

Edward RYDYGIER

Urząd m. st. Warszawy, ul. Kondratowicza 20, 00-983 Warszawa,
Politechnika Radomska, Wydz. Transportu i Elektrotechniki,
E-mail: rydygier@o2.pl

Zygmunt STRZYŻAKOWSKI

Politechnika Radomska, Wydz. Transportu i Elektrotechniki, Instytut
Automatyki i Telematyki, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom
E-mail: zstrz@data.pl

**Zastosowanie sposobów obliczeniowych
używanych w elektrotechnice
do modelowania wybranych zagadnień
w układzie pojazd szynowy – tor**

1 Wstęp

Narzędzia obliczeniowe wykorzystywane w elektrotechnice można zaadoptować do rozwiązań wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor. Przykładowo, wielomiany potęgowe, wykorzystywane w obliczeniach sieci i obwodów elektrycznych, mogą stanowić efektywne narzędzia obliczeniowe w algorytmach metod numerycznych służących do identyfikacji źródeł pól fizycznych opisanych równaniem cząstkowym Poissona. Z kolei funkcjonal mocy stosowany do opisu stanu sieci rozgałęzionej także może zostać zastosowany do rozwiązania zagadnienia identyfikacji źródeł pola opisanego równaniem Poissona. Metody identyfikacji źródeł pola wykorzystujące wielomiany potęgowe oraz funkcjonal mocy mogą znaleźć zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień wytrzymałościowych i cieplnych w układach transportu szynowego, szczególnie, jeśli chodzi o modelowanie zagadnień w układzie pojazd szynowy-tor. Także sposób obliczeń z wykorzystaniem pojęcia energii jednookresowej, który jest stosowany w elektrotechnice w analizie w czasie rzeczywistym procesów energetycznych w obwodach elektrycznych może znaleźć zastosowanie w modelowaniu układu pojazd szynowy-tor, a szczególnie w modelowaniu dynamicznym kontaktu koło - szyna dla siły wertykalnej.

2 Wielomiany potęgowe

Wielomiany potęgowe o stałych współczynnikach stanowią efektywne narzędzia matematyczne w obliczeniach sieci i obwodów elektrycznych. Tego rodzaju wielomianami są moniczne wielomiany potęgowe $T_n(q)$ dla $q \in R$ zdefiniowane za pomocą formuły rekurencyjnej:

$$T_{n+2}(q) = (2 + q)T_{n+1}(q) - T_n(q), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad T_0(q) = 1, T_1(x) = 1 + q, \quad (1)$$

Korzystając z powyższej formuły wyznaczono kilka pierwszych wielomianów:

$$T_0(q) = 1$$

$$\begin{aligned} T_1(q) &= 1 + q \\ T_2(q) &= 1 + 3q + q^2 \\ T_3(q) &= 1 + 6q + 5q^2 + q^3 \\ T_4(q) &= 1 + 10q + 15q^2 + 7q^3 + q^4 \\ T_5(q) &= 1 + 15q + 35q^2 + 28q^3 + 9q^4 + q^5. \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Korzystając z powyższego zapisu można zdefiniować wielomiany $T_n(q)$ w następujący sposób:

$$T_n(q) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} q^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$a_{n,k} = 2a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1} - a_{n-2,k}, \quad a_{0,0} = 1, \quad a_{1,0} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq k \leq n \quad (3)$$

Tablica współczynników $a_{n,k}$ tworzy zmodyfikowany trójkąt liczbowy *MNT1*, służący do generacji monicznych wielomianów potęgowych $T_n(q)$.

