

MODELOWANIE POLA TEMPERATURY MOSTKÓW CIEPLNYCH PRZY WYKORZYSTANIU METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

Piotr RYNKOWSKI, Tomasz Janusz TELESZEWSKI*

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 A, 15-351 Białystok

Streszczenie: W artykule przedstawiono numeryczne modelowanie pól temperatury wybranych przykładów mostków cieplnych przy wykorzystaniu metody elementów brzegowych. W artykule pokazano, że obszary wielospójne, jakimi są rozpatrywane przegrody złożone w postaci mostków cieplnych mogą być skutecznie analizowane przy wykorzystaniu metody, która bardzo szybko się rozwija na świecie – metody elementów brzegowych. Artykuł jest próbą zaprezentowania, że do tego typu zagadnień metoda ta może być metodą konkurencyjną w stosunku do metod siatkowych takich jak metoda różnic skończonych, metoda elementów skończonych oraz metoda objętości skończonych.

Słowa kluczowe: mostki cieplne, metoda elementów brzegowych.

1. Wprowadzenie

Numeryczne modelowanie pól temperatury w złożonych zagadnieniach inżynierskich jest nieodzownym elementem pracy każdego inżyniera. Umiejętność poprawnego projektowania detali architektonicznych z punktu widzenia ochrony cieplnej budynku, wymaga na etapie projektu znajomości pola temperatury w przekroju takiego detalu lub miejsca, gdzie istnieje zmniejszenie warstwy izolacji termicznej.

Proponowana w artykule metoda elementów brzegowych do wyznaczania pól temperatury jest obecnie bardzo dynamicznie rozwijającą się metodą na świecie. Z uwagi na podstawy matematyczne metody często jest uważana za metodę dużo trudniejszą od metod siatkowych. Jednak wiedza ta nie musi być niezbędna do skutecznego wykorzystania metody i metoda może być wykorzystana przez inżyniera, jak to przedstawiono w artykule.

2. Wprowadzenie do metody elementów brzegowych

2.1. Warunki brzegowe dla równań różniczkowych opisujących proces ustalonego przewodzenia ciepła w obszarze niejednorodnym

Dla ustalonego przewodzenia ciepła w przestrzeni dwuwymiarowej otrzymujemy następujące warunki brzegowe (Brebbia i in., 1984):

- warunek brzegowy Dirichleta, określający temperaturę

na linii brzegowej obszaru,

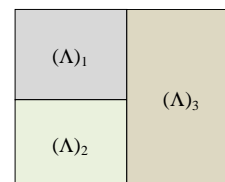
- warunek brzegowy Neumanna, określający strumień ciepła przenikający przez linię brzegową obszaru.

Dla kilku obszarów niejednorodnych pozostających z sobą w kontakcie cieplnym (rys. 1), zagadnienia brzegowe Dirichleta i Neumanna dla równań różniczkowych Laplace'a i Poissona opisujących procesy ustalonego przewodzenia ciepła w przestrzeni dwuwymiarowej (R^2) w obszarze (Λ) ograniczonym zamkniętą linią brzegową (L) można sformułować w następującej postaci (Katsikadelis, 2002):

$$\nabla^2 T_1 = 0; \quad T_1(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}} = f_L(\bar{P}); \quad (\bar{P}) \in (L^i) \quad (1a)$$

$$\nabla^2 T_1 = 0; \quad \frac{\partial T_1(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{\bar{M}=\bar{P}} = g_L(\bar{P}); \quad (\bar{P}) \in (L^i) \quad (1b)$$

gdzie indeks „i” oznacza obszar, który jest ograniczony linią brzegową L .



Rys. 1. Przykładowy obszar składający się z trzech obszarów niejednorodnych

* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: tjt@ pb.edu.pl

2.2. Równania całkowe opisujące proces ustalonego przewodzenia ciepła w obszarze niejednorodnym

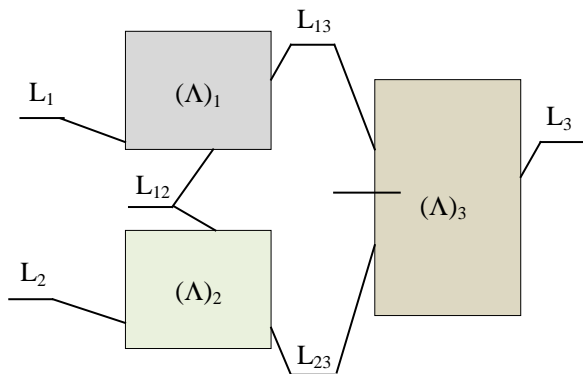
Na styku obszarów przyjęto warunek ciągłości strumienia i temperatury:

$$\begin{aligned} T_1(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_1} &= T_2(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_2}; \quad (\bar{P}_1) \in (L), (\bar{P}_2) \in (L) \\ T_1(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_1} &= T_3(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_3}; \quad (\bar{P}_1) \in (L), (\bar{P}_3) \in (L) \\ T_2(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_2} &= T_3(\bar{M}) \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_3}; \quad (\bar{P}_2) \in (L), (\bar{P}_3) \in (L) \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_1} &= - \frac{\partial T_2(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_2}; \quad (\bar{P}_1) \in (L), (\bar{P}_2) \in (L) \\ \frac{\partial T_1(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_1} &= - \frac{\partial T_3(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_3}; \quad (\bar{P}_1) \in (L), (\bar{P}_3) \in (L) \\ \frac{\partial T_2(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_2} &= - \frac{\partial T_3(\bar{M})}{\partial n_M} \Big|_{\bar{M}=\bar{P}_3}; \quad (\bar{P}_2) \in (L), (\bar{P}_3) \in (L) \end{aligned} \quad (2b)$$

Przyjęto następujące założenia (rys. 2):

- T_1, q_1 – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na zewnętrznej powierzchni obszaru L_1 ,
- T_2, q_2 – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na zewnętrznej powierzchni obszaru L_2 ,
- T_3, q_3 – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na zewnętrznej powierzchni obszaru L_3 ,
- $T_{12}, T_{21}, q_{12}, q_{21}$ – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na wspólnej powierzchni obszaru L_{12} , między obszarami Λ_1 i Λ_2 ,
- $T_{13}, T_{31}, q_{13}, q_{31}$ – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na wspólnej powierzchni obszaru L_{13} , między obszarami Λ_1 i Λ_3 ,
- $T_{23}, T_{32}, q_{23}, q_{32}$ – wektory zawierające wartości temperatur i strumieni ciepła na wspólnej powierzchni obszaru L_{23} , między obszarami Λ_2 i Λ_3 .



Rys. 2. Szkic rozważań zagadnień brzegowych – podobszary oraz powierzchnie wspólne ($L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$).

Ustalone pole temperatury dla pierwszego obszaru L_1 prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} T(P) + \int_{L_1} q_1 T_1^*(P, Q) dL_1 + \int_{L_{12}} q_{12} T_{12}^*(P, Q) dL_{12} + \\ + \int_{L_{13}} q_{13} T_{13}^*(P, Q) dL_{13} = \int_{L_1} T_1 q_1^*(P, Q) dL_1 + \\ + \int_{L_{12}} T_{12} q_{12}^*(P, Q) dL_{12} + \int_{L_{13}} T_{13} q_{13}^*(P, Q) dL_{13} \end{aligned} \quad (3a)$$

Ustalone pole temperatury dla drugiego obszaru Λ_2 prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} T(P) + \int_{L_2} q_2 T_2^*(P, Q) dL_2 + \int_{L_{21}} q_{21} T_{21}^*(P, Q) dL_{21} + \\ + \int_{L_{23}} q_{23} T_{23}^*(P, Q) dL_{23} = \int_{L_2} T_2 q_2^*(P, Q) dL_2 + \\ + \int_{L_{21}} T_{21} q_{21}^*(P, Q) dL_{21} + \int_{L_{23}} T_{23} q_{23}^*(P, Q) dL_{23} \end{aligned} \quad (3b)$$

Ustalone pole temperatury dla trzeciego obszaru Λ_2 prowadzi do następującego układu równań:

$$\begin{aligned} T(P) + \int_{L_3} q_3 T_3^*(P, Q) dL_3 + \int_{L_{31}} q_{31} T_{31}^*(P, Q) dL_{31} + \\ + \int_{L_{32}} q_{32} T_{32}^*(P, Q) dL_{32} = \int_{L_3} T_3 q_3^*(P, Q) dL_3 + \\ + \int_{L_{31}} T_{31} q_{31}^*(P, Q) dL_{31} + \int_{L_{32}} T_{32} q_{32}^*(P, Q) dL_{32} \end{aligned} \quad (3c)$$

