

Wiktor Jakowluk, Michał Czech¹

PORÓWNANIE PLANU KOMPLETNEGO I PLANU PESOČINSKIEGO W ZASTOSOWANIU DO WYZNACZANIA ROZKŁADU NATEŻENIA OŚWIETLENIA

Streszczenie: W pracy przeprowadzono analizę porównawczą planów trójwartościowych kompletnego oraz Pesočinskiego w zastosowaniu do predykcji rozkładu natężenia oświetlenia we wnętrzach. Funkcję obiektu badań przyjęto w postaci wielomianu algebraicznego drugiego stopnia ze współdziałaniami pierwszego rzędu.

Słowa kluczowe: wielokrotne odbicia, planowanie doświadczeń, statystyka F-Snedecora

1. Wprowadzenie

Analizę rozkładu natężenia oświetlenia we wnętrzu pomieszczenia wykonano z wykorzystaniem planu trójwartościowego kompletnego, oznaczanego jako PS/DK-3¹ oraz planu trójwartościowego Pesočinskiego, oznaczanego jako PS/DS-P: Pe_i, dla pięciu zmiennych wejściowych: $x_1 = \rho_1$ – współczynnik odbicia powierzchni sufitu, $x_2 = \rho_2$ – współczynnik odbicia powierzchni ścian, $x_3 = h_m$ – wysokość usytuowania opraw oświetleniowych nad płaszczyzną roboczą, x_4 – odcięta położenia punktu na płaszczyźnie roboczej modelu pomieszczenia, x_5 – rzędna położenia punktu na płaszczyźnie roboczej modelu pomieszczenia.

Założono $r \geq 3$ – krotne powtórzenie pomiarów wartości wielkości wyjściowej (z) dla każdego układu planu doświadczenia, oprócz centralnego układu planu, dla którego $r = 10$. Na tej podstawie wykonane zostały pomiary wielkości wyjściowej $z^{(u)}_j = E_{3j}^{(u)}$ – natężenie oświetlenia na płaszczyźnie roboczej modelu po-

¹ Wydział Informatyki, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok

mieszczenia, w punkcie opisanym przez zmienne wejściowe x_4, x_5 , gdzie: $u = 1, 2, \dots, n$, dla u – tego układu planu doświadczenia, natomiast n zależy od przyjętego planu doświadczenia; $j = 1, \dots, r$.

Funkcję obiektu badań przyjęto w postaci wielomianu algebraicznego stopnia drugiego, zawierającego składniki liniowe, kwadratowe oraz interakcje o postaci:

$$z = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_jx_j + a_{11}x_1^2 + \dots + a_{jj}x_j^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{i-1,i}x_{i-1}x_i \quad (1)$$

$$N_b = \frac{1}{2}(i+1)(i+2)$$

gdzie:

a_i – współczynniki funkcji aproksymującej z ,

N_b – liczba współczynników wielomianu aproksymującego,

i – liczba wielkości wejściowych x_i , gdzie $i = 5$.

2. Model pomieszczenia

Stanowisko pomiarowe składa się z modelu pomieszczenia o wymiarach 11,65x5,65x5,35 [m], wykonanego w skali 1:10. W pomieszczeniu można zastosować trzy rodzaje oświetlenia sztucznego klasy pierwszej, trzeciej i piątej [1]. W skład modelu pomieszczenia wchodzi także cztery komplety ścian o różnych współczynnikach odbicia. W analizie statystycznej zostaną wykorzystane pomiary natężenia oświetlenia (z) na płaszczyźnie roboczej makiety pomieszczenia dla klasy I oświetlenia. Dokładny opis stanowiska pomiarowego można znaleźć w pracy współautora [2].