Natomiast moniczne wielomiany potęgowe $P_n(q)$ dla $q \in R$ są zdefiniowane za pomocą formuły rekurencyjnej:

$$P_{n+2}(q) = (2 + q)P_{n+1}(q) - P_n(q), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad P_0(q) = 0, \quad P_1(q) = 1, \quad (4)$$

Korzystając powyższej formuły wyznaczono kilka pierwszych wielomianów $P_n(q)$:

$$\begin{aligned} P_0(q) &= 0 \\ P_1(q) &= 1 \\ P_2(q) &= 2 + q \\ P_3(q) &= 3 + 4q + q^2 \\ P_4(q) &= 4 + 10q + 6q^2 + q^3 \\ P_5(q) &= 5 + 20q + 21q^2 + 8q^3 + q^4. \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Korzystając z powyższego zapisu można zdefiniować moniczne wielomiany $P_n(q)$ w następujący sposób:

$$P_n(q) = \sum_{r=0}^n b_{n,r} q^r, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$b_{n,r} = 2b_{n-1,r} + b_{n-1,r-1} - b_{n-2,r}, \quad b_{0,0} = 0, \quad b_{1,0} = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq r \leq n. \quad (6)$$

Tablica współczynników $b_{n,r}$ tworzy zmodyfikowany trójkąt liczbowy *MNT2* generujący moniczne wielomiany potęgowe.

Między wielomianami $P_n(q)$ i $T_n(q)$ zachodzą następujące relacje:

$$qP_n(q) = T_n(q) - T_{n-1}(q), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

$$P_n(q)T_{n-1}(q) - P_{n-1}T_n(q) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Prawidłowością charakteryzującą konstrukcję zmodyfikowanych trójkątów liczbowych jest to, że sumy elementów w wierszach pierwszego (1, 2, 5, 13, 34, 89, ...) i drugiego

trójkąta (1, 3, 8, 21, 55, ...) są równe odpowiednio parzystym F_{2n} , $n = 0, 1, 2, \dots$, lub nieparzystym F_{2n+1} , $n = 0, 1, 2, \dots$ wyrazom ciągu Fibonacciego (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), zdefiniowanego za pomocą następującej formuły [5]:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

dla wyrazów początkowych $F_0 = 1$ i $F_1 = 1$.

W elektrotechnice ciąg Fibonacciego znajduje zastosowanie w obliczeniach obwodów jednorodnych o strukturze wielokąt-gwiazda, a także w obliczeniach parametrów wejściowych linii transmisyjnych. Natomiast potęgowe wielomiany moniczne znajdują zastosowanie w elektrotechnice w obliczeniach okresowych sieci elektrycznych [3, 12].

3 Metody identyfikacji źródeł pola w modelowaniu układu pojazd szynowy-tor

Potęgowe wielomiany moniczne $T_n(q)$ i $P_n(q)$ można zastosować w algorytmach metod numerycznych służących do identyfikacji źródeł pola dla układów opisanych równaniem Poissona. Opis układu 2-D za pomocą równaniem Poissona ze znanymi warunkami brzegowymi $u|_{\Gamma}$ na brzegu Γ badanego obszaru przyjmuje postać następującego równania różniczkowego cząstkowego [2]:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (10)$$

gdzie $x \in (0, l_x)$, $y \in (0, l_y)$, $u = u(x, y) \in R^2$ oznacza funkcję polową, $f = f(x, y) \in R^2$ - funkcję rozkładu źródeł (funkcję źródłową).

Identyfikacja źródeł pola dla układu opisanego równaniem (10) polega na wyznaczeniu funkcji rozkładu źródeł $f(x, y)$, co stanowi rozwiązanie problemu odwrotnego. Aby rozwiązać ten problem numerycznie należy przybliżyć ciągły opis układu opisem dyskretnym. Po zamianie zmiennych ciągłych na dyskretnie, np. w przypadku prostokątnej siatki podziału badanego obszaru o wymiarach $l_x \times l_y$ według wzoru $x = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, M$, $y = jh$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, $M = l_x/h$, $N = l_y/h$, h - długość kroku dyskretyzacji, i w wyniku przybliżenia równania różniczkowego równaniem różnicowym za pomocą schematu różnic skończonych uzyskuje się układ równań algebraicznych wiążących wartości funkcji polowej u i źródłowej f w węzłach siatki w następujący sposób [4]:

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 f(i, j) = q_{i,j}, \quad i=1, 2, \dots, M-1, j=1, \dots, N-1, \quad (11)$$

gdzie: $u_{i,j} = u(i, j)$, $q_{i,j} = q(i, j)$.