Warunek ciągłości strumienia i temperatury (2a, 2b) można zapisać w postaci:

$$\begin{cases} q_{12} = -q_{21} \\ q_{13} = -q_{31} \\ q_{23} = -q_{32} \end{cases} \quad \begin{cases} T_{12} = T_{21} \\ T_{13} = T_{31} \\ T_{23} = T_{32} \end{cases} \quad (4)$$

których jądra całkowe (rozwiązania podstawowe) są odpowiednio równe:

$$T^*(P, Q) = \frac{1}{2\pi\lambda_L} \int_L \ln \frac{1}{r_{PQ}} dL \quad (5a)$$

$$q^*(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\cos(\bar{n}_Q; r_{PQ})}{r_{PQ}} dL \quad (5b)$$

gdzie:

$$\cos(\bar{n}_Q; r_{PQ}) = (Q_x - P_x) \cos \alpha_x + (Q_y - P_y) \cos \alpha_y \quad (6)$$

$$r_{PQ} = \sqrt{(Q_x - P_x)^2 + (Q_y - P_y)^2} \quad (7)$$

Gdy punkt obserwacji P (punktowe źródło ciepła) pokrywa się z rozpatrywanym punktem Q wówczas:

$$\begin{cases} T^*(P=Q) = \frac{1}{2\pi\lambda} \left(1 + \ln \frac{2}{l} \right) \\ q^*(P=Q) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Po wyznaczeniu wartości brzegowych temperatur i strumieni ciepła temperaturę w węzłach wewnętrznych wyznacza się traktując każdy z obszarów jako obszar niezależny. Temperaturę w punkcie wewnętrznym wyznacza się uwzględniając tylko linię brzegową przynależną do danego obszaru:

$$T(M) = \int_L Tq^*(M, Q) dL - \int_L qT^*(M, Q) dL \quad (9)$$

gdzie:

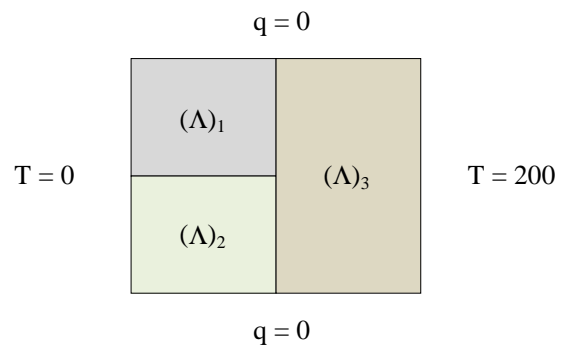
$$\int_L T^*(M, Q) dL = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_L \ln \frac{1}{r_{MQ}} dL \quad (10)$$

$$\int_L q^*(M, Q) dL = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{\cos(\vec{n}_Q; \vec{r}_{MQ})}{r_{MQ}} dL \quad (11)$$

3. Przykład obliczeniowy

Wyznaczono pole temperatury w obszarze składającym się z trzech podobszarów z rysunku 1 przy warunkach brzegowych zgodnie z rysunku 3. Warunki brzegowe

dobrano w celu szybkiej weryfikacji wyników obliczeń numerycznych.

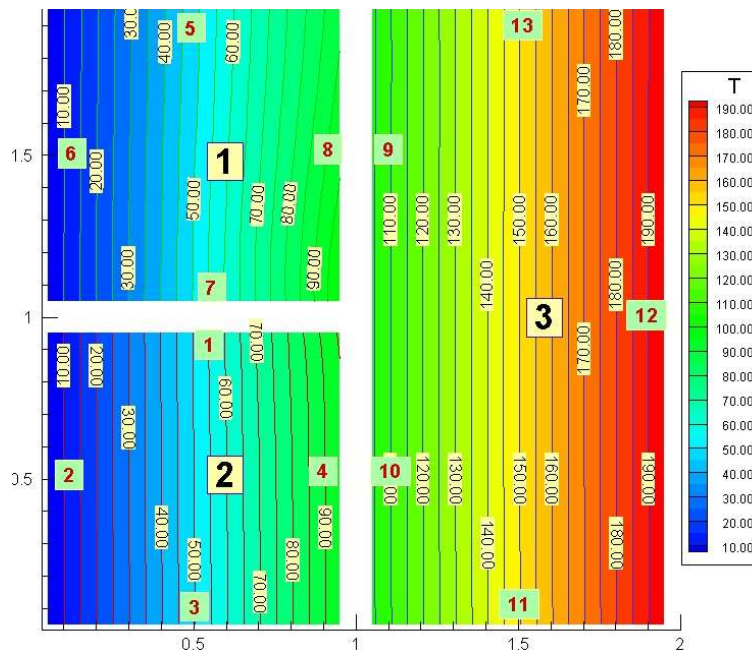


Rys. 3. Warunki brzegowe w obszarze składającym się z trzech podobszarów

Na potrzeby artykułu napisano autorski program komputerowy.