3. Charakterystyka obiektu badań

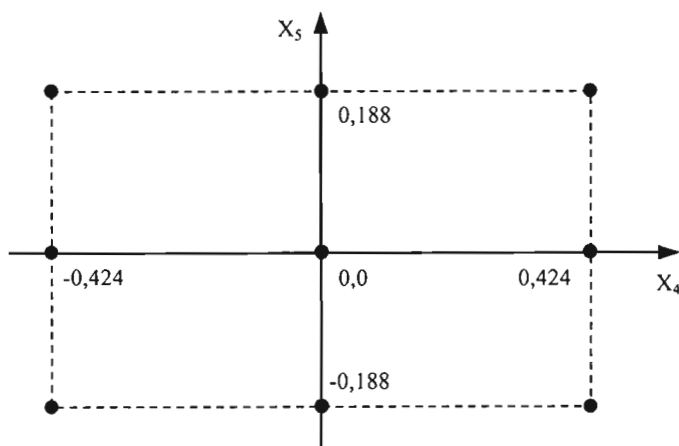
Wartości wielkości wejściowych dla $i = 5$, pochodzące z badań eksperymentalnych, zestawiono w tabeli 1.

Tabela 1

Zakresy wartości wielkości wejściowych

i	$x_1 = \rho_1$	$x_2 = \rho_2$	$x_3 = h_m$ [m]	x_4 [m]	x_5 [m]
x_{min}	0,268	0,275	0,235	- 0,424	- 0,188
$x_{\bar{r}}$	0,474	0,490	0,325	0,000	0,000
x_{max}	0,706	0,697	0,415	0,424	0,188

Wartości współczynników odbicia, zamieszczone w tabeli 1, są wynikiem badań eksperymentalnych, dlatego $x_{sr} \approx \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$. Położenie punktów pomiarowych wartości wielkości wyjściowej (z), na płaszczyźnie roboczej makiety pomieszczenia, ilustruje rysunek 1.

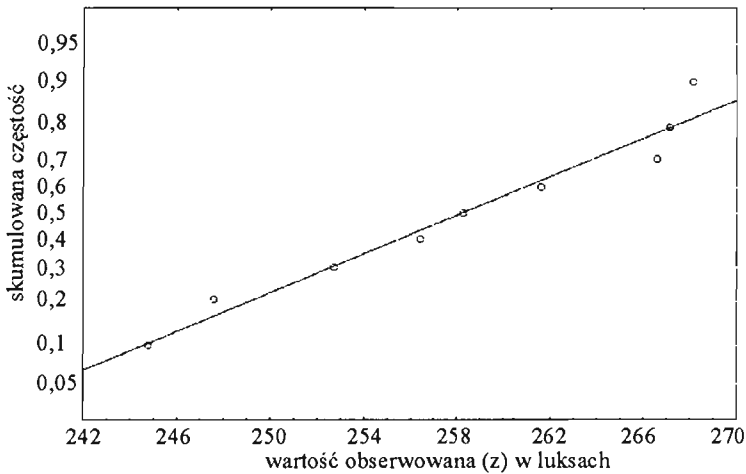


Rys. 1. Schemat rozmieszczenia punktów pomiarowych na płaszczyźnie roboczej makiety pomieszczenia

Przyjęto trójkratne powtórzenie pomiarów wartości wielkości wyjściowej (z) dla każdego układu planu, z wyjątkiem centralnego układu planu, dla którego pomiary wielkości wyjściowej powtórzono dziesięciokrotnie.

4. Ocena normalności rozkładu zmiennej wyjściowej (z)

Sprawdzenie normalności rozkładu wykonano z wykorzystaniem centralnego układu planu, tj. ($x_1 = 0,474$; $x_2 = 0,490$; $x_3 = 0,325$), dla każdego punktu pomiarowego, (rysunek 1). Przykładowy wykres skumulowanej częstości zmiennej wyjściowej (z), w punkcie o współrzędnych $(-0,424; 0,188)$, przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Wykres skumulowanej częstości zmiennej wyjściowej (z) o rozkładzie normalnym

Na rysunku 2 jest 9 punktów pomiarowych; brak punktu, dla którego wartość skumulowana wynosi 1. Wynika to stąd, że na osi rzędnych nie istnieje taka skończona wartość.

