

# DWUWYMIAROWE ZAGADNIENIA NIEJEDNORODNEJ PÓLPRZESTRZENI SPRĘŻYTEJ OBCIĄŻONEJ NA JEJ POWIERZCHNI

Roman KULCZYCKI-ŻYHAJŁO\*, Gabriel ROGOWSKI\*, Waldemar KOŁODZIEJCZYK\*

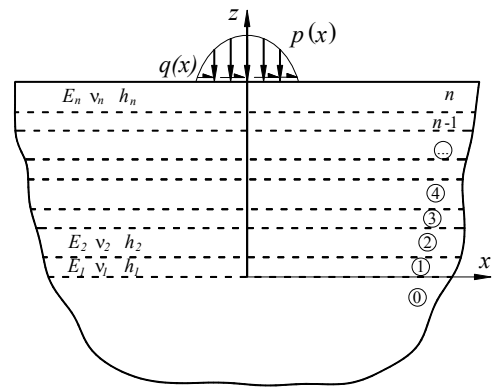
\*Wydział Mechaniczny, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

ksh@pb.bialystok.pl, gabrielkis@doktoranci.pb.edu.pl, waldekk@pb.edu.pl

**Streszczenie:** Rozpatrzono dwuwymiarowe zagadnienia teorii sprężystości dotyczące obciążenia powierzchni półprzestrzeni sprężystej pokrytej niejednorodną warstwą innego materiału sprężystego. Warstwę o zmieniających się właściwościach mechanicznych modelowano skończoną ilością warstw o stałych właściwościach mechanicznych.

## 1. WSTĘP

Postępy w technologii powłokowej powodują coraz szersze wykorzystywanie twardych warstw wierzchnich dla poprawienia właściwości trybologicznych powierzchni ślizgowych. Pozwalają one zmniejszyć współczynniki tarcia i wielkość zużycia, a jednocześnie nie powodują zmiany masy materiału. Punktem słabości w użyciu warstw wierzchnich jest ich pękanie (rozdzielenie, rozerwanie) bądź też rozwarstwienie i odłupywanie się na złączu warstwa/podłoże. W większości opracowań (Diao i inni, 1994, 1999; Kouitat Njiawa i inni, 1998, 1999; Schwarzer i inni, 1999, 2000; Houmid Bennani i Takadoun, 1999; Shi i Ramalingam, 2001; Abdul-Baqi i Van der Giessen, 2002; Bragallini i inni, 2003; Torskaya i Goryacheva, 2003; Kulchytsky-Zhyhailo i Rogowski, 2006) zakłada się, że warstwa jest jednorodna lub rozpatruje się kilka warstw (przeważnie 2-4 warstwy) o stałych właściwościach mechanicznych. Równolegle są rozwiązywane zagadnienia, w których moduł Younga lub moduł Kirchhofa zmieniają się wzdłuż grubości warstwy według zależności wykładniczej lub potęgowej (Giannakopoulos i Pallot, 2000; Guler i Erdogan, 2004, 2006, 2007). W obu tych przypadkach równania teorii sprężystości o zmiennych współczynnikach można sprowadzić do zastępczego układu równań o stałych współczynnikach. Pozwala to otrzymać rozwiązanie zagadnienia w postaci analitycznej. Alternatywnym podejściem do rozwiązania zagadnień dotyczących warstwy o zmieniających się właściwościach mechanicznych jest zastąpienie jej skończoną, wystarczającą dużą (co najmniej 10) ilością warstw o stałych właściwościach mechanicznych. Otrzymaniu analitycznego rozwiązania zagadnienia dotyczącego lokalnego obciążenia powierzchni uzyskanego ośrodka niejednorodnego (rys. 1) jest poświęcony niniejszy referat. Ograniczymy się do przypadku zagadnień dwuwymiarowych rozpatrywanych w ramach teorii płaskiego odkształcenia. W celu weryfikacji otrzymanego rozwiązania zostaną rozważone dwa zagadnienia dotyczące obciążenia ośrodka niejednorodnego ciśnieniem Hertza. W pierwszym zagadnieniu rozpatrzemy ośrodek warstwowy o strukturze periodycznej.