Wyniki obliczeń – pole temperatury – zostały przedstawione na rysunku 4.

Jak widać pola temperatury na poszczególnych obszarach zostały „zszyte” – istnieje ciągłość strumienia ciepła i temperatury odpowiednio na obszarach jeden-dwa, dwa-trzy oraz jeden-trzy.



Rys.4. Pole temperatury w obszarze z rysunku nr 3

4. Przykłady inżynierskie

4.1. Pole temperatury w narożu przegrody budowlanej

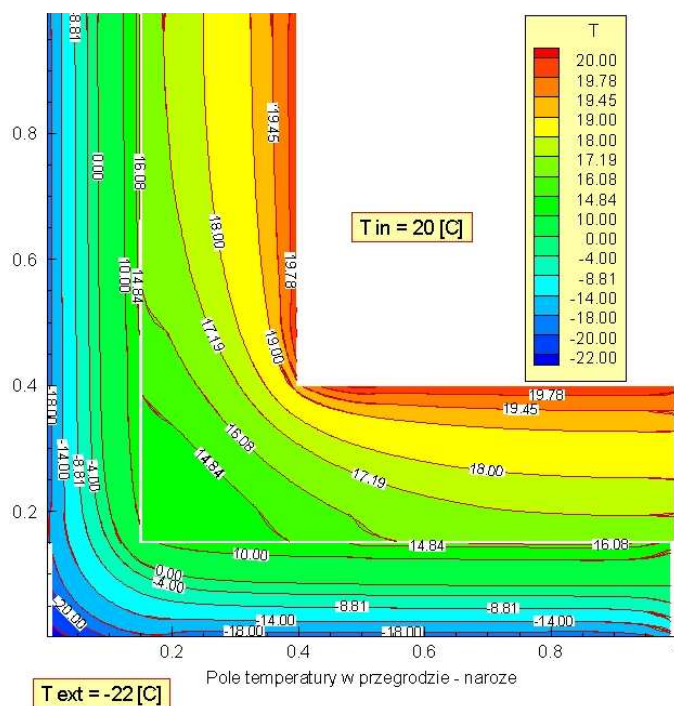
Wyznaczono pole temperatury w narożniku przegrody budowlanej (rys. 5). Przyjęto, że temperatura po stronie wewnętrznej przegrody wynosi 20°C , natomiast temperatura zewnętrzna odpowiada IV strefie i wynosi -22°C . Całkowita grubość izolacji termicznej wynosi 15 cm. Przyjęto do obliczeń numerycznych, współczynnik przewodzenia warstwy konstrukcyjnej $\lambda = 0,77 \text{ W/mK}$, natomiast dla izolacji $\lambda = 0,04 \text{ W/mK}$.

4.2. Pole temperatury w płycie balkonowej bez izolacji cieplnej

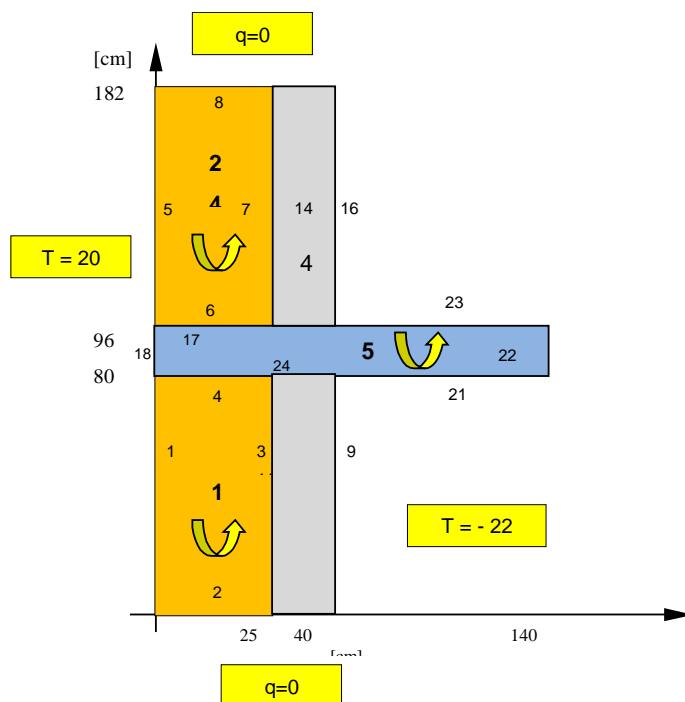
Wyznaczono pole temperatury w przekroju poprzecznym płyty balkonowej, dla której brak jest izolacji termicznej. Warunki brzegowe założono identyczne jak w przykładzie z podpunktu 4.1.