Chcąc stwierdzić, czy korelacja zmiennej wyjściowej (z) jest rzeczywiście istotna, można zweryfikować hipotezę zerową o postaci $H_0 : R = 0$ wobec hipotezy alternatywnej $H_1 : R \neq 0$.

Prawdopodobieństwo wartości większej lub równej R

Tabela 2

stopnie swobody N - 2	współczynnik korelacji liniowej R dla punktów o współrzędnych:									wartość R_k na poziomie
	0;	0,424;	0,424;	0;	-0,424;	-0,424;	-0,424;	0;	0,424;	
	0	0	0,188	0,188	0,188	0	-0,188	-0,188	-0,188	0,001
7	0,939	0,958	0,944	0,983	0,979	0,972	0,957	0,926	0,950	0,898

Z tabeli 2 widać, że jeśli przy obliczaniu współczynnika korelacji R z 9 obserwacji otrzyma się wartość większą niż wartość krytyczna $R_k = 0,898$ [4], wtedy hipotezę, że nie ma korelacji $H_0 : R = 0$ można odrzucić z szansą popełnienia błędu wynoszącą jedynie 0,001.

5. Plan doświadczenia

Do wyznaczenia rozkładu natężenia oświetlenia na płaszczyźnie roboczej makiety pomieszczenia wykorzystano plan statyczny zdeterminowany kompletny PS/DK-3ⁱ oraz plan polisekcyjny specjalny Pesočinskiego PS/DS-P:Pe_i. Liczba wielkości wejściowych $i = 5$ [3].

5.1. Plan kompletny trójwartościowy – model 1

Funkcję obiektu badań przyjęto w postaci wielomianu algebraicznego stopnia drugiego (1). Współczynniki wielomianu aproksymującego ($N_b = 1$) wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów. Założono poziom istotności $\alpha = 0,05$, a liczbę układów planu $n = 3^i = 243$ (plan trójwartościowy dla $i = 5$).

Tabela 3

Przedziały ufności i testy istotności współczynników regresji wielokrotnej ($N_b = 21$)

współczynniki regresji zmiennej (z); $R^2 = 0,9593$						
wielkość wejściowa	współczynnik regresji a_i	błąd standardowy S_{ai}	$t_i = a_i/S_{ai}$	poziom istotności α	-95,% granica ufności	+95,% granica ufności
średn./stała	708,33	35,78	19,79	0,0000	637,81	778,85
(1)X1 (L)	-155,70	53,02	-2,94	0,0037	-260,19	-51,21
X1 (Q)	29,03	44,70	0,65	0,5167	-59,06	117,12
(2)X2 (L)	-684,33	55,65	-12,30	0,0000	-794,00	-574,65
X2 (Q)	726,28	47,79	15,20	0,0000	632,10	820,47
(3)X3 (L)	-1126,89	179,98	-6,26	0,0000	-1481,57	-772,21
X3 (Q)	797,02	263,55	3,02	0,0028	277,63	1316,40
(4)X4 (L)	39,09	17,39	2,25	0,0256	4,81	73,36
X4 (Q)	-239,57	11,87	-20,17	0,0000	-262,97	-216,17
(5)X5 (L)	-101,50	39,22	-2,59	0,0103	-178,80	-24,20
X5 (Q)	-1192,56	60,40	-19,74	0,0000	-1311,59	-1073,53
1L wz.2L	392,64	32,59	12,05	0,0000	328,41	456,86
1L wz.3L	59,55	76,55	0,78	0,4375	-91,31	210,40
1L wz.4L	-11,72	16,25	-0,72	0,4716	-43,74	20,30
1L wz.5L	-15,13	36,65	-0,41	0,6801	-87,35	57,09
2L wz.3L	276,58	79,34	3,49	0,0006	120,23	432,94
2L wz.4L	-24,42	16,84	-1,45	0,1485	-57,61	8,77
2L wz.5L	20,41	37,98	0,54	0,5916	-54,44	95,26
3L wz.4L	-17,88	39,56	-0,45	0,6516	-95,84	60,07
3L wz.5L	123,33	89,22	1,38	0,1683	-52,49	299,14
4L wz.5L	-19,78	18,94	-1,04	0,2973	-57,10	17,54

gdzie:

średn./stała – oznacza wyraz wolny,

X1 (L) – oznacza efekt liniowy x_1 ,

X1 (Q) – oznacza efekt kwadratowy x_1^2 ,

1L wz. 2L – oznacza liniową interakcję $x_1 * x_2$,

wartości wytłuszczone w tabeli są wartościami istotnymi.