Natomiast warunki brzegowe przyjmują postać:

$$\begin{aligned} u(0, j) = U_0(j), \quad u(M, j) = U_M(j), \quad j = 0, 1, \dots, N \\ u(i, 0) = U_0(i), \quad u(i, N) = U_N(i), \quad i = 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Dla modelu dyskretnego (11) rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł polega na wyznaczeniu wartości funkcji źródłowej $q(i, j)$ w węzłach siatki. Funkcja źródłowa rozwinięta w szereg Fouriera przyjmuje postać [4]:

$$f_{m,n} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{N-1} F_m(k) \sin \frac{k\pi n}{N}, \quad f_{m,0} = f_{m,N} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (12)$$

gdzie n jest parametrem, $F(k)$ oznacza współczynnik Fouriera dla $k = 1, 2, \dots, N-1$. Podobnie rozwinięta w szereg Fouriera została funkcja połowa:

$$u_{m,n} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{N-1} U_m(k) \sin \frac{k\pi n}{N}, \quad u_{0,n} = u_{M,n} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (13)$$

Po podstawieniu funkcji połowej (13) i źródłowej (12) do równania (11) otrzymujemy:

$$\frac{1}{h^2} \left[(U_{m+1}(k) - 2U_m(k) + U_{m-1}(k)) - (4 \sin^2 \frac{k\pi}{2N}) U_m(k) \right] = F_m(k), \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (14)$$

z warunkami brzegowymi określonymi przez $U_0(k) = 0$ oraz wartości $U_M(k)$ wyznaczone z równości $u_{M,n} = 0, n = 1, \dots, N$.

Po podstawieniu wielomianu $P(q_k)$ (4) dla $q_k = 4 \cdot \sin^2 \frac{k\pi}{2N}$ do równania (14), otrzymujemy rozwiązanie problemu prostego w postaci:

$$U_m(k) = P_m(q_k) U_1(k) + \sum_{l=1}^{m-1} P_{m-l}(q_k) h^2 F_l(k), \quad m = 2, 3, \dots, M-1. \quad (15)$$

Wartości $U_1(k)$ w równaniu (15) można wyznaczyć z warunków brzegowych (11). Dla $N = M$ z układu $M-1$ równań można wyznaczyć zestaw $U_M(k), k = 1, 2, \dots, M-1$. Następnie przez podstawienie tych współczynników do równania (15) dla $m = M$, można otrzymać zestaw $U_1(k)$ dla $k = 1, 2, \dots, M-1$. Rozwiązanie problemu odwrotnego wyznaczone przy użyciu monicznych wielomianów potęgowych $P(q_k)$ przyjmuje postać:

$$F_i(k) = \frac{U_{i+1}(k) - P_{i+1}(q_k) U_1(k) - \sum_{l=1}^{i-1} P_{i+1-l}(q_k) h^2 F_l(k)}{P_i(q_k) h^2}. \quad (16)$$

Funkcja źródłowa odtworzona ze współczynników (16) według formuły (12) stanowi rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł pola. Ponieważ zagadnienie identyfikacji źródeł pola jest problemem odwrotnym, dlatego należy ustabilizować wyniki obliczeń [1]. Problem odwrotny zawiera się w klasie problemów źle postawionych w sensie definicji Hadamarda problemów poprawnie sformułowanych i dlatego metody rozwiązania zagadnienia prostego mogą okazać się nie odpowiednie do rozwiązania zagadnienia odwrotnego [1, 11]. Stabilność może zostać zapewniona przez zastosowanie odpowiedniej procedury regularyzacyjnej. Opracowana przez autorów artykułu Metoda Symulacyjna identyfikacji została uzupełniona przez specjalną numeryczną procedurę aproksymacyjną opracowaną na podstawie metody odwrotnych odległości [7]. Metoda ta zaadoptowana przez Sheparda do wygładzania danych w układach 2-D stanowi rodzaj samoregulacji.