Dla płyty stropowej przyjęto wartość współczynnik przewodzenia ciepła $\lambda = 1,00 \text{ W/mK}$ (płyta żelbetowa).

Na rysunku 6 przedstawiono dyskretyzację obszaru na podobszary, jaka została dokonana w celu wykonania obliczeń numerycznych.



Rys. 5. Pole temperatury dla naroża przegrody



Rys. 6. Szkic przedstawiający stopień dyskretyzacji obszaru dla zagadnienia z podpunktu 4.2

Na rysunku zaznaczono kierunek numeracji węzłów. W celu przejrzystości rysunku nie wykonywano przykładowej dyskretyzacji linii brzegowej na panele cząstkowe.

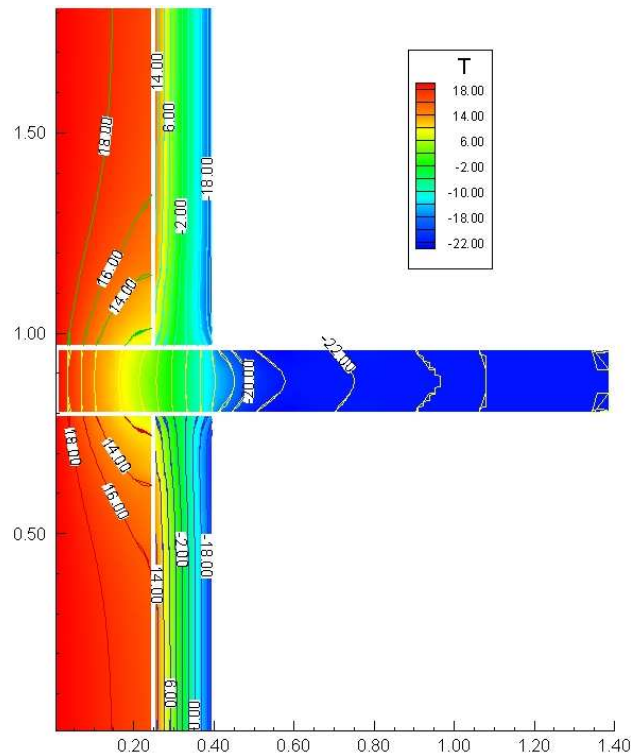
Po dyskretyzacji brzegu całki 7a oraz 7b zostały rozwiązane numerycznie (Press i in., 2007), natomiast układy równań całkowych zastąpiono układem równań liniowych. Macierz układu rozwiązującego nie jest pełna (Rynkowski i Teleszewski, 2005).

Wyniki obliczeń numerycznych zostały przedstawione na rysunku 7.

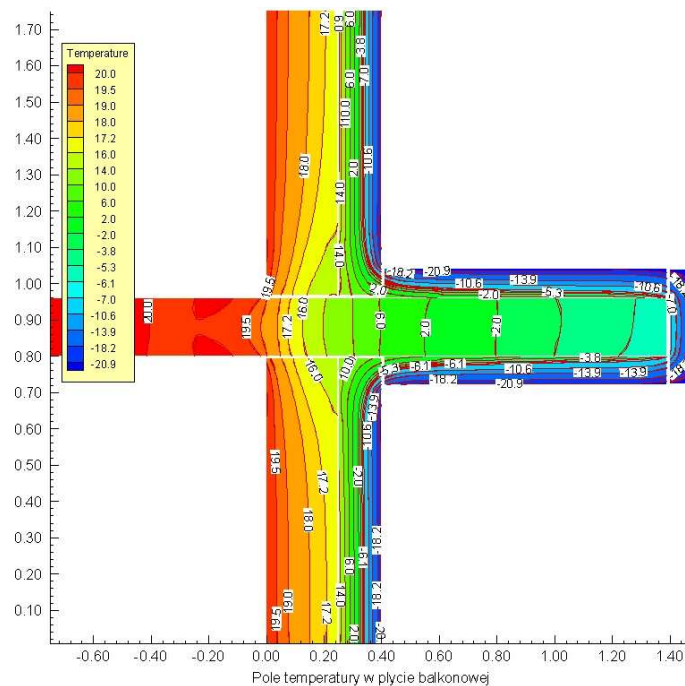
4.3. Pole temperatury w płycie balkonowej z izolacją cieplną

