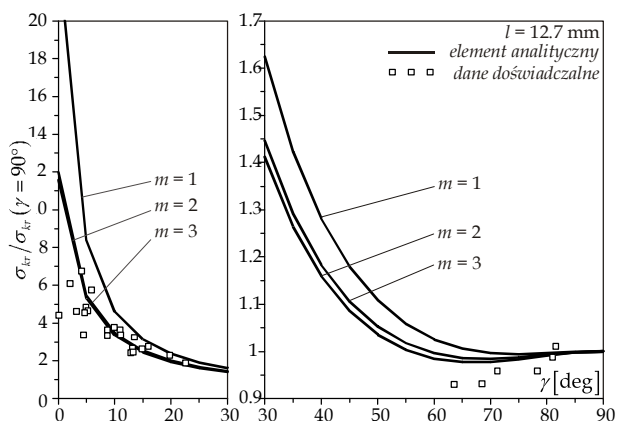
Rys. 7. Kąt propagacji szczeliny ϑ_0 w funkcji kąta nachylenia γ szczeliny o długości $l = 12.7 \text{ mm}$ (dane doświadczalne: Williams, Ewing; 1971)

W przypadku, gdy $\gamma \rightarrow 0^\circ$, wartości współczynników intensywności naprężeń powinny dążyć do zera ($K_I \rightarrow 0$ i $K_{II} \rightarrow 0$) oraz stosunek $K_I/K_{II} \rightarrow 0$, co sugerowałoby przypadek czystego ścinania wzdłużnego (II sposób obciążania) i wartości kąta propagacji szczeliny ϑ_0 zawierające się w przedziale $-80^\circ \div -70^\circ$. Liczne badania doświadczalne wykazują, że kąt propagacji w takim przypadku zbliżony jest do -90° (Williams i Ewing, 1971). Użycie do obliczeń numerycznych opisu pola naprężeń wykorzystującego nie tylko człony osobliwe rozwiązania asymptotycznego, ale także wyższych rzędów, daje rezultaty zgodne z eksperymentalnymi (linie $m = 2, 3$ - rys. 6, 7).

Kryterium (16) pozwoliło wyznaczyć poziom obciążeń krytycznych, przy których następuje pęknięcie. Wyniki tych obliczeń, razem z rezultatami badań doświadczalnych, przedstawiono na rys. 8 i 9. Krytyczne wartości obciążeń osiągają minimum dla kąta pochylenia szczeliny $\gamma = 70^\circ \div 60^\circ$, co zgodne jest z wynikami badań doświadczalnych. Jest to wyraźnie widoczne jedynie w przypadku obliczeń uwzględniających efekt członów wyższych rzędów rozwiązania asymptotycznego.



Rys. 8. Wartości krytycznych obciążeń w zależności od kąta γ pochylenia szczeliny środkowej o długości $l = 12.7 \text{ mm}$ (dane doświadczalne: Williams, Ewing; 1971)



Rys. 9. Wartości krytycznych obciążeń w zależności od kąta γ pochylenia szczeliny środkowej o długości $l = 12.7 \text{ mm}$ (dane doświadczalne: Williams, Ewing; 1971)

4.2. Zagadnienie tarczy z korbami trójkątnymi

Zagadnienie pęknięcia tarczy z korbami trójkątnymi w złożonych stanach obciążenia analizowane było przez Seweryna i innych (1997).

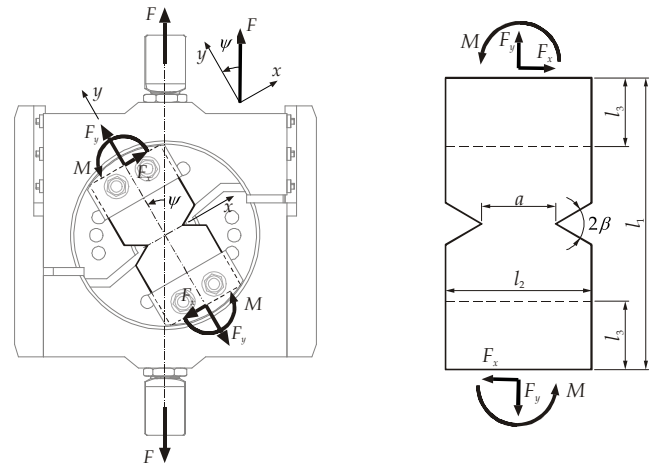
Obciążenia próbek realizowane były za pomocą specjalnego przyrządu (rys. 10), mocowanego w uchwytach maszyny wytrzymałościowej. Proporcje składowej siły rozrywającej F_x i ścinającej F_y obciążenia stopniowane były przez zmianę kąta zamocowania próbki względem osi przyrządu $\psi = \arctg(F_x/F_y)$. Prezentowana praca obejmowała stany obciążenia, dla kąta obciążenia $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$. Wartość składowej rozciągającej (ściskającej) i ścinającej obciążenia wyznaczano z zależności:

$$F_x = F \sin \psi, \quad F_y = F \cos \psi, \quad (20)$$

Gdzie F jest siłą zadawaną na maszynie wytrzymałościowej.

Badano próbki o kącie rozwarcia $2\beta = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ i 80° , wykonane z polimetakrylanu metylu ($E = 3.3 \text{ GPa}$ i $\nu = 0.35$). Wyniki obliczeń uogólnionych współczynników intensywności naprężeń oraz współczynników stojących przy członach wyższych rzędów rozwiązania asymptotycznego

dla przypadku rozrywania i czystego ścinania przedstawiono w tab. 1.



Rys. 10. Realizacja ścinania wzdłużnego i rozrywania dla próbek płaskich. $l_1 = 200 \text{ mm}$, $l_2 = 100 \text{ mm}$, $a = 50 \text{ mm}$, $l_3 = 47 \text{ mm}$, $t = 5 \text{ mm}$

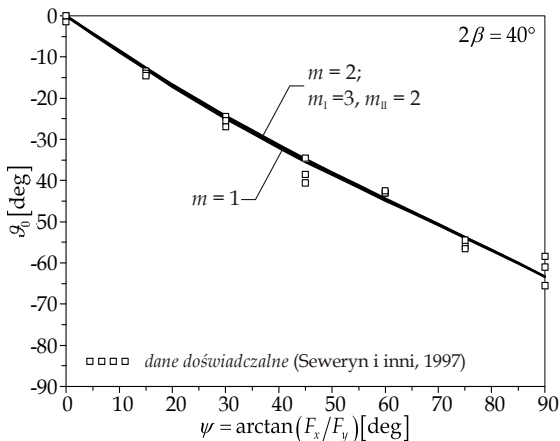
Tab. 1. Wartości współczynnika $\xi_{Ii} = K_{Ii}^\lambda / F_y$ i $\xi_{IIi} = K_{IIi}^\lambda / F_x$ obliczone metodą elementów analitycznych

2β	Rozrywanie				Ścinanie			
	$\xi_{I1} = K_{I1}^\lambda / F_y$	$\xi_{I2} = K_{I2}^\lambda / F_y$	$\xi_{I3} = K_{I3}^\lambda / F_y$	$\xi_{I4} = K_{I4}^\lambda / F_y$	$\xi_{II1} = K_{II1}^\lambda / F_x$	$\xi_{II2} = K_{II2}^\lambda / F_x$	$\xi_{II3} = K_{II3}^\lambda / F_x$	$\xi_{II4} = K_{II4}^\lambda / F_x$
20°	0.6199	-	-	-	0.7790	-	-	-
	0.6225	-0.0594	-	-	0.7344	-0.0006	-	-
	0.6275	-0.0815	4.7192	-	0.7381	-0.0005	7.9695	-
	0.6278	-0.0830	4.9885	-3.4375	0.7367	-0.0005	10.3062	-1.5949
40°	0.6191	-	-	-	0.9738	-	-	-
	0.6188	-0.5830	-	-	0.9512	-0.0002	-	-
	0.6230	-1.4977	6.4143	-	-	-	-	-
60°	0.6541	-	-	-	1.3121	-	-	-
80°	0.7214	-	-	-	1.4196	0.0005	-	-
	-	-	-	-	1.4906	-	-	-
	-	-	-	-	2.2028	0.0026	-	-

Wartości dla obciążeń pośrednich wyznaczone zostały przy pomocy następujących zależności:

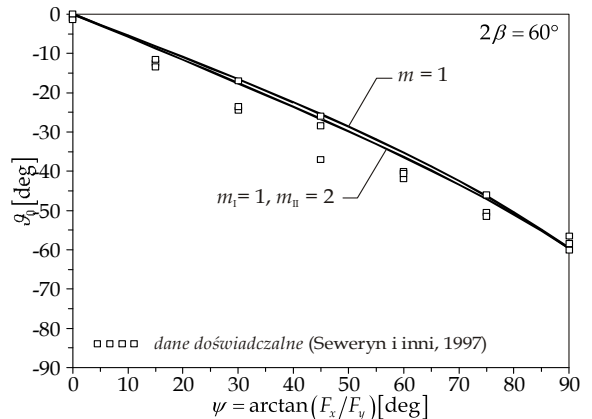
$$K_I^\lambda(\beta, \psi) = \xi_I(\beta) F \cos \psi, \quad (21)$$

$$K_{II}^\lambda(\beta, \psi) = \xi_{II}(\beta) F \sin \psi.$$



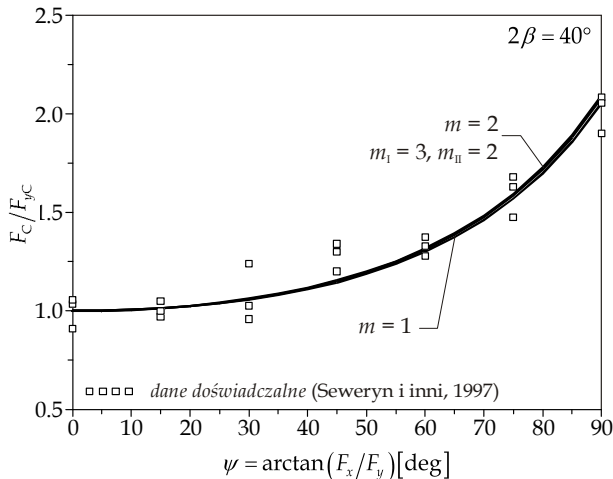
Rys. 11. Kierunek inicjacji szczeliny ϑ_0 dla różnych kątów obciążenia ψ tarczy z korbami trójkątnymi o kącie rozwarcia $2\beta = 40^\circ$; dane doświadczalne: Seweryn i inni (1997)

Krytyczną wartość naprężenia niszczącego σ_c wyznaczono rozciągając próbki z korbami półokrągłymi. Otrzymano $\sigma_c = 115 \text{ MPa}$. Wyznaczona przez autorów wartość krytycznego współczynnika intensywności naprężeń K_{IC} wyniosła $1.37 \text{ MPa m}^{0.5}$. Wykorzystując zależność (18) możliwe było wyznaczenie wartości parametru nielokalności: $d_0 = 0.09035 \text{ mm}$.

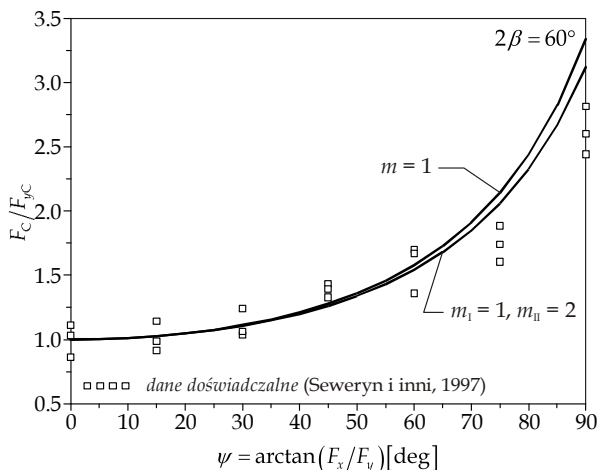


Rys. 12. Kierunek inicjacji szczeliny ϑ_0 dla różnych kątów obciążenia ψ tarczy z korbami trójkątnymi; dane doświadczalne: Seweryn i inni (1997)

Na rys. 11-14 przedstawiono wybrane wyniki obliczeń kierunków inicjacji szczeliny ϑ_0 oraz stosunków krytycznych wartości obciążeń: całkowitego do rozciągającego F_c/F_{yc} , wykonanych przy wykorzystaniu nielokalnego naprężeniowego kryterium kruchej pęknięcia. Punktami zaznaczono dane doświadczalne przedstawione w pracy Seweryna i innych (1997).