4 Identyfikacji źródeł dla danych pomiarowych tylko z brzegu obszaru

Metoda identyfikacji źródeł wykorzystująca wielomiany potęgowe może zostać zaadaptowana dla przypadku posiadania wyników ograniczonych tylko do danych pomiarowych z brzegu badanego obszaru [10]. Zamiana zmiennych ciągłych na dyskretne:

$$x = ih, \quad i = 0, 1, \dots, M+1, \quad y = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (17)$$

umożliwia przybliżenie równania (10) równaniem różnicowym metodą różnic skończonych:

$$u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1) = h^2 f(i, j) = g(i, j), \quad (18)$$

gdzie funkcja $g(i, j)$ oznacza zastępczą funkcję źródłową.

W zmiennych dyskretnych warunki brzegowe Dirichleta mają postać:

$$\begin{aligned} u(0, j) = U_0(j), \quad u(M+1, j) = U_{M+1}(j), \quad j = 0, 1, \dots, N \\ u(i, 0) = U_0(i), \quad u(i, N) = U_N(i), \quad i = 0, 1, \dots, M, M+1. \end{aligned}$$

Przez wprowadzenie wielkości $U(i)$ oraz $G(i)$ oznaczających odpowiednio wektor wartości potencjałów oraz funkcji źródłowej w i -tej kolumnie siatki dla $j = 1, 2, \dots, N-1$, układ równań (20) wraz z warunkami brzegowymi można zapisać w postaci macierzowej:

$$U(i+1) - (2E+A)U(i) + U(i-1) = G(i) - V_0(i) - V_N(i), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (19)$$

gdzie $V_0(i)$ - wektor wartości potencjałów dla $j=0$, $V_N(i)$ - wektor wartości potencjałów dla $j = N$ w i -tej kolumnie siatki, E - macierz jednostkowa, A - macierz aproksymacji różnicowej względem zmiennej j .

Wektory i macierze w równaniu (19) mają postać:

$$\begin{aligned} G(i) = \begin{bmatrix} g(i,1) \\ g(i,2) \\ \dots \\ g(i, N-1) \end{bmatrix}, \quad V_0(i) = \begin{bmatrix} u(i,0) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_N(i) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ u(i, N) \end{bmatrix}, \\ U(i) = \begin{bmatrix} u(i,1) \\ u(i,2) \\ \dots \\ u(i, N-1) \end{bmatrix}, \quad E = \text{diag} [1]_1^{N-1}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Macierz charakterystyczna $B = 2E+A$, pozwala wprowadzić do układu (19) macierzowe wielomiany moniczne rodzaju $P_n(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} A^k$. Następnie eliminując nieznanne wartości potencjałów o indeksach $i = 1, 2, \dots, M-1$, otrzymujemy równanie:

$$P_{M-1}(A) U_{M+1} - P_M(A) U_M + U_0 + H_{0N} = \sum_{i=1}^M P_{i-1}(A) G(i), \quad (20)$$

gdzie U_{M+1} - wektor znanych wartości potencjału na brzegu dla $i = M+1$, U_M - wektorem wartości potencjału dla $i = M$, U_0 - wektorem znanych wartości potencjału dla $i = 0$

$$U_{M+1} = \begin{bmatrix} u(M+1,1) \\ u(M+1,2) \\ \dots \\ u(M+1, N-1) \end{bmatrix}, \quad U_M = \begin{bmatrix} u(M,1) \\ u(M,2) \\ \dots \\ u(M, N-1) \end{bmatrix}, \quad U_0 = \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \\ \dots \\ u(0, N-1) \end{bmatrix},$$

natomiast $H_{0N} = H_0 + H_N$, gdzie H_0 jest wektorem znanych wartości potencjału dla $j = 0$, podobnie jak H_N dla $j = N$. Ponieważ potęgowe wielomiany moniczne $P_n(A)$ tworzą wyrazy uzależnione od kolejnych potęg macierzy A , to porównując odpowiednie współczynniki z lewej i prawej strony równania (20) można wyznaczyć wszystkie wektory $G(i)$, $i = 1, 2, \dots, M$, a tym samym otrzymać rozkład źródeł. Rozwiązanie wymaga jednak znajomości wartości potencjałów w węzłach kolumny sąsiadującej z brzegiem, tj. U_M . Gdy warstwa przy jednym brzegu nie jest dostępna dla pomiarów, wówczas wartości można uzyskać przez przeskalowanie wektora potencjałów na brzegu przyjmując $U_M = \alpha U_{M+1}$, gdzie współczynnik skalowania $\alpha > 1$.