Dla poziomu ufności $1 - \alpha = 0,95$ i $\nu = n - N_b = 243 - 21 = 222$ stopni swobody odczytujemy z [4] kwantyl $t_{(0,95;222)} = 1,652$.

Jeżeli zweryfikujemy hipotezę $H: a_i = 0$ na poziomie istotności α , przeciw hipotezie alternatywnej k , to otrzymamy:

$k: a_i > 0$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle 1,652; +\infty \rangle$,

$k: a_i < 0$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle -\infty; -1,652 \rangle$. (2)

Z tabeli 2 oraz zależności (2) widać, że hipotezę $H: a_i = 0$ należy odrzucić dla wszystkich a_i wytłuszczonych.

5.2. Plan kompletny trójwartościowy – model 2

Funkcję obiektu badań przyjęto w postaci wielomianu algebraicznego stopnia drugiego, natomiast liczbę współczynników wielomianu aproksymującego ustalono zgodnie z punktem 5.1, $N_b = 12$. Założono poziom istotności $\alpha = 0,05$, natomiast liczbę układów planu $n = 3^i = 243$.

Tabela 4
Przedziały ufności i testy istotności współczynników regresji wielokrotnej dla ($N_b = 12$)

współczynniki regresji zmiennej (z); $R^2 = 0,95796$						
wielkość wejściowa	współczynnik regresji a_i	błąd standardowy S_{ai}	$t_i = a_i/S_{ai}$	poziom istotności α	-95,% granica ufności	+95,% granica ufności
1	2	3	4	5	6	7
średn./stała	692,99	32,30	21,45	0,0000	629,35	756,63
(1)X1 (L)	-107,97	16,78	-6,43	0,0000	-141,04	-74,91
(2)X2 (L)	-684,33	55,45	-12,34	0,0000	-793,58	-575,08
X2 (Q)	726,28	47,62	15,25	0,0000	632,46	820,10
(3)X3 (L)	-1098,17	175,51	-6,26	0,0000	-1443,97	-752,38
X3 (Q)	797,02	262,59	3,04	0,0027	279,64	1314,40
(4)X4 (L)	15,73	2,90	5,43	0,0000	10,02	21,43
X4 (Q)	-239,57	11,83	-20,25	0,0000	-262,88	-216,26

cd. tabeli 4

1	2	3	4	5	6	7
(S)X5 (L)	-58,77	6,53	-9,00	0,0000	-71,64	-45,90
X5 (Q)	-1192,56	60,18	-19,82	0,0000	-1311,13	-1073,99
1L wz.2L	392,64	32,47	12,09	0,0000	328,66	456,61
2L wz.3L	276,58	79,05	3,50	0,0006	120,83	432,34

Dla poziomu ufności $1 - \alpha = 0,95$ i $\nu = n - N_b = 243 - 12 = 231$ stopni swobody odczytujemy z [4] kwantyl $t_{(0,95;231)} = 1,651$.

Jeżeli zweryfikujemy hipotezę $H: a_i = 0$ na poziomie istotności α , przeciw hipotezie alternatywnej k , to otrzymamy:

$k: a_i > 0$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle 1,651; +\infty \rangle$,

$k: a_i < 0$, to zbiorem krytycznym jest $I = \langle -\infty; -1,651 \rangle$. (3)

Z tabeli 3 oraz zależności (3) widać, że hipotezę $H: a_i = 0$ należy odrzucić dla wszystkich a_i .