Rys. 1. Schemat zagadnienia

W zagadnieniu drugim rozwiążemy zagadnienie teorii sprężystości dotyczące obciążenia ciśnieniem Hertza jednorodnej półprzestrzeni izotropowej pokrytej warstwą materiału, której moduł Younga zmienia się wzdłuż jej grubości według zależności wykładniczej.

$$E(y) = E_r \exp(\beta y), \quad \beta = h^{-1} \ln(E_p/E_r), \quad y < H, \quad (1)$$

gdzie  $h=H/a$ ,  $H$  – grubość warstwy,  $a$  – połowa szerokości pasma obciążenia,  $E_p$  – moduł Younga na powierzchni warstwy wierzchniej,  $E_r$  – moduł Younga na powierzchni rdzenia. Zależność (1) została tak dobrana, że moduł Younga w całym ośrodku zmienia się w sposób ciągły.

## 2. MODEL MATEMATYCZNY ZAGADNIENIA

Rozkład przemieszczeń i naprężeń w rozpatrywanym ośrodku niejednorodnym otrzymuje się w wyniku rozwiązywania następującego brzegowego zagadnienia teorii sprężystości: równania (Nowacki (1988)):

$$(1 - 2\nu_i) \Delta \mathbf{u}_i + \text{grad} \theta_i = 0, \quad i=0,1,\dots,n, \quad (2)$$

warunki brzegowe (Chen i Engel, 1972):

$$\sigma_{xz}^{(n)}(x, h) = -q(x)H(1 - x^2), \quad (3a)$$

$$\sigma_{zz}^{(n)}(x, h) = -p(x)H(1 - x^2), \quad (3b)$$

$$u_x^{(i-1)}(x, h_i) = u_x^{(i)}(x, h_i), \quad i=1,2,\dots,n, \quad (4a)$$

$$u_z^{(i-1)}(x, h_i) = u_z^{(i)}(x, h_i), \quad i=1,2,\dots,n, \quad (4b)$$

$$\sigma_{xz}^{(i-1)}(x, h_i) = \sigma_{xz}^{(i)}(x, h_i), \quad i=1,2,\dots,n, \quad (4c)$$

$$\sigma_{zz}^{(i-1)}(x, h_i) = \sigma_{zz}^{(i)}(x, h_i), \quad i=1,2,\dots,n, \quad (4d)$$

$$\sigma^{(i)} \rightarrow 0, \quad x^2 + z^2 \rightarrow \infty, \quad i=0,1,\dots,n. \quad (5)$$

Należy zaznaczyć, że równania określone w półprzestrzeni sprężystej (ośrodku „0”) mają postać (2), jeśli półprzestrzeń jest jednorodna i izotropowa. W zagadnieniu, dotyczącym obciążenia półprzestrzeni warstwowej o strukturze periodycznej, równania (2) z indeksem „0” zastąpimy równaniami opisującymi zastępczy ośrodek homogenizowany (Woźniak, 1987; Matysiak and Woźniak, 1987).

We wzorach (3)-(5) wprowadzono oznaczenia:  $\mathbf{u}$  – wektor przemieszczeń,  $\sigma$  – tensor naprężeń,  $\theta = \text{div} \mathbf{u}$  – odkształcenie objętościowe,  $\nu$  – współczynnik Poissona,  $x, z$  – bezwymiarowe współrzędne kartezjańskie odniesione do połowy szerokości pasma obciążenia  $a, p(x)$  i  $q(x)$  – rozkłady normalnego i stycznego obciążenia,  $z=h_i$  – dolna powierzchnia  $i$ -tej warstwy,  $z=h$  – powierzchnia ośrodka niejednorodnego,  $i$  – indeks odpowiadający numerowi ośrodka sprężystego,  $H(x)$  – funkcja Heaviside’a.