Równanie (20) można rozwiązać alternatywnym sposobem polegającym na wyjściu poza badany obszar o jedną kolumnę węzłów siatki traktując związane z nimi wartości potencjałów jako zerowe wartości brzegowe $U_{M+2} = 0$. Wówczas uwzględniając te wartości otrzymujemy rozwiązanie dla $i = M+1$:

$$U(M+2) - (2E + A)U(M+1) + U(M) + V_0(M+1) = G(M+2) = 0. \quad (21)$$

Wartości potencjałów w kolumnie sąsiadującej z brzegiem wyznaczamy w postaci:

$$U(M) = (2E + A)U(M+1) - V_0(M+1). \quad (22)$$

Podstawieniu wyrażenia $U_M = U(M)$ danego wzorem (22) do równania (20) daje:

$$P_{M-1}(A) U_{M+1} - P_M(A) [(2E + A)U_{M+1} - V_{0,M+1}] + U_0 + H_{0N} = \sum_{i=1}^M P_{i-1}(A) G(i). \quad (23)$$

Przykład 1

W celu zilustrowania efektywności opracowanej metody identyfikacji wykonano obliczenia przyjmując $M = 3$ i $N = 3$. Wówczas na podstawie równania (19) można skonstruować następujący układ równań:

$$\begin{aligned} U(2) - (2E + A)U(1) + U(0) &= G(1) - V_0^3(1) \\ U(3) - (2E + A)U(2) + U(1) &= G(2) - V_0^3(2) \\ U(4) - (2E + A)U(3) + U(2) &= G(3) - V_0^3(3), \end{aligned}$$

gdzie

$$U(0) = \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix}, \quad U(1) = \begin{bmatrix} u(1,1) \\ u(1,2) \end{bmatrix}, \quad U(2) = \begin{bmatrix} u(2,1) \\ u(2,2) \end{bmatrix}, \quad U(3) = \begin{bmatrix} u(3,1) \\ u(3,2) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(4) &= \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_0^3(1) = \mathbf{V}_0(1) - \mathbf{V}_3(1) = \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_0^3(2) = \mathbf{V}_0(1) - \mathbf{V}_N(1) = \begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{V}_0^3(2) &= \mathbf{V}_0(1) - \mathbf{V}_N(1) = \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}(1) &= \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(2) = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(3) = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu wektorów $\mathbf{U}(1)$, $\mathbf{U}(2)$ otrzymujemy następujące równanie:

$$(3\mathbf{E}+4\mathbf{A}+\mathbf{A}^2)\mathbf{U}_4 - (4\mathbf{E}+10\mathbf{A}+6\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3)\mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_0 + (3\mathbf{E}+4\mathbf{A}+\mathbf{A}^4)\mathbf{U}_{0,3}^3 + (2\mathbf{E} + \mathbf{A})\mathbf{U}_{0,1}^3 = (3\mathbf{E}+4\mathbf{A}+\mathbf{A}^2)\mathbf{G}_3 + (2\mathbf{E} + \mathbf{A})\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}(1), \quad \mathbf{U}_2 = \mathbf{U}(2), \quad \mathbf{U}_3 = \mathbf{U}(3), \quad \mathbf{U}_4 = \mathbf{U}(4), \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}(1), \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{G}(2), \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{G}(3),$$

$$\mathbf{V}_{0,1}^3 = \mathbf{V}_0^3(1), \quad \mathbf{V}_{0,2}^3 = \mathbf{V}_0^3(2), \quad \mathbf{V}_{0,3}^3 = \mathbf{V}_0^3(3).$$