5.3. Plan Pesočńskiego

Funkcję obiektu badań aproksymowano wielomianem algebraicznym stopnia drugiego, natomiast liczbę współczynników wielomianu aproksymującego ustalono zgodnie z punktem 5.1, $N_b = 12$. Założono poziom istotności $\alpha = 0,05$, natomiast liczbę układów planu $n = 50$ wyznaczono z zależności $(2^{i-2} + 5 \cdot 2^{i-1-1} + n_0)$, gdzie: 2^{i-2} – liczba układów planu frakcyjnego, przy podwójnym kontraście – jądro planu, 2^{i-1-1} – liczba układów planu frakcyjnego przy odpowiednim $x_i = 0$ i odpowiednim kontraście, $n_0 = 2$ – centrum planu) [3].

W celu porównania planu kompletnego PS/DK- 3^i oraz planu Pesočńskiego PS/DS-P: Pe_i , przyjęto wielomian aproksymujący z punktu 5.1, po odrzuceniu nieistotnych współczynników. Wyniki obliczeń dla planu Pesočńskiego zestawiono w tabeli 5.

Tabela 5

Przedziały ufności i testy istotności współczynników regresji wielokrotnej dla ($N_b = 12$)

współczynniki regresji zmiennej (z); $R^2 = 0,9741$						
wielkość wejściowa	współczynnik regresji a_i	błąd standardowy	$t_i = a_i/S_{ai}$	poziom istotności α	-95,% granica ufności	+95,% granica ufności
średn./stała	550,03	75,77	7,26	0,0000	396,64	703,42
(1)X1 (L)	-96,37	30,91	-3,12	0,0035	-158,95	-33,79
(2)X2 (L)	-524,54	129,24	-4,06	0,0002	-786,18	-262,90
X2 (Q)	603,16	120,29	5,01	0,0000	359,64	846,67
(3)X3 (L)	-418,63	435,85	-0,96	0,3429	-1300,95	463,69
X3 (Q)	-156,81	660,90	-0,24	0,8137	-1494,74	1181,12
(4)X4 (L)	13,14	5,65	2,33	0,0254	1,71	24,57
X4 (Q)	-264,51	29,78	-8,88	0,0000	-324,79	-204,23
(5)X5 (L)	-64,11	13,07	-4,91	0,0000	-90,56	-37,66
X5 (Q)	-1460,51	151,46	-9,64	0,0000	-1767,14	-1153,89
1L wz.2L	398,07	59,41	6,71	0,0000	277,81	518,33
2L wz.3L	212,56	140,95	1,51	0,1398	-72,77	497,89

6. Statystyczna weryfikacja adekwatności: test F – Snedecora

Dalsze rozważania dotyczyć będą tylko modelu drugiego planu kompletnego oraz planu Pesočinskiego dla $N_b = 12$. Weryfikację adekwatności z zastosowaniem testu F – Snedecora przeprowadzono w następujący sposób:

- Obliczanie wariancji adekwatności $s^2(z)_a$:

$$s^2(z)_a = \frac{1}{f_2} \sum_{u=1}^n [\bar{z}^{(u)} - \bar{z}^{(u)}]^2 \quad (4)$$

$$f_2 = n - N_b \quad (5)$$

gdzie:

$\bar{z}^{(u)}$ – średnia arytmetyczna wartości wielkości wyjściowej dla u – układu planu doświadczenia ($u = 1, 2, \dots, n$),

$\bar{z}^{(u)}$ – aproksymowana wartość wielkości wyjściowej dla u – układu planu doświadczenia, stanowiąca wartość funkcji aproksymującej.

Wariancja adekwatności pomiarów dla modelu drugiego planu kompletnego wynosi $s^2(z)_a = 244,30 (lx)^2$ dla $f_2 = 243 - 12 = 231$ stopni swobody. Nato-

miast wariancja adekwatności pomiarów dla planu Pesočinskiego wynosi $s^2(z)_a = 229,26 (lx)^2$ dla $f_2 = 50 - 12 = 38$ stopni swobody.

