

ZAGADNIENIE SZCZELINY PROSTOPADŁEJ DO UWARSTWIENIA W LAMINATOWEJ PRZESTRZENI SPRĘŻYSTEJ O STRUKTURZE PERIODYCZNEJ

Dariusz M. PERKOWSKI*, Stanisław J. MATYSIAK*

*Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

dmperkowski@doktoranci.pb.edu.pl

Streszczenie: Rozpatrzono przestrzeń będącą sprężystym kompozytem warstwowym o strukturze periodycznej osłabioną szczeliną prostopadłą do uwarstwienia. Zagadnienie zostało rozwiązane w ramach modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi (Woźniak (1987), Matysiak i Woźniak (1987)). Do analizy zastosowano metodę transformacji całkowych i dualnych równań całkowych. Otrzymano rozkład przemieszczeń i naprężeń oraz współczynniki intensywności naprężeń. Zbadano wpływ własności mechanicznych oraz geometrycznych kompozytu na rozkład współczynnika intensywności naprężeń.

1. WPROWADZENIE

Modelowanie ośrodków warstwowych o strukturze periodycznej za pomocą klasycznego opisu teorii sprężystości prowadzi do układu równań cząstkowych z silnie oscylującymi współczynnikami, co stwarza komplikacje obliczeniowe. Jednym ze sposobów uproszczenia problemu jest zastosowanie modeli przybliżonych, np. Achenbach (1975), Bakhalov i Panasenko (1984), Bensoussan i inni. (1978), Christensen (1980), Pobedria (1984), Sanchez-Palenica (1980), Woźniak (1987), Matysiak i Woźniak (1987). Model homogenizowany z parametrami mikrolokalnymi, zaproponowany przez Woźniaka a potem zaadoptowany przez Matysiaka i Woźniaka do modelowania kompozytów warstwowych o strukturze periodycznej, był bardzo często stosowany w rozwiązywaniu wielu zagadnieniach kontaktowych, szczelin, przewodnictwa ciepła itd. (patrz. prace Kaczyński (1994), Kaczyński i Matysiak (1989), (2003), Matysiak i Pauk (1995). Podejście to polegające na opisie niejednorodnego ośrodka warstwowego modelem homogenizowanym (jednorodnym), a więc układem równań cząstkowych o stałych współczynnikach. Pozwala on na zbadanie wpływu struktury warstwowej, a jednocześnie w ramach tego modelu spełnione zostały warunki ciągłości na powierzchniach łączących różne składniki kompozytu. Stosowność modelu homogenizowanego została omówiona w pracach Kulczyckiego i Matysiaka (2005a i b), Kulczyckiego i innych (2007). W pracach tych porównano wyniki obliczeń otrzymane za pomocą modelu homogenizowanego oraz klasycznego opisu teorii termosprężystości wskazując na bardzo dobrą ich zgodność.

W niniejszej pracy przedstawiono zagadnienie szczeliny prostopadłej do uwarstwienia w kompozycie warstwowym o strukturze periodycznej. Sformułowane zagadnienie rozwiązano w ramach modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi.

Zastosowano uśredniony warunek brzegowy (patrz. Perkowski i inni (2007)) pozwalający na obliczenie rozkładów naprężeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny oraz współczynnika intensywności naprężeń.

Praca stanowi kontynuację rozważań zawartych w pracy Pusza (1992), gdzie rozpatrzono szczelinę prostopadłą do uwarstwienia, zawartą tylko w jednej warstwie będącej składnikiem kompozytu.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

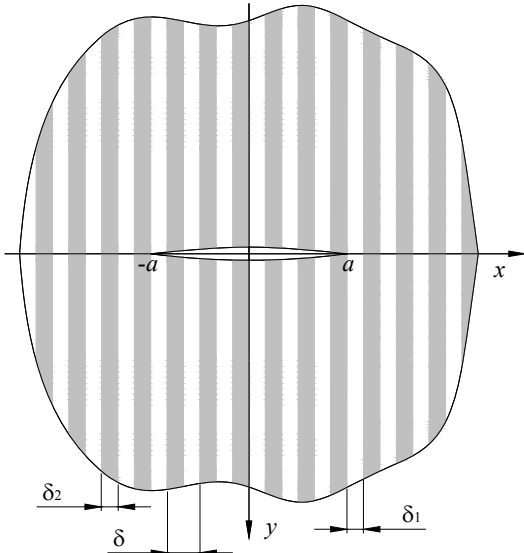
Niech a będzie połową długości szczeliny zorientowanej prostopadle do uwarstwienia (patrz. Rys. 1). Przestrzeń kompozytowa składa się z dwuskładnikowych lamin powtarzających się periodycznie o grubościach δ_1 i δ_2 , $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Niech $\lambda_j, \mu_j, j=1, 2$ będą stałymi Lamé'go charakteryzującymi właściwościami mechanicznymi lamin. Układ współrzędnych i położenie szczeliny przedstawiono na Rys. 1.