Po uporządkowaniu wyrazów i porównaniu współczynników przy tych samych potęgach \mathbf{A} otrzymujemy:

$$3\mathbf{U}_4 + 4\mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_0 + 3\mathbf{V}_{0,3}^3 + 2\mathbf{V}_{0,2}^3 + \mathbf{V}_{0,1}^3 = 3\mathbf{G}_3 + 2\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1$$

$$4\mathbf{U}_4 - 10\mathbf{U}_3 + 4\mathbf{V}_{0,3}^3 + \mathbf{V}_{0,2}^3 = 4\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_2, \quad \mathbf{U}_4 - 6\mathbf{U}_3 + \mathbf{V}_{0,3}^3 = \mathbf{G}_3,$$

skąd

$$\mathbf{G}_1 = 14\mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_{0,1}^3, \quad \mathbf{G}_2 = 14\mathbf{U}_3 + \mathbf{V}_{0,2}^3, \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{U}_4 - 6\mathbf{U}_3 + \mathbf{V}_{0,3}^3.$$

Podstawiając $\mathbf{U}_3 = \alpha\mathbf{U}_4$ otrzymujemy:

$$\mathbf{G}_1 = 14\alpha\mathbf{U}_4 + \mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_{0,1}^3, \quad \mathbf{G}_2 = 14\alpha\mathbf{U}_4 + \mathbf{V}_{0,2}^3, \quad \mathbf{G}_3 = (1 - 6\alpha)\mathbf{U}_4 + \mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_{0,1}^3,$$

$$\text{gdzie } \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix} = 14\alpha \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix} =$$

$$= 14\alpha \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix} = (1 - 6\alpha) \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix}.$$

Przykład 2

Ilustracja obliczeń według formuł wyprowadzonych w powyższym przykładzie dla połowej funkcji wzorcowej (*benchmark function*) w postaci:

$$u_1(x, y) = \cos \pi x \cos \pi y, \quad \text{dla } x \in (0, 1), y \in (0, 1)$$

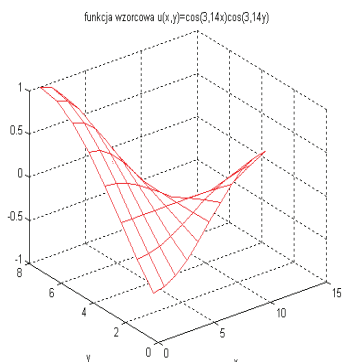
z warunkami brzegowymi:

$$u(0, y) = \cos \pi y, \quad u(x, 0) = \cos \pi x,$$

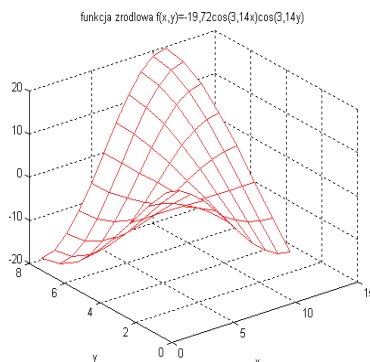
$$u(1, y) = -\cos \pi y, \quad u(x, 1) = -\cos \pi x.$$

Rozwiązując analitycznie równanie Poissona dla funkcji wzorcowej $u_1(x, y)$ można otrzymać funkcję źródłową w postaci:

$$f_1(x, y) = -2\pi^2 \cos \pi x \cos \pi y.$$



Rys. 1. Funkcja wzorcowa u_1
Fig. 1. Benchmark function u_1



Rys. 2. Funkcja źródłowa wzorcowa f_1
Fig. 2. Benchmark sources' function f_1

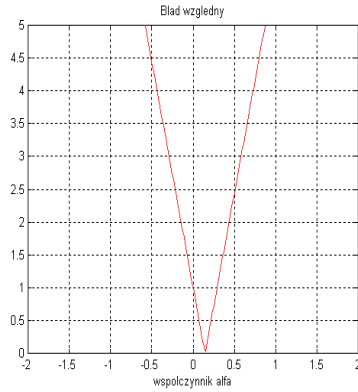
Dla kroku dyskretyzacji $h = 0,25$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(4,1) \\ u(4,2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos(\frac{\pi}{4}) \\ -\cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(0,1) \\ u(0,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u(1,0) \\ u(1,3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} u(2,0) \\ u(2,3) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u(3,0) \\ u(3,3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{3\pi}{4}) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{3\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(1,2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}(7\alpha+1) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} g(2,1) \\ g(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(7\alpha+1) \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} g(3,1) \\ g(3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\alpha \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wartość współczynnika α można oszacować z analizy błędów względnego.

