

## WARUNKI STANU GRANICZNEGO DLA OŚRODKÓW ROZDROBNIONYCH

Katarzyna DOŁŻYK\*

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 A, 15-351 Białystok

**Streszczenie:** W latach 60-tych ubiegłego wieku zaproponowano wiele warunków stanu granicznego dla ośrodków rozdrobnionych. Większość warunków uwzględnia wpływ pośredniego naprężenia głównego na wytrzymałość i przyjmuje liniową zależność wytrzymałości od wartości średniego ciśnienia. Przyjmując, że wytrzymałość ośrodka rozdrobnionego nie zależy od pośredniego naprężenia głównego, wytrzymałość ośrodka rozdrobnionego może być określona warunkiem Coulomba-Mohra o dwóch parametrach: kohezji  $c$  i kącie tarcia wewnętrznego  $\Phi$ . Ze względu na swoją prostotę warunek Coulomba-Mohra jest najczęściej wykorzystywany w praktyce inżynierskiej.

*Słowa kluczowe:* ośrodki rozdrobnione, warunki stanu granicznego.

### 1. Wprowadzenie

W ośrodkach rozdrobnionych po osiągnięciu stanu granicznego mogą wystąpić przyrosty odkształceń bez przyrostu naprężeń. Funkcję stanu naprężenia, przy którym następuje wyczerpanie nośności ośrodka rozdrobnionego nazywa się warunkiem stanu granicznego. Warunek stanu granicznego dla ośrodków rozdrobnionych, trójfazowych musi być wyrażony w naprężeniach efektywnych, a nie całkowitych. W ośrodkach rozdrobnionych odkształcenia nieodwracalne (plastyczne) pojawiają się na znacznie niższych poziomach naprężeń niż poziom naprężeń granicznych. W wielu modelach ośrodka rozdrobnionego utożsamia się jednak warunek plastyczności i warunek stanu granicznego (Gryczmański, 1995). W latach 60 i 70-tych dwudziestego wieku, gdy rozwijano teorię plastyczności i teorię stanów granicznych ośrodków rozdrobnionych, sformułowano wiele warunków stanu granicznego, aby jak najbardziej precyzyjnie opisać właściwości ośrodka oraz wykorzystać do rozwiązania podstawowych zagadnień mechaniki gruntów i fundamentowania (Drucker i Prager, 1952; Houlsby, 1986; Izicki i Mróz, 1975; Lade, 1977; Lade i Duncan, 1975; Matsuoka i Nakai, 1974; Viladkar i in., 1995). Ze względu na swoją prostotę najczęściej używanym w geotechnice warunkiem jest warunek Coulomba-Mohra sformułowany w 1776 roku (Izicki i Mróz, 1975).

Aparat trójosiowego ściskania umożliwia pomiar ciśnienia cieczy w porach gruntu. Jednak ze względu

na swoją konstrukcję umożliwia on badania tylko w warunkach równości dwóch naprężeń głównych. Zatem możliwe są badania tylko przy szczególnych ścieżkach naprężenia. W warunkach trójosiowego ściskania naprężenia promieniowe i obwodowe w próbce są równe ciśnieniu cieczy w komorze aparatu, a także są mniejsze od naprężeń pionowych wywołanych obciążeniem pionowym, zaś w warunkach trójosiowego rozciągania naprężenia pionowe są mniejsze od ciśnienia cieczy w komorze aparatu. Warunki płaskiego stanu odkształcenia, często spotykane w praktyce inżynierskiej, modelowane są w aparatach dwuosowego ściskania (Wanatowski i Chu, 2008).

Dla ośrodków izotropowych warunek stanu granicznego może być wyrażony w naprężeniach głównych lub w niezmiennikach. Zgodnie z tradycją, jako dodatnie przyjmuje się naprężenia ściskające i maksymalne wartości naprężeń głównych oznaczają się jako  $\sigma_1$ , minimalne jako  $\sigma_3$ , a pośrednie  $\sigma_2$ . W pracy opisano najbardziej popularne warunki stanu granicznego. Kąt tarcia wewnętrznego jest funkcją stanu naprężenia i tylko dla warunku Coulomba-Mohra jest parametrem materiałowym. Opisując stany graniczne innymi warunkami, tradycyjnie zdefiniowany kąt tarcia wewnętrznego w stanach płaskiego odkształcenia jest większy niż w stanach osiowej symetrii. W pracy skupiono uwagę na gruntach sypkich, dla których  $c = 0$ . Przyjęto, że ciśnienie w porach  $u = 0$ , zatem naprężenia całkowite są równe naprężeniom efektywnym.

\* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: k.dolzyk@pb.edu.pl

## 2. Tensor naprężenia i niezmienniki

Każdy symetryczny tensor naprężenia może być zapisany jako suma części kulistej i dewiatorowej:

$$\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + s_{ij} \quad (1)$$

gdzie

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2)$$

jest średnim ciśnieniem hydrostatycznym, zaś

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (3)$$

jest dewiatorem naprężenia, natomiast deltę Kroneckera oznaczono symbolem  $\delta_{ij}$ .

Podstawowe niezmienniki tensora naprężenia to:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p \quad (4a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \quad (4b)$$

$$I_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3) \quad (4c)$$

zaś dewiatora naprężenia:

$$J_1 = 0 \quad (5a)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{6}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (5b)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3) - p(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 2p^3 \quad (5c)$$

Kąt Lodego natomiast wyrażony jest za pomocą równania:

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left\{ -\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right\} = \frac{1}{3} \arcsin \left\{ -\frac{27J_3}{2q^3} \right\} \quad (6)$$

w którym

$$q = \sqrt{3J_2} \quad (7)$$

jest także niezmiennikiem.

W przestrzeni naprężeń głównych niezmienniki  $q$ ,  $p$ ,  $\theta$  mają prostą interpretację geometryczną (Dołżyk, 2009). Do opisu stanu naprężenia często używa się parametru  $b$ :

$$b = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (8)$$

Dla trójosiowego ściskania (*triaxial compression*, TXC)  $\theta = \pi/6$  i  $b = 0$ , dla trójosiowego rozciągania (*triaxial extension*, TXE)  $\theta = -\pi/6$  i  $b = 1$ , zaś w warunkach płaskiego stanu odkształcenia  $b \approx 0,25-0,35$  (Wanatowski i Chu, 2008). W pracy przyjęto  $b \approx 0,27$  oraz  $\theta = 15^\circ$ .

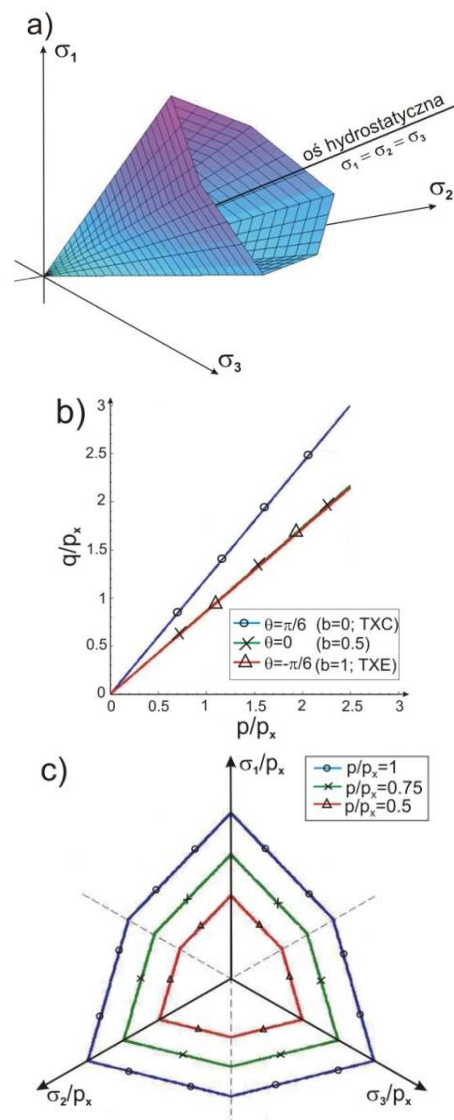
## 3. Warunki stanu granicznego

### 3.1. Warunek Coulomba-Mohra

Warunek Coulomba-Mohra dla gruntów sypkich ma postać

$$\sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi = 2c \cos \phi \quad (9)$$

Zakłada, że naprężenie pośrednie nie wpływa na osiągnięcie stanu granicznego. W przestrzeni naprężeń głównych jest to ostrosłup o potrójnej symetrii (rys. 1a). Dla gruntów sypkich ( $c = 0$ ) wierzchołek ostrosłupa leży w początku układu współrzędnych. Na rysunku 1b pokazano przekroje płaszczyzną  $\theta = const$ , zaś na rysunku 1c przekroje płaszczyzną  $p/p_x = 0,5; 0,75; 1,0$  dla  $\Phi = 30^\circ$ . Jako wartość ciśnienia odniesienia przyjęto  $p_x = 100$  kPa, to znaczy wartość równą ciśnieniu atmosferycznemu.