Korzystając z podejścia do zagadnień szczelin zaproponowanego przez Sneddon (1966) i symetrii zagadnienia względem Ox zapiszemy mieszane warunki brzegowe rozpatrując półpłaszczyznę $y>0$:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}(x, 0) &= 0, \quad |x| \geq 0, \\ \sigma_{yy}^{(j)}(x, 0) &= -f(x), \quad |x| < a, \\ V(x, 0) &= 0, \quad |x| > a, \end{aligned} \quad (1a)$$

w nieskończoności natomiast przyjmujemy, że

$$\sigma_{xx}^{(j)}, \sigma_{xy}^{(j)}, \sigma_{yy}^{(j)} \rightarrow 0 \quad \text{dla } x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \quad (1b)$$



Rys. 1. Schemat rozpatrywanego zagadnienia

Sformułowane zagadnienie zostanie rozwiązane w ramach modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi. Ponadto przyjęto idealny kontakt mechaniczny pomiędzy warstwami.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Pole przemieszczeń oraz składowe tensora naprężenia w płaskim stanie odkształcenia postulowane są w następującej postaci:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U(x, y) + h(x)q_x(x, y) \cong U(x, y), \\ v(x, y) &= V(x, y) + h(x)q_y(x, y) \cong V(x, y), \\ \sigma_{yy}^{(j)}(x, y) &\cong (\lambda_j + 2\mu_j)V_{,y} + \lambda_j(U_{,x} + h_j q_x), \\ \sigma_{xx}^{(j)}(x, y) &\cong (\lambda_j + 2\mu_j)(U_{,x} + h_j q_x) + \lambda_j V_{,y}, \\ \sigma_{xy}^{(j)}(x, y) &\cong \mu_j(U_{,y} + V_{,x} + h_j q_y), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie U, V są makroprzemieszczeniami, q_x, q_y są parametrami mikrolokalnymi, h jest δ -periodyczną funkcją kształtu. Warunki idealnego kontaktu mechanicznego na powierzchniach łączących różne składniki kompozytu są spełnione, gdy funkcja kształtu ma postać:

$$h(x) = \begin{cases} x - 0.5\delta_1, & \text{dla } 0 \leq x \leq \delta_1, \\ \frac{-\eta x}{1-\eta} - 0.5\delta_1 + \frac{\delta_1}{1-\eta}, & \text{dla } \delta_1 \leq x \leq \delta, \end{cases} \quad (3)$$

gdzie $\eta = \delta_1/\delta$, $h_1 = 1$, $h_2 = -\eta/(1-\eta)$.

Korzystając z pracy Kaczyńskiego i Matysiaka, (1988) możemy zapisać równania modelu homogenizowanego z parametrami mikrolokalnymi

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (B + C) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= 0, \\ C \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (B + C) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

oraz

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^{(j)} &= C \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ \sigma_{xx}^{(j)} &= A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \sigma_{yy}^{(j)} &= D_j \frac{\partial U}{\partial x} + E_j \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \sigma_{zz}^{(j)} &= \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} (\sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_{yy}^{(j)}), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= \eta\lambda_1 + (1-\eta)\lambda_2, \quad [\lambda] = \eta(\lambda_1 - \lambda_2), \\ \hat{\lambda} &= \eta\lambda_1 + \frac{\eta^2}{1-\eta}\lambda_2, \quad \tilde{\mu} = \eta\mu_1 + (1-\eta)\mu_2, \\ [\mu] &= \eta(\mu_1 - \mu_2), \quad \hat{\mu} = \eta\mu_1 + \frac{\eta^2}{1-\eta}\mu_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} - \frac{([\lambda] + 2[\mu])^2}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}} > 0, \\ A_2 &= \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} - \frac{[\lambda]^2}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}} > 0, \\ B &= \tilde{\lambda} - \frac{[\lambda]([\lambda] + 2[\mu])}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}} > 0, \\ C &= \tilde{\mu} - \frac{[\mu]^2}{\hat{\mu}} > 0, \quad D_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} A_1, \\ E_j &= \frac{4\mu_j(\lambda_j + \mu_j)}{\lambda_j + 2\mu_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} B, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (6)$$