### 3. METODA ROZWIĄZYWANIA

Ogólne rozwiązanie układu równań (2) spełniające warunki w nieskończoności (5) w przestrzeni transformacji Fouriera (Sneddon, 1972):

$$\tilde{f}(s, z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z) \exp(-ixs) dx \quad (6)$$

ma postać:

$$2is\tilde{u}_x^{(j)}(s, z) = 2a_{4j+1}(s)|s| \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) + 2a_{4j+2}(s)|s| \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) + a_{4j-1}(s) \left\{ \begin{array}{l} (2 + d_j) \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) + \\ d_j(h_{j+1} - z)|s| \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) \end{array} \right\} + a_{4j}(s) \left\{ \begin{array}{l} (2 + d_j) \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) + \\ d_j(h_{j+1} - z)|s| \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) \end{array} \right\} \quad (7a)$$

$$h_j \leq z \leq h_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$2\tilde{u}_z^{(j)}(s, z) = 2a_{4j+1}(s) \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) + 2a_{4j+2}(s) \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) + a_{4j-1}(s) \left\{ d_j(h_{j+1} - z) \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) \right\} + a_{4j}(s) \left\{ d_j(h_{j+1} - z) \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) \right\} \quad (7b)$$

$$h_j \leq z \leq h_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$2is\tilde{u}_x^{(0)}(s, z) = -2a_2(s)|s| \exp(|s|z) - a_1(s)(2 + d_0 + d_0|s|z) \exp(|s|z), \quad z \leq 0, \quad (8a)$$

$$2\tilde{u}_z^{(0)}(s, z) = d_0a_1(s)z \exp(|s|z) + 2a_2(s) \exp(|s|z), \quad z \leq 0, \quad (8b)$$

$$\mu_j^{-1} \tilde{\sigma}_{xx}^{(j)}(s, z) = 2a_{4j+1}(s)|s| \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) + 2a_{4j+2}(s)|s| \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) + a_{4j-1}(s) \left\{ \begin{array}{l} (2d_j + 1) \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) + \\ d_j(h_{j+1} - z)|s| \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) \end{array} \right\} + a_{4j}(s) \left\{ \begin{array}{l} (2d_j + 1) \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) + \\ d_j(h_{j+1} - z)|s| \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) \end{array} \right\} \quad (9a)$$

$$h_j \leq z \leq h_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mu_j^{-1} \tilde{\sigma}_{zz}^{(j)}(s, z) = -2a_{4j+1}(s)|s| \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) - 2a_{4j+2}(s)|s| \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) - a_{4j-1}(s) \left\{ \begin{array}{l} \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) + \\ d_j(h_{j+1} - z)|s| \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) \end{array} \right\} - a_{4j}(s) \left\{ \begin{array}{l} \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) + \\ d_j(h_{j+1} - z)|s| \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) \end{array} \right\} \quad (9b)$$

$$h_j \leq z \leq h_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$i\mu_j^{-1} \tilde{\sigma}_{xz}^{(j)}(s, z) \text{sgn}(s) = -2a_{4j+1}(s)|s| \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) - 2a_{4j+2}(s)|s| \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) - a_{4j-1}(s) \left\{ \begin{array}{l} (d_j + 1) \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) + \\ d_j(h_{j+1} - z)|s| \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) \end{array} \right\} - a_{4j}(s) \left\{ \begin{array}{l} (d_j + 1) \sinh(|s|(h_{j+1} - z)) + \\ d_j(h_{j+1} - z)|s| \cosh(|s|(h_{j+1} - z)) \end{array} \right\} \quad (9c)$$

$$h_j \leq z \leq h_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\mu_0^{-1} \tilde{\sigma}_{xx}^{(0)}(s, z) = -2a_2(s)|s| \exp(|s|z) - (2d_0 + 1 + d_0|s|z)a_1(s) \exp(|s|z), \quad z \leq 0, \quad (10a)$$

$$\mu_0^{-1} \tilde{\sigma}_{zz}^{(0)}(s, z) = a_1(s)(1 + d_0|s|z) \exp(|s|z) + 2a_2(s)|s| \exp(|s|z), \quad z \leq 0, \quad (10b)$$

$$i \text{sgn}(s) \mu_0^{-1} \tilde{\sigma}_{xz}^{(0)}(s, z) = -2a_2(s)|s| \exp(|s|z) - a_1(s)(1 + d_0|s|z) \exp(|s|z), \quad z \leq 0, \quad (10c)$$

$$\sigma_{yy}^{(j)}(x, z) = \nu_j \left( \sigma_{xx}^{(j)}(x, z) + \sigma_{zz}^{(j)}(x, z) \right), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (11)$$

gdzie  $\mu$  – moduł Kirchhoffa,  $d_j = 1/(1-2\nu_j)$ ,  $j=0,1,\dots,n$ ,  $h_{n+1}=h$ .