- Obliczanie wariancji niedokładności pomiarów $s^2(z)$ z powtórzeń ($r_u > 1$) w układach planu doświadczenia:

$$s^2(z) = \frac{1}{f_1} \sum_{u=1}^n (r_u - 1) s^2(z)^{(u)} = 137,14 [(lx)^2] \quad (6)$$

$$f_1 = \sum_{u=1}^n (r_u - 1) = 9(3 - 1) = 18 \quad (7)$$

$$s^2(z)^{(u)} = \frac{1}{r_u - 1} \left\{ \sum_{j=1}^{r_u} [z_j^{(u)}]^2 - \bar{z}^{(u)} \sum_{j=1}^{r_u} z_j^{(u)} \right\} \quad (8)$$

$$\bar{z}^{(u)} = \frac{1}{r_u} \sum_{j=1}^{r_u} z_j^{(u)} \quad (9)$$

gdzie:

r_u – liczba powtórzeń pomiarów dla każdego układu planu doświadczenia,

$z_j^{(u)}$ – wartości wielkości wyjściowej w identycznych układach planu.

Wariancja niedokładności pomiarów $s^2(z)$, obliczona dla modelu drugiego planu kompletnego oraz planu Pesočinskiego jest identyczna.

- Obliczenie ilorazu F :

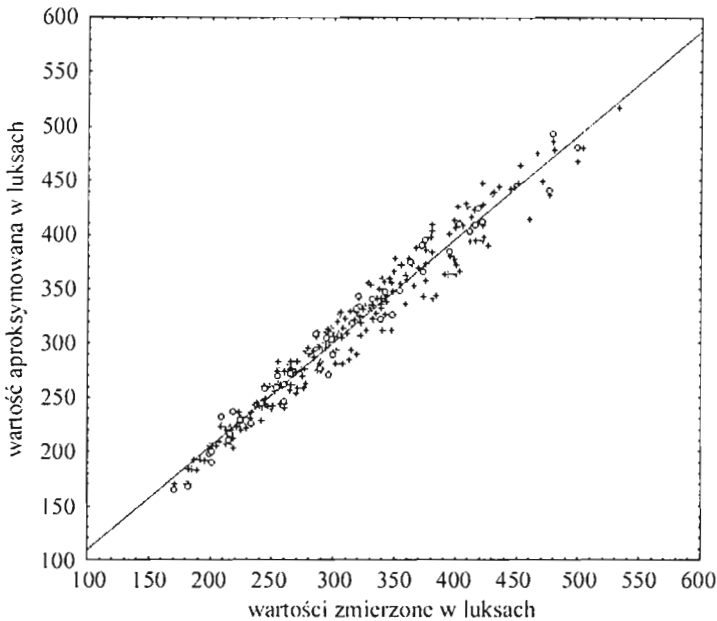
$$F = \frac{s^2(z)_a}{s^2(z)} \quad (10)$$

Wartość ilorazu dla modelu drugiego planu kompletnego wynosi $F = 1,78$, natomiast dla planu Pesočinskiego $F = 1,67$.

Wartość krytyczna ilorazu dla modelu drugiego planu kompletnego wynosi $F^* = 1,94$ [4], dla przyjętej wartości poziomu istotności $\alpha = 0,05$. Ponieważ $F < F^*$, to przyjęta funkcja aproksymująca jest adekwatna.

Wartość krytyczna ilorazu dla planu Pesočinskiego wynosi $F^* = 2,07$ [4], dla przyjętej wartości poziomu istotności $\alpha = 0,05$. Ponieważ $F < F^*$, to przyjęta funkcja aproksymująca jest adekwatna.

Graficzną weryfikację adekwatności planu kompletnego oraz Pesočinskiego przedstawiono na rysunku 3.