Rys. 13. Wartość obciążenia krytycznego F_c/F_{yc} dla tarczy z karami trójkątnymi; dane doświadczalne: Seweryn i inni (1997)



Rys. 14. Wartość obciążenia krytycznego F_c/F_{yc} dla tarczy z karami ($2\beta = 60^\circ$); dane doświadczalne: Seweryn i inni (1997)

5. PODSUMOWANIE

Na podstawie wyników przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że zastosowanie w obliczeniach opisu pola naprężeń i przemieszczeń wykorzystującego jedynie człony osobliwe rozwiązania asymptotycznego powoduje obarczenie otrzymywanych wyników znacznym błędem numerycznym, w wielu przypadkach dyskwalifikującym obliczenia. Wpływ członów wyższych rzędów w asymptotycznym rozwinięciu, opisującym pola naprężeń w pobliżu wierzchołka szczeliny, jest dominujący dla szczelin pochylonych pod małym kątem do kierunku działania obciążenia ($\gamma = 0^\circ \pm 10^\circ$). Uwzględnienie tylko członów osobliwych w obliczeniach ($m = 1$) powoduje znaczne zawyżanie poziomu obciążeń krytycznych – zwłaszcza dla małych kątów γ .

Natomiast w rozpatrywanym przypadku poprawa dokładności prognozowania kruchej pęknięcia elementów

z karami trójkątnymi wywołana uwzględnieniem w obliczeniach opisu pola naprężeń i przemieszczeń wykorzystującego człony wyższych rzędów rozwiązania asymptotycznego jest nieznacząca. Otrzymane wyniki są zbliżone do rezultatów badań eksperymentalnych niezależnie od liczby członów rozwiązania asymptotycznego, opisującego osobliwe pole naprężeń w pobliżu wierzchołka karbu.

LITERATURA

1. He W.J., Lin Y., Ding H.J. (1997), A three-dimensional formula for determining stress intensity factors in finite element analysis of cracked bodies, *Eng. Fract. Mech.*, 56, 409-415.
2. Lin K.Y., Tong P. (1980), Singular finite elements for the fracture analysis of V-notched plate, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 15, 1343-1354.
3. Seweryn A. (2002), Modelling of singular stress fields using finite element method, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 39, 4787-4804.
4. Seweryn A. (2003), *Metody numeryczne w mechanice pęknięcia*, Biblioteka Mechaniki Stosowanej, Seria A. Monografie, IPPT PAN, Warszawa.
5. Seweryn A., Adamowicz A. (2005), On analytical constraints and elements methods in modeling stresses near the tips of cracks and V-notches, *Material Science*, 41, 4.
6. Seweryn A., Molski K. (1996), Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corners under various boundary conditions, *Eng. Fract. Mech.*, 55, 529-556.
7. Seweryn A., Mróz Z. (1995), A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading, *Eng. Fract. Mech.*, 51, 955-973.
8. Seweryn A., Poskrobko S., Mróz Z. (1997), Brittle fracture in plane elements with sharp notches under mixed-mode loading, *J. Eng. Mech. ASCE*, 123, 535-543.
9. Seweryn A., Zwolinski J. (1993), Solution for the stress and displacement fields in the vicinity of a V-notch of negative wedge angle in plane problems of elasticity, *Eng. Fract. Mech.*, 44, 275-281.
10. Sinclair G.B., Okajima M., Griffin J. H. (1984) Path independent integrals for computing stress intensity factors at sharp notches in elastic plates, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 20, 999-1008.
11. Williams J.G., Ewing P.D. (1971) Fracture under complex stress - the angled crack problem, *Int. J. Fract.*, 8, 441-446.
12. Williams M.L. (1957) On the stress distribution at the base of stationary crack, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 24, 109.
13. Yang Z.J., Chen J.F., Holt G.D. (2001), Efficient evaluation of stress intensity factors using virtual crack extension technique, *Comput. Struct.*, 79, 2705-2715.

PREDICTION OF THE BRITTLE FRACTURE USING HIGHER ORDER TERMS OF THE ASYMPTOTIC EXPANSION

Abstract: The paper deals with the problems of an applications of analytical element method to modelling of stress fields near the cracks and sharp notches in a elastic bodies. The method of analytical elements is applied to find the classical and the generalized stress intensity factors and the coefficients of the higher terms of the asymptotic solution in the case of sheet containing crack or triangular notches. The derived calculations were used to find critical condition of crack propagation.

Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005 - 2007 jako projekt badawczy nr 4 T07A 030 28.