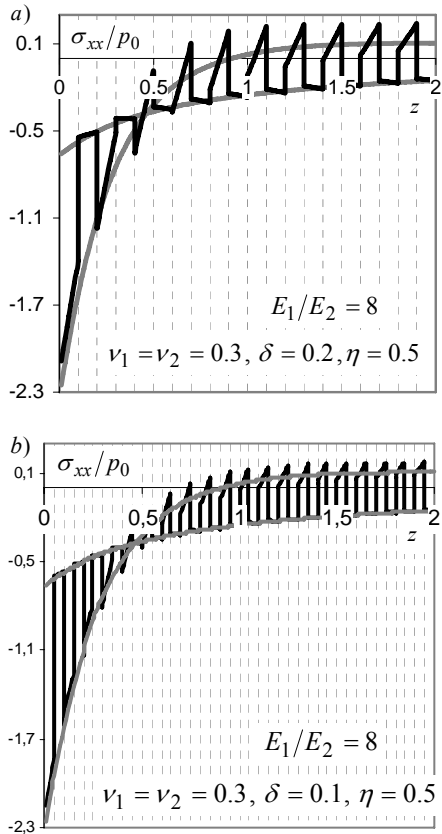
Zależności (8), (10) zostały zapisane dla jednorodnego izotropowego ośrodka „0”. W przypadku, gdy ośrodek ten jest ośrodkiem homogenizowanym, należy ich zastąpić wzorami, które można znaleźć w pracy Kulchytskiego-Zyhaila i Kołodziejczyka, 2005.

Wzory (7)-(10) zawierają  $4n+2$  nieznanymi funkcji  $a_i(s)$ ,  $i=1,2,\dots,4n+2$ . Funkcje te otrzymujemy rozwiązując układ równań liniowych, który powstaje na skutek spełnienia warunków brzegowych (3) i (4).

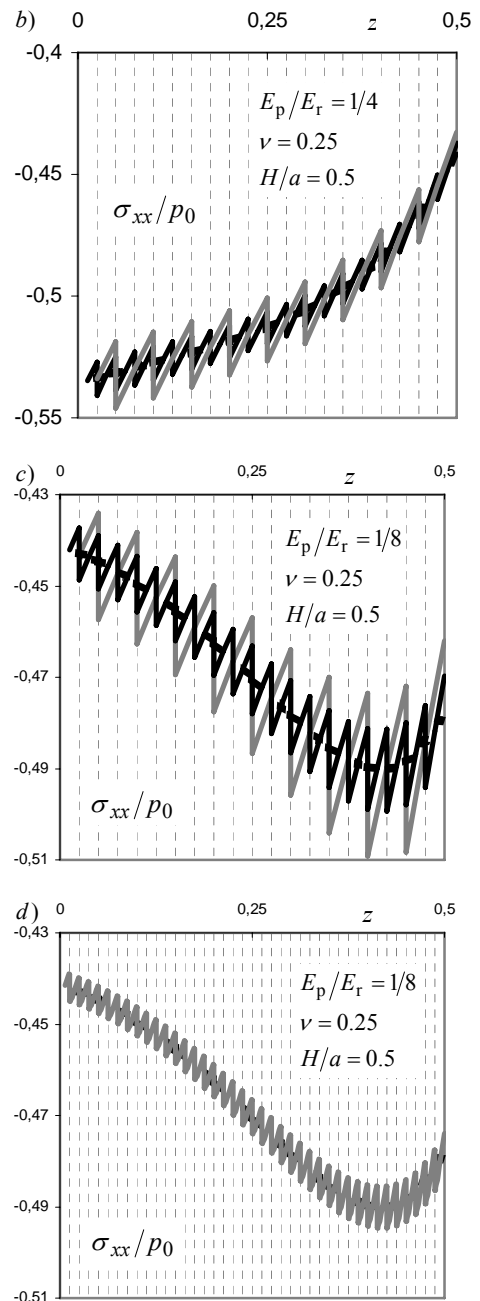
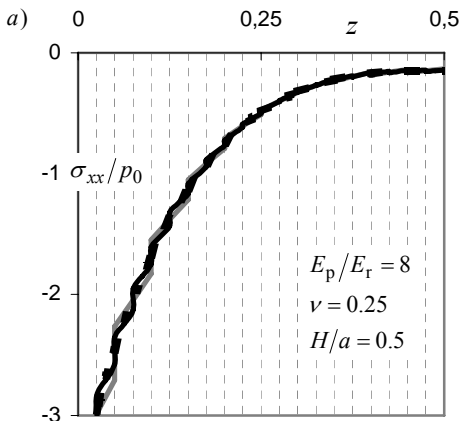
4. PRZYKŁADY