Rys. 1. Warunek graniczny Coulomba-Mohra: a) w przestrzeni naprężeń głównych, b) w płaszczyźnie  $q$ - $p$ , c) w płaszczyźnie oktaedrycznej

### 3.2. Warunek Druckera-Pragera

W 1952 roku Drucker i Prager (1952) zaproponowali prosty warunek stanu granicznego w postaci stożka opisanego na ostrosłupie Coulomba-Mohra lub wpisanego w ostrosłup Coulomba-Mohra. Warunek Druckera-Pragera ma postać:

$$\sqrt{J_2} - \kappa I_1 = K \quad (10)$$

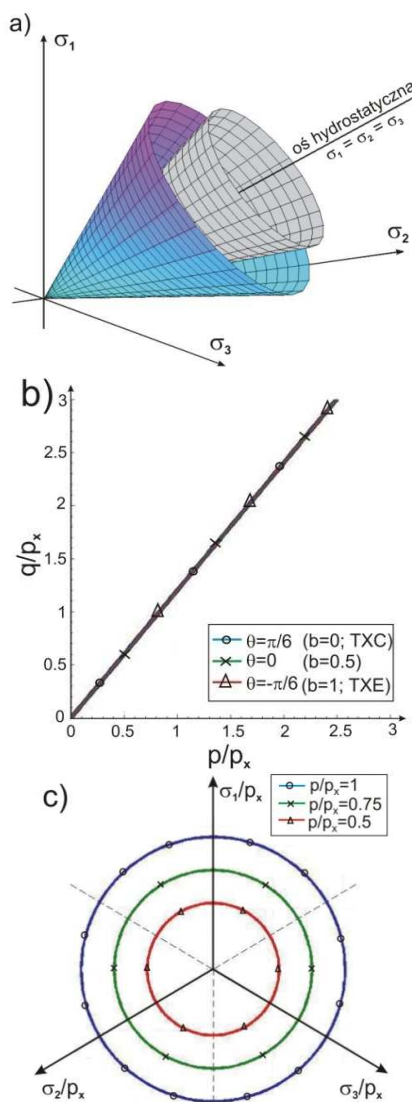
gdzie:

$$\kappa = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3(3 - \sin \phi)}}, \quad K = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3(3 - \sin \phi)}} \quad (11a)$$

dla stożka opisanego na ostrosłupie Coulomba-Mohra, zaś

$$\kappa = \frac{2 \sin \Phi}{\sqrt{3(3 + \sin \Phi)}}, \quad K = \frac{6c \cos \Phi}{\sqrt{3(3 + \sin \Phi)}} \quad (11b)$$

dla stożka wpisanego w ostrosłup Coulomba-Mohra (rys. 2a).



Rys. 2. Warunek graniczny Druckera-Pragera: a) w przestrzeni naprężeń głównych, b) w płaszczyźnie q-p, c) w płaszczyźnie oktaedrycznej

Przekrój płaszczyzną  $\theta = const$  jest prostą w płaszczyźnie q-p (rys. 2b), zaś w płaszczyźnie oktaedrycznej są to okręgi o promieniu zależnym od c,  $\Phi$ , p (rys. 2c).

### 3.3. Warunek Argyrisa

Argyris w 1973 roku zaproponował warunek stanu granicznego w postaci (Zienkiewicz i Pande, 1977):