Wyznaczono pole temperatury w przekroju poprzecznym płyty balkonowej z przykładu z podpunktu 4.2. po wykonaniu izolacji termicznej wykonanej ze styropianu o grubości 5 cm o współczynniku przenikania ciepła $\lambda = 0,033 \text{ W/mK}$ (rys. 8).

Pozostałe warunki brzegowe – jak dla przykładu z podpunktu 4.2.



Rys. 7. Pole temperatury w przekroju płyty podłogowej dla zagadnienia z podpunktu 4.2



Rys. 8. Pole temperatury w przekroju płyty podłogowej po wykonaniu izolacji termicznej

Na rysunkach 7 oraz 8 zakres przedstawionych temperatur jest identyczny. Widać wyraźnie wyższe temperatury płyty balkonowej w przypadku wykonania izolacji termicznej.

Na styku obszarów płyta balkonowa – izolacja termiczna są wyznaczone wartości strumienia cieplnego. Możliwa jest zatem dokładna analiza ekonomiczna wyboru optymalnej grubości izolacji termicznej.

Zgodnie z normą PN-EN ISO 13790: 2009 „Energetyczne właściwości użytkowe budynków. Obliczanie zużycia energii na potrzeby ogrzewania i chłodzenia” z uwzględnieniem zamieszczonych na stronie Ministerstwa Finansów danych dotyczących typowych lat meteorologicznych oraz opracowanych na ich podstawie danych statystycznych dla obszaru Polski można wyznaczyć ilość ciepła traconego przez płytę balkonową dla różnych grubości izolacji termicznych (i analogiczne różnych detali architektonicznych).

Dla każdego z przytoczonych przykładów, wyznaczenie wartości temperatury i strumieni cieplnych na liniach brzegowych wspólnych poszczególnych podobszarów jest wykonywane automatycznie przez autorski program komputerowy.

5. Wnioski

W artykule autorzy przedstawiają możliwość skutecznego wykorzystania metody elementów brzegowych do wyznaczania pól temperatury w przegrodach budowlanych – mostkach cieplnych. Wykorzystywana metoda elementów brzegowych pozwala na wyznaczenie wartości temperatury strumienia cieplnego na styku obszarów, co ma istotne znaczenie, na przykład dla analizy ekonomiczno-technicznej określenia optymalnej grubości izolacji termicznej.

Metoda elementów brzegowych może być równie skutecznym narzędziem jak metody siatkowe. W tym przypadku program autorski jest konkurencją dla bardzo drogich aplikacji komercyjnych, wykorzystujących metody siatkowe.

Literatura

- Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C. (1984). Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering. *Springer-Verlag*, New York.
- Katsikadelis J. T. (2002). Boundary elements: Theory and Applications. *Elsevier Science Ltd*, 2002.
- Majchrzak E. (2001). Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła. *Wydawnictwa Politechniki Częstochowskiej*, 2001.
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. (2007). Numerical Recipes. *Cambridge University Press*, Third ed. 2007.
- Rynkowski P., Teleszewski T. (2005). Rozwiązywanie zagadnienia ustalonego przewodzenia ciepła w obszarze wielospójnym metodą brzegowych równań całkowych. W: *XI Warsztaty Naukowe PTSK „Symulacja w Badaniach i Rozwoju”*, Warszawa 2005.

MODELLING OF TEMPERATURE FIELD IN COLD BRIDGE BY MEANS OF BOUNDARY ELEMENT METHOD

Abstract: In the paper the model of temperature field in cold bridge is discussed using Boundary Element Method. The equations describing the steady heat conduction problem in cold bridge have been solved. Presented examples show efficiency of Boundary Element Method modelling in cold bridge in comparison with mesh method as Finite Difference Method, Finite Element Method or Finite Volume Method.

Opracowanie wykonano w ramach pracy statutowej S/WBiŚ/5/2011 i projektu współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego nr umowy WIEM/POKLD/MD/II/2010/6