Rys. 3. Wykres wartości przewidywanych i aproksymowanych planu kompletnego oraz Pesočinskigo, + – plan kompletny, o – plan Pesočinskigo

7. Statystyczna weryfikacja istotności współczynnika korelacji wielowymiarowej R

Wartość współczynnika korelacji wielowymiarowej modelu drugiego planu kompletnego odczytano z tabeli 4, $R^2 = 0,958$, a odpowiadającą mu statystykę F obliczono z poniższego wzoru:

$$F = \frac{(n - N_b)R^2}{(N_b - 1)(1 - R^2)} = 479,00$$

$$f_2 = n - N_b = 243 - 12 = 231$$

$$f_1 = N_b - 1 = 12 - 1 = 11$$

(11)

Wartość krytyczna dla powyższej statystyki wynosi $F^* = 2,43$ [4], dla przyjętej wartości poziomu istotności $\alpha = 0,05$. Ponieważ $F > F^*$, współczynnik korelacji wielorakiej R – jest istotny. Wartość współczynnika korelacji wielokrotnej planu Pesočinskigo odczytano z tabeli 5, $R^2 = 0,974$, a odpowiadającą mu statystykę

$F = 129,41$ obliczono na podstawie (11), dla $f_2 = n - N_b = 50 - 12 = 38$ stopni swobody w liczniku i $f_1 = N_b - 1 = 12 - 1 = 11$ stopni swobody w mianowniku. Wartość krytyczna powyższej statystyki wynosi $F^* = 2,53$ [4]. Ponieważ $F > F^*$, współczynnik korelacji wielorakiej R – jest istotny.

8. Otrzymane wyniki – błędy aproksymacji

Ustalono relacje między wartościami wielkości wyjściowej (z), stanowiącymi wyniki pomiarów, a odpowiednimi aproksymowanymi wartościami wielkości wyjściowej (\bar{z}) z wyznaczonej funkcji aproksymującej. Maksymalny błąd względny dla modelu drugiego planu kompletnego wyliczono z zależności:

$$e^{(u)}_{\max} = \frac{\max |z - \bar{z}|^{(u)}}{|z|^{(u)}} \cdot 100\% = 11\% \quad (12)$$

$$z^{(u)} \neq 0$$

gdzie:

$e^{(u)}$ – błąd względny dla u – układu planu doświadczenia ($u = 1, 2, \dots, n$).

Średni błąd względny obliczono z następującej zależności:

$$e_{\bar{s}r} = \frac{\sum^n e^{(u)}}{n} = 3,81\% \quad (13)$$

Maksymalny błąd względny $e^{(u)}_{\max} = 10,60\%$ dla planu Pesočinskiego obliczono z zależności (12), natomiast średni błąd względny obliczony na podstawie (13) wynosi $e_{\bar{s}r} = 3,61\%$. Powyższe błędy dotyczą wszystkich układów danego planu, (plan kompletny $n = 243$, plan Pesočinskiego $n = 50$).

9. Wnioski

Z zależności (10) i (11) widać, że dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ przyjęta funkcja aproksymująca jest adekwatna, a wartość współczynnika korelacji wielowymiarowej jest wysoce istotna dla obu rozpatrywanych planów. Wyznaczony z zależności (13) średni błąd względny oszacowania jest zadowalający. Z rysunku

3 widać, że przewidywane wartości skupiają się wzdłuż przekątnej wykresu wskazując na dobre dopasowanie modelu do wyników pomiaru.

Literatura

- [1] Banach M.: Podstawy techniki oświetlenia. PWN. Warszawa, 1982.
- [2] Jakowluk W.: Weryfikacja modelu matematycznego sprawności oświetlenia z wykorzystaniem wielokrotnych odbić we wnętrzu. Elektryka 14. Białystok, 1996, str. 115-124.
- [3] Polański Z.: Planowanie doświadczeń w technice. PWN. Warszawa, 1984.
- [4] Volk W.: Statystyka stosowana dla inżynierów. WNT. Warszawa, 1973.

A COMPARATIVE OF BOTH COMPLETE AND PESOČINSKI DESIGNS TO DETERMINE THE INTENSITY OF ILLUMINATION DISTRIBUTION

Summary: A comparative analysis of both complete and Pesočinski designs for forecasting the intensity of illumination in interiors was carried out in this paper. The function of the study object is considered in a form of second order polynomial and first order interactions.

Key words: multiple reflections, experimental designs, F-test

Artykuł zrealizowano w ramach pracy badawczej własnej W/II/3/00.