

WPŁYW ZMIAN SZTYWNOŚCI I ODKSZTAŁCALNOŚCI WĘZŁÓW NA REDYSTRYBUCJĘ SIŁ WEWNĘTRZNYCH W WIELOKONDYGNACYJNEJ KONSTRUKCJI RAMOWEJ

Jarosław MALESZA*

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45 A, 15-351 Białystok

Streszczenie: W pracy zaproponowano wprowadzenie w analizie konstrukcji elementów łącznikowych o zwiększonej podatności na odkształcenia. Głównym celem pracy jest przedstawienie metody opisu modelu ramy wielopiętrowej i wielonawowej z elementami o zmiennej sztywności na styku połączeń rygla ze słupem. Zastosowane rozwiązanie wpływa korzystnie na redystrybucję sił wewnętrznych w ryglach ramy utwierdzonych w słupach, obniżając wyężenie przekrojów przysłupowych.

Słowa kluczowe: sztywność przekroju, podatność węzłów, MES.

1. Wprowadzenie

Zmiany sztywności przekrojów występują w żelbetowych i stalowych konstrukcjach ramowych, w szczególności w połączeniach rygli ze słupami. Można tu wyróżnić dwa rodzaje zmian sztywności: fizyczną i geometryczną. Odkształcenia węzłów są wynikiem naturalnego deformowania się połączeń i prowadzą do powstania obszarów o zróżnicowanych sztywnościach. Z jednej strony można wyróżnić miejsca, w których zachowuje się sztywność początkowa, z drugiej – miejsca gdzie na skutek rozwijającego się zarysowania zmienia się geometria przekroju i drastycznie obniża sztywność.

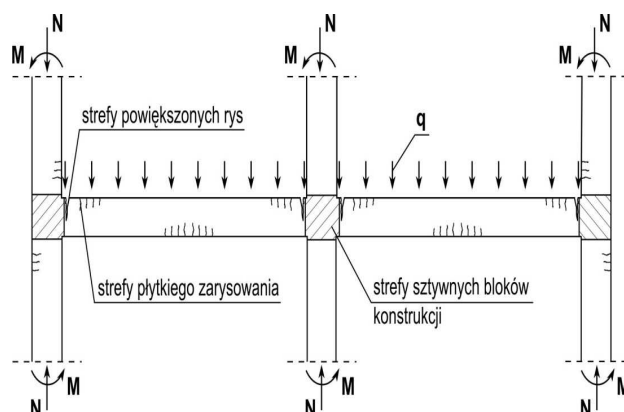
Zmiany sztywności przekrojów elementów ramy i odkształcalność połączeń spowodowane są zmianami geometrycznymi układu, które w rezultacie prowadzą do redystrybucji sił wewnętrznych wpływających na stan naprężeń i odkształceń konstrukcji.

Uwzględnienie redystrybucji sił wewnętrznych w połączeniu z ewolucją sztywności jest szczególnie ważne w analizie konstrukcji żelbetowych z zastosowaniem betonów o wysokich parametrach wytrzymałościowych. Konieczne jest wypracowanie optymalnych i dokładnych metod analizy konstrukcji.

2. Mechanika zachowania się konstrukcji

Jak wynika z badań doświadczalnych konstrukcji żelbetowych, w przekrojach elementów gdzie siły

wewnętrzne są duże, pojawiają się relatywnie duże odkształcenia (Hinton i Owen, 1981; Miedziałowski 1999). W miejscach takich powstają rysy, w skrajnych warunkach zmieniające się w pęknięcia o szerokościach większych od dopuszczalnych. W strefach silnie zarysowanych najczęściej kształtują się węzłowe przeguby plastyczne, widoczne w fazie wyczerpania nośności elementu. Poza obszarami zarysowań w konstrukcji wydzielają się sztywne tarcze podlegające głównie niewielkim obrotom. Elementy konstrukcji o początkowo zbliżonych sztywnościach deformują się, przez co tworzą się w nich dodatkowe więzy, jak również zmieniają się warunki brzegowe całego ustroju. Rysunek 1 przedstawia sposób tworzenia się przegubu plastycznego w żelbetowej konstrukcji ramowej.