Równania na makroprzemieszczenia możemy rozseparować za pomocą potencjałów Ψ_1 i Ψ_2 przyjmując je w następującej postaci:

$$U = \kappa_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \kappa_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}, \quad V = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial y}, \quad (7)$$

gdzie:

$$\kappa_j = \frac{A_2 \gamma_j^2 - C}{B + C}, \quad (8)$$

zaś γ_j wyznaczamy z równania charakterystycznego

$$A_2 C \gamma_j^4 + (B^2 + 2BC - A_1 A_2) \gamma_j^2 + A_1 C = 0. \quad (9)$$

Otrzymujemy

$$\gamma_j^2 \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_j}{\partial y^2} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Równanie charakterystyczne (9) przy założeniu, że $\mu_1 \neq \mu_2$ ma 4 rzeczywiste rozwiązania $\pm\gamma_1, \pm\gamma_2$, gdzie:

$$\gamma_1 = \left(\frac{A_1 A_2 - 2BC - B^2 - \sqrt{\Delta}}{2A_2 C} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{A_1 A_2 - 2BC - B^2 + \sqrt{\Delta}}{2A_2 C} \right)^{\frac{1}{2}},$$

oraz $\Delta = (B^2 + 2BC - A_1 A_2)^2 - 4A_1 A_2 C^2 > 0$.

Warunek brzegowy na składową normalną ze względu na nieciągłość składowych $\sigma_{yy}^{(j)}(x,y)$ na powierzchniach łączących składniki kompozytu zostaje zastąpiony uśrednionym warunkiem brzegowym w postaci (patrz. Perkowski i inni (2007), Matysiak i Perkowski (2007)):

$$B \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial V}{\partial y} = -f(x), \quad y = 0, \quad |x| < a. \quad (12)$$

Przedłużymy warunek (12) dla $y = 0, \quad |x| \geq a$ jako

$$B \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial V}{\partial y} = -\varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (13)$$

Stosując metodę transformacji całkowych Fouriera otrzymujemy składowe wektora przemieszczenia w postaci

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= is(\kappa_1 a_1(s) \exp(-|s|\gamma_1 y) + \kappa_2 a_2(s) \exp(-|s|\gamma_2 y)), \\ \tilde{V} &= -|s|(\gamma_1 a_1(s) \exp(-|s|\gamma_1 y) + \gamma_2 a_2(s) \exp(-|s|\gamma_2 y)) \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie

$$\tilde{f}(s, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-ixs) dx, \quad i^2 = -1. \quad (15)$$

Warunek brzegowy (13) transformuje się do postaci

$$isB\tilde{U} + A_2 \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} = -\tilde{\varphi}(s), \quad y = 0, \quad (16)$$

Spełniając warunki brzegowe (1a)_{1,2} otrzymujemy układ równań na $a_1(s)$ oraz $a_2(s)$

$$\begin{cases} (A_2 \gamma_1^2 - \kappa_1 B) a_1(s) + (A_2 \gamma_2^2 - \kappa_2 B) a_2(s) = -\tilde{\varphi}(s) s^{-2} \\ \gamma_1 (1 + \kappa_1) a_1(s) + \gamma_2 (1 + \kappa_2) a_2(s) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

gdzie $\tilde{\varphi}(s)$ jest nieznaną funkcją. Funkcje $a_1(s)$ oraz $a_2(s)$ mają postać:

$$a_1(s) = \frac{\tilde{\varphi}(s) \gamma_2}{s^2 (\gamma_1 - \gamma_2) (A_2 \gamma_1^2 + B) C}, \quad (18)$$

$$a_2(s) = \frac{-\tilde{\varphi}(s) \gamma_1}{s^2 (\gamma_1 - \gamma_2) (A_2 \gamma_2^2 + B) C}.$$

Rozwiązanie zagadnienia możemy sprowadzić do rozwiązania dualnych równań całkowych (patrz. Sneddon (1966))

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(s)}{s} \sin(xs) ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(x), \quad 0 \leq x < a, \quad (19)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\tilde{\varphi}(s)}{s} \cos(xs) ds = 0, \quad x > a,$$

Zakładając, że $f(x) = p_0$, a więc szczelina jest rozwierana stałym uśrednionym ciśnieniem otrzymujemy

$$\tilde{\varphi}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} p_0 a J_1(as) \quad (20)$$