Rozpatrzmy półprzestrzeń warstwową o strukturze periodycznej, której powierzchnia jest obciążona naciskami Hertza:

$$p(x) = p_0 \sqrt{1-x^2} \quad (12)$$



Rys. 2. Rozkład naprężenia  $\sigma_{xx}$  wzdłuż osi  $z$  w zagadnieniu dotyczącym obciążenia naciskami Hertza powierzchni półprzestrzeni warstwowej o strukturze periodycznej (czarna krzywa – rozwiązanie opierające się na klasycznej teorii sprężystości, szare krzywe – model półprzestrzeni homogenizowanej, przerywane linie – powierzchnie rozdzielające warstwy)



Rys. 3. Rozkład naprężenia  $\sigma_{xx}$  wzdłuż osi  $z$  w zagadnieniu dotyczącym obciążenia naciskami Hertza powierzchni półprzestrzeni jednorodnej pokrytej warstwą, której moduł Younga zmienia się wzdłuż jej grubości według zależności wykładniczej (szara linia –  $n=10$  (rys a-c) lub 40 (rys d), czarna linia  $n=20$ , przerywana linia – rozwiązanie analityczne uwzględniające zależność  $E=E(z)$ , przerywane linie pionowe – powierzchnie rozdzielające warstwy)

Półprzestrzeń tworzą periodycznie ułożone warstwy. Komórka periodyczności składa się z dwóch warstw o grubościach odpowiednio  $l_1=\eta\delta a$  i  $l_2=(1-\eta)\delta a$ , modułach Younga  $E_1$  i  $E_2$  oraz współczynnikach Poissona  $\nu_1$  i  $\nu_2$ . Parametr  $\delta$  jest bezwymiarową grubością komórki periodyczności odniesioną do połowy szerokości pasma obciążenia  $a$ .

Półprzestrzeń niejednorodną modelujemy półprzestrzenią homogenizowaną pokrytą  $2n$  warstwami o stałych zmieniających się periodycznie właściwościach

mechanicznych. Naprężenie  $\sigma_{xx}$  doznaje skoku na każdej powierzchni rozdzielającej warstwy (rys. 2). Zmniejszając grubość komórki periodyczności, otrzymujemy obraz, który ma dwie obwiednie. Obwiednie te są zgodne z szarymi krzywymi na rys. 2, które są uzyskane wskutek modelowania całej półprzestrzeni warstwowej ośrodkiem homogenizowanym (Woźniak, 1987; Matysiak and Woźniak, 1987). Znaczący to, że w przypadku, gdy stosunek pomiędzy grubością komórki periodyczności a szerokością pasma obciążenia jest mały, rozwiązanie zagadnienia klasycznej teorii sprężystości dla ośrodka warstwowego nieznacznie różni się od rozwiązania zagadnienia, w którym rozważa się zastępczy ośrodek homogenizowany.

Rozważmy półprzestrzeń jednorodną pokrytą warstwą materiału, której moduł Younga zmienia się wzdłuż jej grubości według zależności (1). Analityczne rozwiązanie zagadnienia (Kulczycki i Rogowski, 2005) porównamy z rozwiązaniem, które uzyskamy, zastępując warstwę o zmiennych właściwościach mechanicznych  $n$  warstewkami o stałych właściwościach (rys. 3).