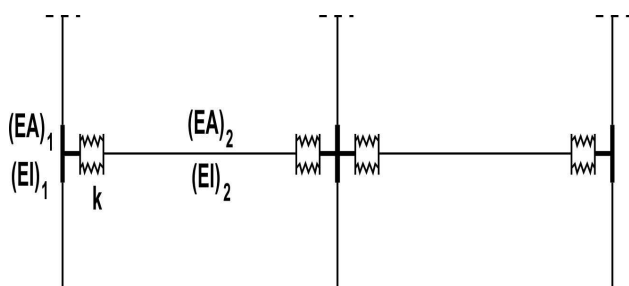
Rys. 1. Powstawanie obszarów zarysowań i tworzenie się sztywnych tarcz w żelbetowej konstrukcji ramowej

* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: j.malesza@kmb.pb.edu.pl

3. Model matematyczny

W analizie konstrukcji powinien być przyjęty schemat statyczny konstrukcji uwzględniający opisaną odkształcalność przekrojów oraz prawa konstytutywne materiałów w odpowiedzi na przyłożone obciążenia.

W przykładzie obliczeniowym zastosowano metodę elementów skończonych uwzględniającą zwiększoną podatność obszarów skoncentrowanych zarysowań i sztywne tarcze o niskiej odkształcalności. Pomiędzy belkowymi elementami rygla i sztywnymi tarczami węzła ramy wprowadzono elementy łącznikowe. Nie modyfikowano połączeń słupów. Schemat układu ramowego przyjęty w modelu obliczeniowym przedstawiono na rysunku 2.



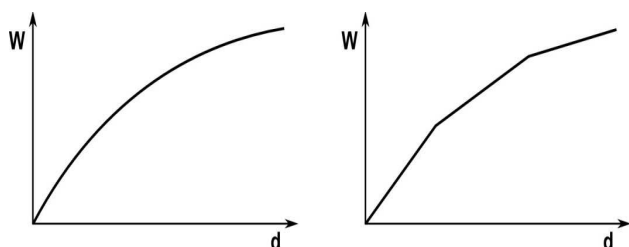
k – strefy koncentracji zarysowań o zwiększonej odkształcalności,
 $(EA)_1, (EI)_1$ – sprężyste charakterystyki obszarów sztywnych,
 $(EA)_2, (EI)_2$ – sprężyste charakterystyki elementów ramy (element rygla – element belkowy)

Rys. 2. Fragment ramy wielokondygnacyjnej uwzględniający przyjęte założenia

Charakterystyka elementów łącznikowych wynikająca ze zginania, ściskania lub ścinania zastosowana w metodzie elementów skończonych może być ustalona na podstawie wyników badań doświadczalnych konstrukcji. Może być ona opisana funkcją obciążeń i odpowiadających im przemieszczeń (obrotów). Rysunek 3 pokazuje sposób opisu podatności węzła w postaci zależności:

$$k = \frac{d}{W} \quad (1)$$

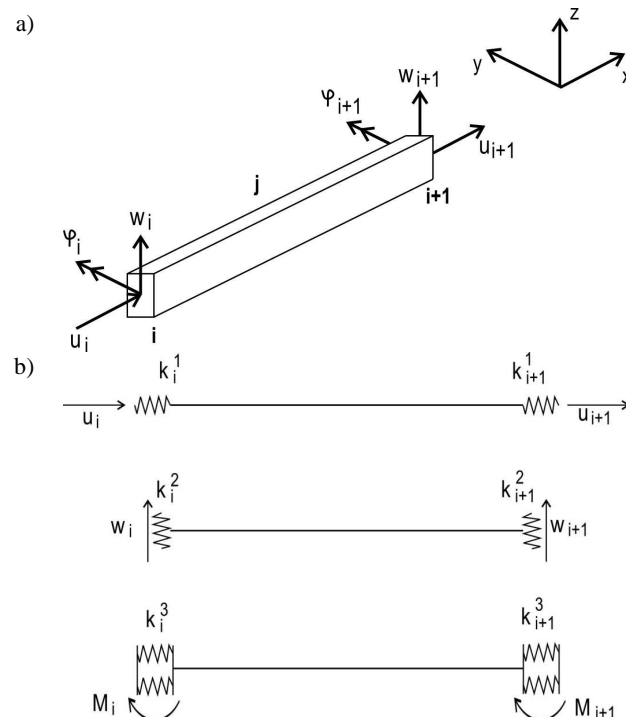
gdzie: W jest siłą wewnętrzną, a d oznacza odpowiadające przemieszczenia (obroty).