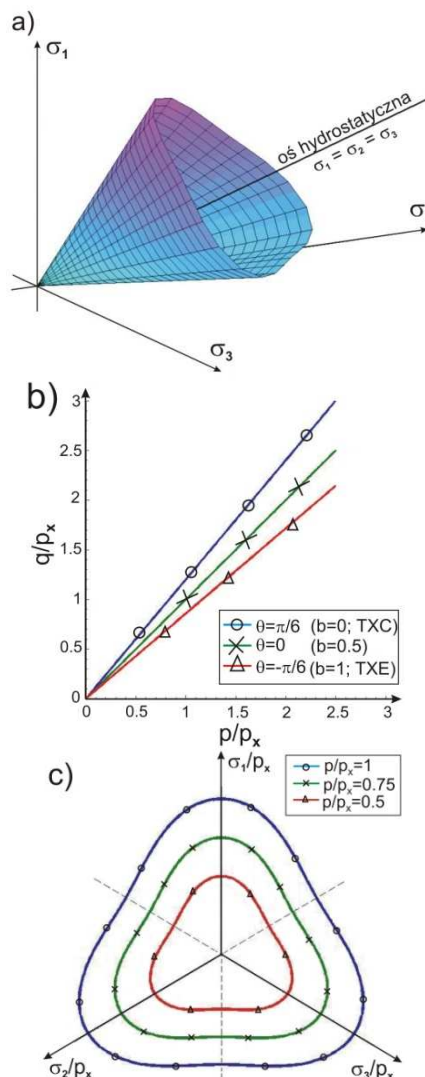
$$\sqrt{J_2} - \kappa g(\theta) I_1 = 0 \quad (12)$$

gdzie:

$$g(\theta) = \frac{2m}{(1+m) - (1-m)\sin 3\theta} \quad (13)$$

Parametr  $\kappa$  określa równanie (11a), zaś m określa stosunek pomiędzy promieniem powierzchni przy trójosiowym rozciąganiu i ściskaniu.

W przestrzeni naprężeń głównych jest to stożek nieobrotowy opisany na ostrosłupie Coulomba-Mohra (rys. 3).



Rys. 3. Warunek graniczny Argyrisa: a) w przestrzeni naprężeń głównych, b) w płaszczyźnie q-p, c) w płaszczyźnie oktaedrycznej

Przyjmując, że kąt tarcia przy trójosiowym ściskaniu jest równy kątowi tarcia przy trójosiowym rozciąganiu można napisać:

$$m = \frac{3 - \sin \Phi}{3 + \sin \Phi} \quad (14)$$

zaś

$$g(\theta) = \frac{6 - 2 \sin \phi}{6 - 2 \sin \phi \sin 3\theta} \quad (15)$$

Przekrój płaszczyzną  $\theta = \text{const}$  tworzą proste w płaszczyźnie  $q$ - $p$  o różnym nachyleniu zależnym od  $\theta$  (rys. 3b), zaś w płaszczyźnie oktaedrycznej jest krzywoliniową figurą o potrójnej symetrii (rys. 3c).

### 3.4. Warunek Matsuoka-Nakai

Matsuoka i Nakai (1974) podali warunek stanu granicznego dla ośrodków sypkich w postaci:

$$\frac{I_1 I_2}{I_3} - \kappa = 0 \quad (16)$$

gdzie:

$$\kappa = 9 + 8 \tan \phi \quad (17)$$

W przestrzeni naprężeń głównych jest to stożek nieobrotowy o nieco innym kształcie niż stożek określony z warunku Argyrisa (rys. 4a). Graficzną interpretację warunku w przestrzeni naprężeń głównych, w płaszczyźnie  $q$ - $p$  i płaszczyźnie oktaedrycznej pokazano na rysunku 4.

### 3.5. Warunek Ladego

Lade i Duncan (1975) oraz Lade (1977) zaproponowali warunek stanu granicznego, w którym uwzględniono fakt zależności stanu granicznego od wartości ciśnienia hydrostatycznego  $p$  (Yang i in., 2006).

Warunek Ladego-Duncana ma postać:

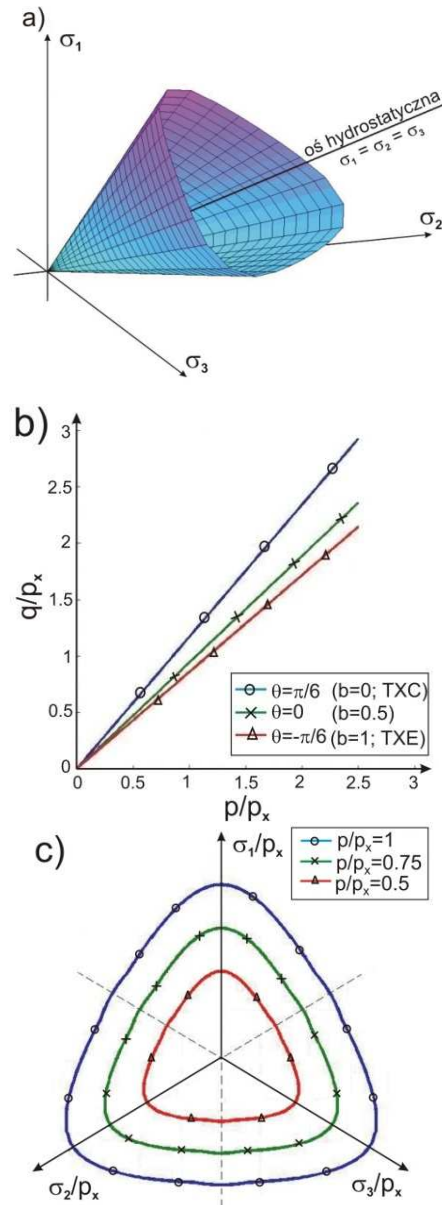
$$I_1^3 - \kappa I_3 = 0 \quad (18)$$

w którym parametr  $\kappa$  jest określony poniższym wzorem

$$\kappa = \frac{(3 - \sin \Phi)^3}{(1 + \sin \Phi)(1 - \sin \Phi)^2} \quad (19)$$

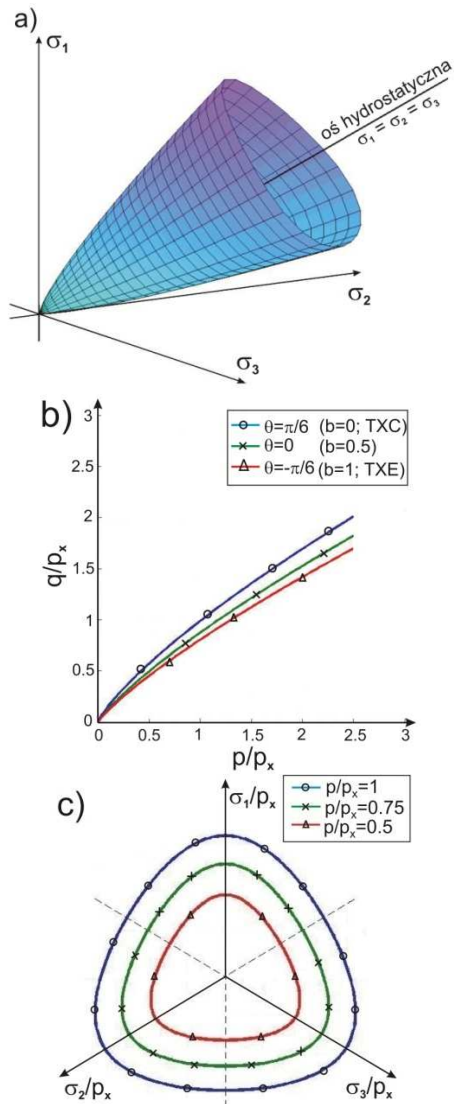
W 1977 roku Lade zaproponował warunek stanu granicznego zależny od dwóch parametrów. Warunek Ladego (1977) ma postać:

$$\left( \frac{I_1^3}{I_3} - 27 \right) \left( \frac{I_1}{p_a} \right)^m = \pi \quad (20)$$



Rys. 4. Warunek Matsuoki-Nakai: a) w przestrzeni naprężeń głównych, b) w płaszczyźnie  $q$ - $p$ , c) w płaszczyźnie oktaedrycznej

Dwa parametry  $m$  i  $\eta$  określają kształt i wielkość warunku stanu granicznego zaś  $p_a = 100$  kPa jest ciśnieniem atmosferycznym. Na rysunku 5 pokazano kształt warunku w przestrzeni naprężeń głównych (rys. 5a), w płaszczyźnie q-p (rys. 5b) oraz w płaszczyźnie oktaedrycznej (rys. 5c).



Rys. 5. Warunek graniczny Ladego: a) w przestrzeni naprężeń głównych, b) w płaszczyźnie q-p, c) w płaszczyźnie oktaedrycznej

W warunku Ladego-Duncana kąt  $\Phi$  nie jest parametrem wytrzymałościowym, zatem warunek może być stosowany w obliczeniach komputerowych, a nie jest przydatny w obliczeniach inżynierskich.