#### LITERATURA

1. **Abdul-Baqi A., Van der Giessen E.** (2002), Numerical analysis of indentation-induced cracking of brittle coatings on ductile substrates, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 39, 1427-1442.
2. **Bragallini G.M., Cavatorta M.P., Sainsot P.** (2003), Coated contacts: a strain approach, *Tribology International*, Vol. 36, 935-941.
3. **Chen W.T., Engel P.** (1972), Impact and contact stress analysis in multilayered media, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 8, 1257-1281.
4. **Diao D. F., Kato K., Hayashi K.** (1994), The maximum tensile stress on a hard coating under sliding friction, *Tribology International*, Vol. 27, 267-272.
5. **Diao D.F.** (1999), Finite element analysis on local yield map and critical maximum contact pressure for yielding in hard coating with an interlayer under sliding contact, *Tribology International*, Vol. 32, 25-32.
6. **Giannakopoulos A.E., Pallot P.** (2000), Two-dimensional contact analysis of elastic graded materials, *J. Mech. Physics Solids*, Vol. 48, 1597-1631.
7. **Guler M.A., Erdogan F.** (2004), Contact mechanics of graded coatings, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 41, 3865-3889.
8. **Guler M.A., Erdogan F.** (2006), Contact mechanics of two deformable elastic solids with graded coatings, *Mechanics of Materials*, Vol. 38, 633-647.
9. **Guler M.A., Erdogan F.** (2007), The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 49, 161-182.
10. **Houmid Bennani N., Takadoum J.** (1999), Finite element model of elastic stresses in thin coatings submitted to applied forces, *Surface & Coatings Techn.*, Vol. 111, 80-85.
11. **Kouitat Njiawa R., Consiglio R., J. von Stebut** (1998), Boundary element modelling of coated materials in static and sliding ball-flat elastic contact, *Surface & Coatings Technology*, Vol. 102, 148-153.
12. **Kouitat Njiawa R., J. von Stebut** (1999), Boundary element modelling as a surface engineering tool: application to very thin coatings, *Surface & Coatings Techn.*, 116-119 (1999), 573-579.
13. **Kulczycki R., Rogowski G.** (2005), Pole naprężeń w półpłaszczyźnie niejednorodnej wywołane ciśnieniem Hertza, *Materiały III Sympozjum Mechaniki Zniszczenia Materiałów i Konstrukcji*, Augustów.
14. **Kulchytsky-Zyhailo R., Kolodziejchik V.** (2005), Stress field caused by Hertz's pressure in non-uniform half-plane with periodic structure, *Friction and Wear*, Vol.26, No. 4, 358-366.
15. **Kulchytsky-Zyhailo R., Rogowski G.** (2006), Tensile stresses in hard coating in two-dimensional contact problem with friction, *Friction and Wear*, Vol. 27, No. 1, 33-42.
16. **Matysiak S.J., Woźniak Cz.** (1987), Micromorphic effects in a modeling of periodic multilayered elastic composites, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 25, 549-559.
17. **Nowacki W.** (1970), *Teoria sprężystości*, Warszawa, PWN.
18. **Schwarzer N.** (2000), Coating desing due to analytical modeling of mechanical contact problems on multiplayer systems, *Surface & Coatings Techn.*, Vol. 133-134, 397-402.
19. **Schwarzer N., Richter F., Hecht G.** (1999), The elastic field in a coated half-space under Hertzian pressure distribution, *Surface & Coatings Techn.*, Vol. 114, 292-304.
20. **Sneddon I.N.** (1972), *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, New York.
21. **Shi Z., Ramalingam S.** (2001), Stresses in coated solids due to normal and shear tractions on an elliptical region, *Surface & Coatings Techn.*, Vol. 138, 192-204.
22. **Torskaya E.V., Goryacheva I.G.** (2003), The effect of interface imperfection and external loading on the axi-symmetric contact with a coated solid, *Wear*, Vol. 254, 538-545.
23. **Woźniak Cz.** (1987), A nonstandard method of modelling of thermoelastic periodic composites, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 25, 483-499.

#### TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF NON-HOMOGENEOUS ELASTIC HALF-SPACE LOADED ON ITS BOUNDARY SURFACE

**Abstract:** The paper deals with a two-dimensional problem of an elastic non-homogeneous half-space loaded on its boundary. The body is compared of a non-homogeneous layer and a homogeneous half-space. The layer with changing material properties is described by a finite number of homogeneous layers.

Pracę wykonano w ramach realizacji projektu badawczego nr W/WM/2/05 realizowanego w Politechnice Białostockiej.