Składowe tensora naprężenia mają postać

$$\sigma_{xx}^{(j)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}_{xx}^{(j)}(s, y) \tilde{\varphi}(s) \cos(xs) ds,$$

$$\sigma_{yy}^{(j)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}_{yy}^{(j)}(s, y) \tilde{\varphi}(s) \cos(xs) ds, \quad (21)$$

$$\sigma_{xy}^{(j)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}_{xy}^{(j)}(s, y) \tilde{\varphi}(s) \sin(xs) ds, \quad j = 1, 2.$$

gdzie

$$\tilde{\sigma}_{xx}^{(j)}(s, y) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\gamma_k^2 B - \kappa_k A_1) \exp(-|s|\gamma_k y) G_k^{\varphi},$$

$$\tilde{\sigma}_{yy}^{(j)}(s, y) = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\gamma_k^2 E_j - \kappa_k D_j) \exp(-|s|\gamma_k y) G_k^{\varphi},$$

$$\tilde{\sigma}_{xy}^{(j)}(s, y) = C \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \gamma_k (1 + \kappa_k) \exp(-|s|\gamma_k y) G_k^{\varphi},$$

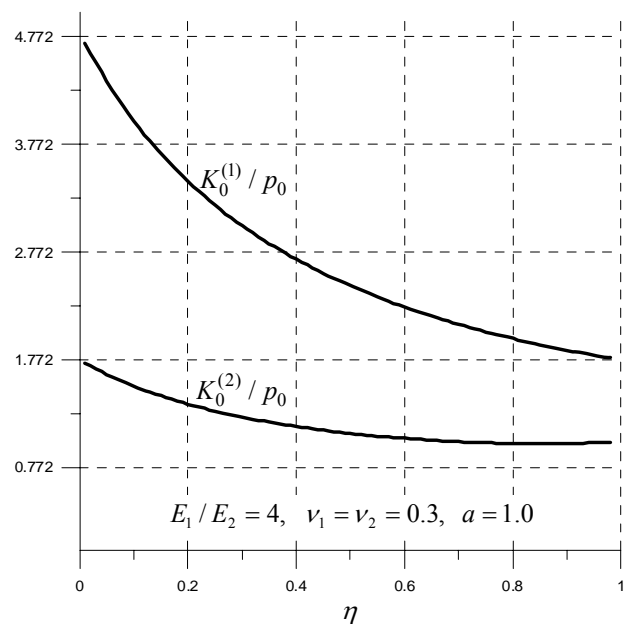
$$G_1^{\varphi} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{B + C}{(A_2 \gamma_1^2 + B) C}, \quad G_2^{\varphi} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{B + C}{(A_2 \gamma_2^2 + B) C}.$$

Znając rozkład naprężeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny przechodzimy do obliczenia współczynnika intensywności naprężeń:

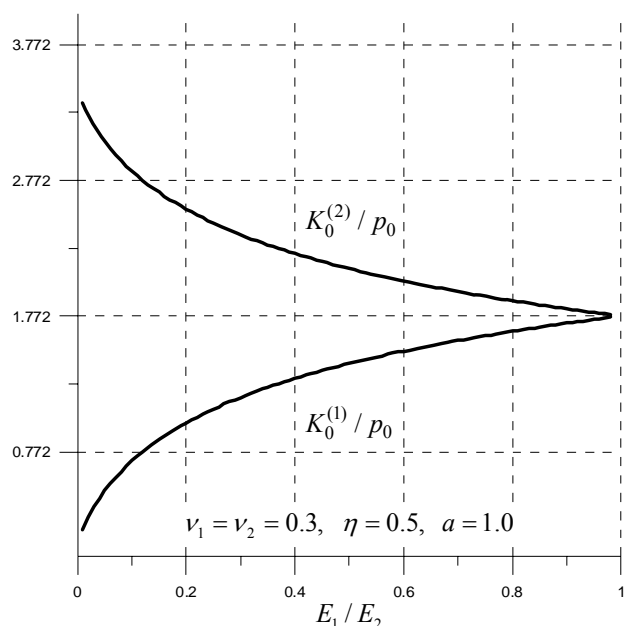
$$\begin{aligned} K_0^{(j)} &= \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_{yy}^{(j)}(x, 0) = \\ &= - \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\gamma_k^2 E_j - \kappa_k D_j) G_k^{\varphi} p_0 \sqrt{\pi a}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

4. ANALIZA NUMERYCZNA

Wyniki analizy numerycznej przedstawione zostaną w formie wykresów zawierających rozkłady współczynnika intensywności naprężeń odniesionego do intensywności sił p_0 działających na swobodną powierzchnie szczeliny powodując jej otwieranie. Na Rys. 2 przedstawiono rozkład współczynnika intensywności naprężeń w przypadku, gdy $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ jako funkcję współczynnika nasycenia η komórki periodyczności materiałem pierwszego rodzaju. Połowa długości szczeliny jest równa $a = 1.0$. Rysunek 3 przedstawia zależność współczynnika intensywności naprężeń jako funkcji E_1/E_2 .