#### 4. Płaskie stany odkształcenia

Płaskie stany odkształcenia, tak często występujące w inżynierskiej praktyce, są szczególnie interesujące. Tradycyjnie wartość mobilizowaną kąta tarcia wewnętrznego definiuje równanie:

$$\sin \Phi_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad (21)$$

Definicja ta jest logiczna dla warunków prostoliniowych w płaszczyźnie q-p, dla warunków krzywoliniowych w płaszczyźnie q-p mobilizowana wartość kąta tarcia wewnętrznego  $\Phi_m$  jest funkcją nie tylko kąta  $\theta$ , ale również wartości naprężenia hydrostatycznego p.

Równanie (21) może być zapisane za pomocą niezmienników  $q$ ,  $p$ ,  $\theta$  w postaci:

$$\sin \Phi_m = \frac{\sqrt{3qc \cos \theta}}{3p + q \sin \theta} \quad (22)$$

W pracy, wykorzystując warunek Argyrisa, pokazano różnice mobilizowanej wartości kąta tarcia wewnętrznego,  $\Phi_m$ , w stanach płaskiego odkształcenia i stanach osiowej symetrii (trójosiowego ściskania lub trójosiowego rozciągania).

Wartość mobilizowaną kąta tarcia wewnętrznego określona w warunkach trójosiowego ściskania oznacza się przez  $\Phi$ , zaś w warunkach płaskiego stanu odkształcenia – jako  $\Phi_{PS}$ .

W warunkach płaskiego stanu odkształcenia wartość pośredniego naprężenia ( $\sigma_2$ ) nie jest stała (Wanatowski i Chu, 2008) podczas deformacji. Parametr (b) opisujący tę zależność waha się w granicach 0,25-0,30, a więc kąt  $\theta$  zmienia się w granicach 11-17°. Do dalszych obliczeń przyjęto, że w płaskim stanie odkształcenia  $\theta = 15^\circ$ .

Warunek Argyrisa może być zapisany w postaci:

$$\frac{q}{p} = \frac{6 \sin \Phi}{3 - \sin \Phi \sin 3\theta} \quad (23)$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia ( $\theta = 15^\circ$ )

$$\frac{q}{p} = \frac{6 \sin \Phi}{3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \Phi} \quad (24)$$

zatem przekształcając równanie (22) otrzymano

$$\sin \Phi_{PS} = \frac{\sqrt{3 \frac{q}{p} \sin \Phi}}{3 + \frac{q}{p} \sin \theta} \quad (25)$$

a następnie

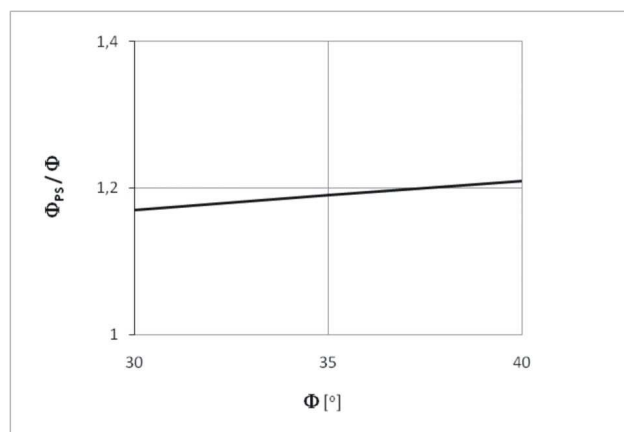
$$\sin \Phi_{PS} = \frac{2\sqrt{3 \sin \Phi \cos \theta}}{(3 - \sin \Phi \sin 3\theta) + 2 \sin \Phi \sin \theta} \quad (26)$$

Ostatecznie w wyniku kolejnych przekształceń otrzymano:

$$\Phi_{PS} = \arcsin \left\{ \frac{2\sqrt{3 \sin \Phi \cos \theta}}{(3 - \sin \Phi \sin 3\theta) + 2 \sin \Phi \sin \theta} \right\} \quad (27)$$



Na rysunku 6 pokazano zależność  $\Phi_{PS} - \Phi$  dla  $30^\circ \leq \Phi \leq 40^\circ$  przyjmując  $\theta = 15^\circ$ .



Rys. 6. Zależność  $\Phi_{PS} - \Phi$

Przy zastosowaniu warunku Argyrisa wartość kąta tarcia wewnętrznego w płaskim stanie odkształcenia jest większa o 17-21% od wartości otrzymanych w warunkach osiowej symetrii. W obliczeniach nośności ław fundamentowych na piaskach proponuje się zwiększenie wartości kąta tarcia wewnętrznego wyznaczanego w aparacie trójosiowego ściskania o 10% (Bowles, 1996).