Dla $f(3, 1) = \frac{1}{h^2} \alpha 3\sqrt{2} = 48\sqrt{2}\alpha$ rozwiązanie analityczne wynosi $f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \pi^2$.

$$\text{Błąd względny } \delta(\alpha) = \frac{\left| f(3,1) - f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \right|}{f_a\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)} = \left| \frac{48\sqrt{2}\alpha}{\pi^2} - 1 \right| = |6,88\alpha - 1|.$$



Rys. 3. Wykres błędu względnego $\delta(\alpha)$
Fig. 3. Graph of a relative error $\delta(\alpha)$

5 Funkcjonał mocy w modelowaniu układu pojazd szynowy-tor

Rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł pola można uzyskać także jako rozwiązanie zagadnienie optymalizacji przez wyznaczenie ekstremum funkcjonału mocy. Dla układu 2-D, w odniesieniu do różnicowej postaci równania Poissona (11), funkcjonal mocy można zdefiniować następująco [10]:

$$F = \sum_{i,j=1} F_{i,j} = \sum_{i,j=1} \left[\frac{1}{2} [(u_{i,j} - u_{i+1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j+1})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2] - u_{i,j} q_{i,j} \right] \quad (24)$$

Nazwa funkcjonal mocy związana jest z rozwiązaniem zagadnienia obwodowego w elektrotechnice [12]. Jeśli zamiast siatki prostokątnej węzłów rozpatrzona zostanie sieć rezystancyjna, to wówczas funkcjonal mocy określa moc w obwodzie. W przypadku sieci rezystancyjnej zawierającej oporniki jednakowej konduktancji $G=R^{-1}$, funkcjonal mocy dla sieci o węzłach w punktach $(i-1, j)$, (i, j) , $(i, j+1)$, $(i, j-1)$, $(i+1, j)$ przybiera postać:

$$F_{i,j} = \frac{1}{2} G [(V_{i,j} - V_{i+1,j})^2 + (V_{i,j} - V_{i-1,j})^2 + (V_{i,j} - V_{i,j+1})^2 + (V_{i,j} - V_{i,j-1})^2] - V_{i,j} I_{i,j}, \quad (25)$$

gdzie $I_{i,j}$ oznacza natężenie prądu źródła prądowego dołączonego w punkcie (i, j) , $V_{i,j}$ - napięcie w punkcie (i, j) , $V_{i+1,j}$ - napięcie w punkcie $(i+1, j)$, $V_{i,j+1}$ - napięcie w punkcie $(i, j+1)$, $V_{i,j-1}$ - napięcie w punkcie $(i, j-1)$, kwadraty różnic napięć zostały uzyskane z podstawienia w miejsce odpowiedniego prądu płynącego między sąsiednimi węzłami iloczynu konduktancji i różnicy odpowiednich napięć.

W pracach z zakresu elektrotechniki funkcjonal mocy zastał użyty do opisu stanu sieci rozgałęzionej, gdzie przez znalezienie punktu stacjonarnego funkcjonału wyznaczono wartości potencjałów w węzłach niezależnych [12]. Funkcjonał mocy (25) jest skonstruowany z dwóch składowych, z których pierwsza jest określona jako połowa sumy mocy elementów pasywnych, a druga - mocą źródła prądowego występującego