Rys. 3. Zależność obciążenie-przemieszczenie: a) wirtualne (efektywne), b) ekwiwalentne

Nieliniowa sprężystość połączenia elementu belkowego i sztywnej tarczy węzła ramy może być opisana zależnością Ramberga-Osgooda (Park i Paulay, 1975) lub zmodyfikowaną metodą Kuczyńskiego

(Miedziałowski 1999). W modelu analitycznym metody elementów skończonych typowy element belkowy zamocowano na końcach w odkształcalnych węzłach. W przypadku ogólnym rozpatrzono element k połączony z dwoma odkształcalnymi węzłami i oraz $i+1$, jak przedstawiono na rysunku 4.



Rys. 4. Typowy element belkowy i odkształcalne węzły

Każdy element belkowy ma trzy stopnie swobody w układzie płaskim. Jego deformacje opisuje jeden kąt obrotu i dwa przemieszczenia węzłowe:

$$\mathbf{q}_k^i = \{u_i, w_i, \varphi_i\}_k^T \quad (2)$$

$$\mathbf{q}_k^{i+1} = \{u_{i+1}, w_{i+1}, \varphi_{i+1}\}_k^T \quad (3)$$

Wektory przemieszczeń przywęzłowych (sprężyny) opisują następujące zależności:

$$\mathbf{k}_k^i = \{k_i^1, k_i^2, k_i^3\}_k^T \quad (4)$$

$$\mathbf{k}_k^{i+1} = \{k_{i+1}^1, k_{i+1}^2, k_{i+1}^3\}_k^T \quad (5)$$

Wektory wewnętrznych sił przywęzłowych opisano zależnościami:

$$\mathbf{q}_k^i = \{U_i, W_i, M_i\}_k \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_k^{i+1} = \{U_{i+1}, W_{i+1}, M_{i+1}\}_k \quad (7)$$

Przemieszczenia węzłów opisano uwzględniając odkształcalność według zależności

$$\bar{q}_k = \mathbf{q}_k + \mathbf{k}_k \mathbf{Q} \quad (8)$$

gdzie \mathbf{k}_k jest przekątniową macierzą z parametrem odkształcalności k wzdłuż głównej przekątnej.

Przemieszczenia elementu belkowego uzyskuje się z zależności:

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{q}_k \mathbf{N} \quad (9)$$

gdzie \mathbf{N} jest macierzą funkcji kształtu (Rakowski, 1996). Siły wewnętrzne otrzymuje się z zależności:

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{D}_k \mathbf{q}_k \quad (10)$$

gdzie \mathbf{D}_k jest macierzą sprężystości:

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 \\ 0 & GA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{bmatrix}$$

Wektor odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ jest wyznaczony z zależności

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{u}_k \mathbf{L}_k \quad (11)$$

gdzie \mathbf{L} jest macierzą operatorów różnicowych (Bathe i Wilson, 1976; Zienkiewicz, 1986).

Energię potencjalną konstrukcji oblicza się według zależności:

$$\pi = \pi_j + \pi_k + \pi_f \dots \quad (12)$$

gdzie π_j jest energią potencjalną elementu belkowego, obliczoną według wzoru:

$$\pi_j = \frac{1}{2} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\boldsymbol{\varepsilon}_k\}^T \mathbf{W}_k dx \quad (13)$$

a π_k jest energią potencjalną zachowaną w deformowalnych węzłach obliczoną następująco:

$$\pi_k = \frac{1}{2} \cdot \{\mathbf{Q}_k\}^T (\bar{q}_k - q_k) \quad (14)$$

a π_f jest energią potencjalną obciążeń zewnętrznych:

$$\pi_f = \{\mathbf{F}_k\}^T \bar{q}_k \quad (15)$$

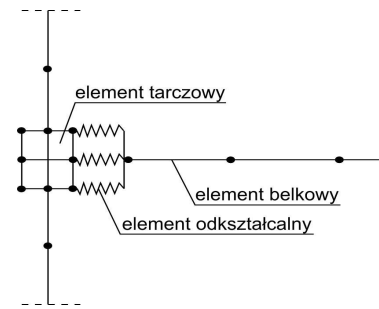
gdzie \mathbf{F}_k jest wektorem obciążeń węzłowych.