Przy innych warunkach otrzyma się nieco inne różnice, których nie analizowano w pracy. Przyjmując warunek Coulomba-Mohra, kąty tarcia w stanach płaskiego odkształcenia i trójosiowego ściskania są sobie równe.

## 5. Podsumowanie i wnioski

Najprostszym warunkiem stanu granicznego ośrodków rozdrobnionych jest warunek Coulomba-Mohra, ale jego przyjęcie nie uwzględnia faktu, że większość gruntów wykazuje nieco większe wartości kątów tarcia wewnętrznego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia, niż w warunkach osiowej symetrii.

Bardziej skomplikowane warunki wymagają bardziej pracochłonnych badań laboratoryjnych prowadzonych przy różnych ścieżkach obciążenia. W konwencjonalnych aparatach trójosiowego ściskania, gdy próbki mają kształt walca i naprężenia promieniowe są równe naprężeniom obwodowym, nie jest możliwe prawidłowe określenie kształtu powierzchni stanu granicznego. W obliczeniach inżynierskich można wprowadzać korektę wartości kąta tarcia wewnętrznego dla stanów płaskiego odkształcenia przy wartościach kąta otrzymanych z badań trójosiowego ściskania. Taka praktyka jest ogólnie przyjęta w obliczeniach inżynierskich.

## Literatura

- Bowles J.F. (1996). *Foundation Analysis and Design*, McGraw-Hill Publishing Company, New York.
- Dołżyk K. (2009). Model stanów efektywnych plastycznego płynięcia ośrodków rozdrobnionych. Rozprawa doktorska, Politechnika Białostocka, Białystok.
- Drucker D.C., Prager W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis on limit design. *Q. J. Appl. Math.*, Vol. 10, No. 2, 157-165.
- Gryczmański M. (1995). *Wprowadzenie Do Opisu Sprężysto-Plastycznych Modeli Gruntów*. Wydawnictwo IPPT PAN, Warszawa.
- Houlsby G.T. (1986). A general failure criterion for frictional cohesive materials. *Soils and Foundations*, Vol. 26, No. 2, 97-101.
- Izbicki R., Mróz Z. (1975). Metody Nośności Granicznej W Mechanice Gruntów I Skał. *Polska Akademia Nauk. Instytut Państwowych Problemów techniki*. Warszawa-Poznań.
- Lade P.V. (1977). Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surface. *J. Geotech. Engineering Div.*, ASCE, Vol. 101 (GT 10), 1037-1053.
- Lade P.V. and Duncan J.M. (1975). Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil. *Int. J. Solids Structure*, Vol. 13, No. 11, 1037-1053.
- Matsuoka H., Nakai T. (1974). Stress deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. *Proceedings of ISCE*, No. 232, 59-74.
- Viladkar M.N., Noorzaei J. and Goodbole P.N. (1995). Convenient forms of yield criteria in elasto-plastic analysis of geological materials. *Computers & structures*, Vol. 24, No. 2, 327-337.
- Wanatowski D. and Chu J. (2008). Effect of specimen preparation method on the stress-strain behavior of sand in plane-strain compression tests. *Geotechnical Testing Journal*, Vol. 31, No. 4, 308-320.
- Yang X.Q., Fung W.H. and Cheng Y.M. (2006). A note on the Lade-Duncan failure criterion. *Geomechanics and Geoengeering: An International Journal*, Vol. 1, No. 4, 299-304.
- Zienkiewicz O.C., Pande G.N. (1977). *Some Useful Forms of Isotropic Yield Surfaces for Soil and Rock Mechanics*. W: *Finite Elements in Geomechanics*, Wiley-Interscience, London 1997, 179-190.

## FAILURE CRITERIA FOR GEOMATERIALS

**Abstract:** Many failure criteria were proposed for geomaterials in the sixties of the 20th century. In most of them the influence of middle main stress is neglected and linear influence of hydrostatic pressure on failure is assumed. The most popular and simplest is the Mohr-Coulomb criterion of failure with two material failure parameters: angle of friction  $\Phi$  and cohesion  $c$ . The Mohr-Coulomb criterion is most often used in engineering practice.

Pracę wykonano w Politechnice Białostockiej w ramach Pracy Statutowej nr S/WBiIS/5/10