Rys. 2. Rozkład bezwymiarowego współczynnika intensywności naprężeń $K_0^{(j)}/p_0$ jako funkcji parametru η



Rys. 3. Rozkład bezwymiarowego współczynnika intensywności naprężeń $K_0^{(j)} / p_0$ jako funkcji parametru E_1 / E_2

LITERATURA

1. Achenbach J.D., *A Theory of elasticity with microstructure for directionally reinforced composites*, CISM Courses and Lectures, Springer, New York, (1975).
2. Bakhalov N.S., Panasenko G.P., *Averaged processes in periodic media*, Nauka, Moscow, (in Russian), (1984).
3. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, Amsterdam, (1978).
4. Christensen R.M., *Mechanics of composite materials*, J. Wiley and Sons, New York, (1980).
5. Kaczyński A. (1994), Three-dimensional thermoelastic problems of interface cracks in periodic two-layered composites, *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 48, 783-800.
6. Kaczyński A., Matysiak S.J., (1988), On the complex potentials for the linear thermoelasticity with microlocal parameters, *Acta Mechanica*, 72, 245 – 259.
7. Kaczyński A., Matysiak S.J. (1989), Thermal stresses in a laminate composite with a row interface cracks, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 27, 131-147.
8. Kaczyński A., Matysiak S.J. (2003), On the three-dimensional problem of an interface crack under uniform heat flow in a bimaterial periodically layered space, *Int. J. Fracture*, Vol. 123, 127-138.
9. Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S.J. (2005a), On heat conduction problem in a semi-infinite periodically laminated layer, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 32, 123-132.
10. Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S.J. (2005b), On some heat conduction problem in a periodically two-layered body. Comparative results, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, (in press).
11. Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J., Perkowski D. M., (2007), On displacements and stresses in a semi-infinite laminated layer: comparative results, *Meccanica*, 42, 117-126.
12. Matysiak S.J., Pauk V. (1995), Plane contact problem for periodic laminated composite involving frictional heating, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 66, 82-89.

13. Matysiak S. J., Perkowski D. M., (2007), Singularity of stresses in a periodic laminated semi-space with a boundary normal to the layering, *JTAM*, (in press).
14. Matysiak S.J., Woźniak C., (1987), Micromorphic effects in a modeling of periodic multilayered elastic composites, *Int. J. Engng. Sci.*, 25, 549 -559.65, 223-238.
15. Perkowski D. M., Matysiak S. J., Kulchytsky-Zhyhailo R., (2007), On contact problem of an elastic laminated half-plane with a boundary normal to layering, *Composites Science and Technology* (in press).
16. Potebrija B.J., (1984), *Mechanics of composite materials*, Izd. Moscow University (in Russian).
17. Pusz P., (1992), On the stress distribution in a microperiodic two-layered composite with a crack normal to the layering, *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 42, 531-542.
18. Sneddon J. N., (1966), *Mixed boundary value problems in potential theory*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam.
19. Sanchez-Palencia E., (1980), *Nonhomogeneous media and vibration theory*, Springer, Berlin.
20. Woźniak Cz. (1987): A nonstandard method of modeling of thermoelastic periodic composites, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 25, 1987, p. 483-499.

ON THE CRACK PROBLEM NORMAL TO THE LAYERING IN A PERIODIC LAMINATED BODY

Abstract: The two-dimensional problem of crack normal to the layering is considered. The nonhomogeneous body is composed of periodically repeated two constituent laminae. The homogenized model with microlocal parameters given by Woźniak (1987), Matysiak and Woźniak (1987) is applied to find an approximate solution to the problem. The problem is reduced to a well-known dual integral equations. Numerical results, which show the influence of geometrical and mechanical properties of composite constituents on SIF distributions are presented in figures.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr W/WM/2/05 realizowanego w Politechnice Białostockiej, finansowanego ze środków MNiSW.