Stosując zasadę prac wirtualnych Lagrange'a i warunek minimum energii, otrzymuje się typowy układ równań równowagi metody elementów skończonych w postaci:

$$\bar{\mathbf{K}} \mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (16)$$

gdzie \mathbf{K} jest macierzą sztywności.

Zagadnienie może być opisane jako element tarczowy w węźle ramy konstrukcji, jak pokazano na rysunku 5.



Rys. 5. Węzeł ramy w belkowo-tarczowym modelu konstrukcji

4. Przykład analityczny

W celu sprawdzenia opisanej wyżej metody wykonano obliczenia dwunastopiętrowej, dwunawowej konstrukcji ramowej. Do obliczeń przyjęto beton klasy B50 oraz obciążenia i charakterystyki przekrojów elementów pokazane na rysunku 6.

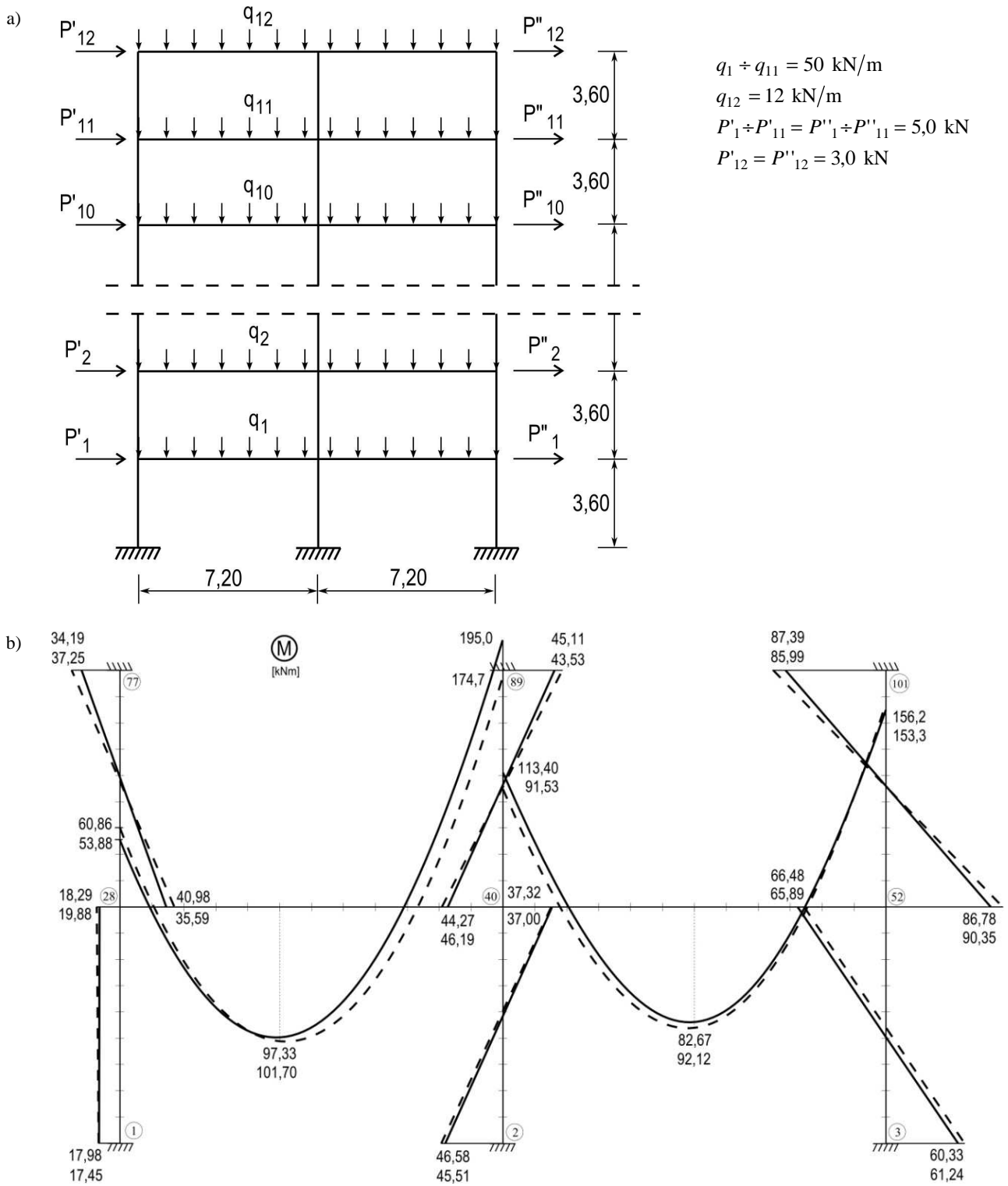
Analizę przeprowadzono dla dwóch alternatywnych typów przekrojów:

- wszystkie elementy są typu belkowego i mają stałe charakterystyki przekrojowe;
- wprowadza się elementy łącznikowe (odkształcalne), których parametry i charakterystyki przekrojowe są inne niż charakterystyki pozostałych elementów belkowych.

5. Podsumowanie

Założenie tradycyjnego sztywnego połączenia elementów konstrukcji żelbetonowych prowadzi do przeszywnienia układu, szczególnie w sytuacji, gdy wyężenie przekrojów przekracza fazę pracy sprężystej. Zmieniająca się geometria przekrojów na skutek powstawania i powiększania się rys wpływa jednoznacznie na rozkład sił wewnętrznych w konstrukcji. Ewolucja sztywności układu może być uwzględniana za pomocą funkcji opisujących odkształcalność węzłów.

Zastosowanie w analizie elementów łącznikowych o zredukowanej sztywności wpłynęło znacząco na redystrybucję sił wewnętrznych w wielokondygnacyjnej ramie żelbetonowej. Uzyskane, zmniejszone nawet do 20%, wartości momentów zginających w przekrojach przywęzłowych rygla ramy pokazują, iż zaproponowane rozwiązanie wpływa korzystnie na pracę statyczną konstrukcji.



Rys. 6. Model ramy przyjęty w analizie: a) schemat statyczny układu, b) wyniki obliczeń dla różnych typów przekrojów

Literatura

- Bathe K. J., Wilson E.L. (1976). Numerical Method in Finite Element Analysis. *Prentice Hall*, Englewood Cliffs, USA.
- Hinton C., Owen D.R.J. (1981). Finite Element in Plasticity. *Pineridge Press*, London.
- Miedziałowski Cz. (1999). Continual description changes of the section stiffness of R.C. walls in multistorey buildings. W: proc of the 5th *Internatinal Symposium on Utilization of HSC/HPC*, Sandefjord, Norway.
- Park R., Paulay T. (1975). Reinforced Concrete Structure, *John Wiley & Sons*, New York.
- Rakowski G. (1996). Metoda Elementów Skończonych. Wybrane zagadnienia. *Politechnika Warszawska, Warszawa*.
- Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. (1986). The Finite Element Method. *Mc Graw-Hill*, London.

INFLUENCE OF STIFFNESS CHANGES AND JOINT DEFORMABILITY ON REDISTRIBUTION OF INTERNAL FORCES IN MULTISTOREY FRAMED STRUCTURES

Abstract: Paper presents analytical model taking into account joint deformability and stiffness changes of R.C. framed structure. The aim of the work is to determine the method of description of the structure statical model including cross-section stiffness changes and joint deformability. An analytical example presenting influence of the cross-section stiffness changes and joint deformability on redistribution of internal forces is shown in the paper.

Artykuł powstał w ramach pracy badawczej statutowej S/WBiŚ/3/08 realizowanej w Politechnice Białostockiej