w obwodzie. Przyjmując $G = 1S$, $q_{ij} = I_{i,j}$, $u_{ij} = V_{i,j}$ oraz sumując po indeksach i, j otrzymujemy wyrażenie (24). Po wyznaczeniu na podstawie równania (11) potencjałów „pośrednich”, tzn. służących do obliczeń pośrednich przy znanych wartościach potencjałów na brzegu obszaru i przez podstawienie ich do równania (24) uzależniono funkcjonal mocy od wartości źródeł, które stanowią zmienne niezależne. Identyfikacja źródeł za pomocą funkcjonalu mocy polega na minimalizacji tego funkcjonalu dla dyskretnej wartości q_{ij} . Dla funkcjonalu kwadratowego $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n)$, gdzie n - ilość źródeł, poszukiwany zestaw źródeł $q_1^*, q_2^*, \dots, q_n^*$ wyznacza się jako punkt stacjonarny funkcjonalu przez obliczenie jego gradientu i gradient funkcjonalu w postaci:

$$\nabla F = \mathbf{B} + \mathbf{C}q. \quad (26)$$

Porównując gradient (26) do zera wyznaczamy punkt stacjonarny funkcjonalu mocy F :

$$q^* = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}. \quad (27)$$

Przykład 3

Dyskretyzacja badanego obszaru siatką kwadratową dla $N = M = 3$. Potencjały pośrednie położone w węzłach wewnętrznych oznaczmy przez V_1, V_2, V_3, V_4 , wartości znanych potencjałów brzegowych przez $V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12}$, natomiast nieznanne wartości funkcji źródłowej przez q_1, q_2, q_3, q_4 . Różnicowe równanie przybliżające równanie różniczkowe Poissona przyjmuje w zapisie macierzowym następującą postać:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix}$$

skąd

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix}.$$

Funkcjonal mocy w tym przypadku zgodnie ze wzorem (24) przyjmuje postać:

$$F = \frac{1}{2} [(V_1 - V_5)^2 + (V_1 - V_{12})^2 + (V_1 - V_2)^2 + (V_1 - V_3)^2 + (V_3 - V_6)^2 + (V_3 - V_7)^2 + (V_3 - V_4)^2 + (V_4 - V_8)^2 + (V_4 - V_2)^2 + (V_4 - V_9)^2 + (V_2 - V_{10})^2 + (V_2 - V_{11})^2] - V_1 q_1 - V_2 q_2 - V_3 q_3 - V_4 q_4.$$

Funkcjonal mocy przedstawiony przez powyższe wyrażenie odznacza się specyficznymi cechami: w nawiasach kwadratowych znajduje się 12 członów, które odpowiadają dwunastu odcinkom łączącym 12 węzły siatki, natomiast poza nawiasami znajdują się cztery składniki odpowiadające 4 węzłom, w których znajdują się poszukiwane źródła. Gdy wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \mathbf{R}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix},$$

$$\text{to} \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$$

Podstawienie wartości potencjałów pośrednich daje funkcjał w postaci formy kwadratowej:

$$F = A_0 + [B_1, B_2, B_3, B_4] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} [q_1, q_2, q_3, q_4] \mathbf{C} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad \text{skąd} \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = -\mathbf{C}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}.$$

Metody identyfikacji źródeł pola z wykorzystaniem w algorytmach obliczeniowych wielomianów potęgowych mogą znaleźć zastosowania w modelowaniu wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – szyna, takich jak zagadnienia wytrzymałościowe i ciepłne. Modelowanie takich zagadnień, jak skręcanie szyny kolejowej, czy badanie śladu ciepłego w szynie wytworzonego przez kontakt toczny koło – szyna zostały przedstawione we wcześniejszych pracach autorów [6, 8, 9].

6 Energia jednookresowa w modelowaniu kontaktu koło-szyna

Pojęcie energii jednookresowej stosowane jest w analizie w czasie rzeczywistym procesów energetycznych w obwodach elektrycznych w stanie okresowym niesinusoidalnym [12]. Procesy energetyczne można wówczas badać na płaszczyźnie fazowej energii oraz oceniać je na podstawie zmian chwilowego napięcia i prądu związanych z danym elementem obwodu w ciągu jednego okresu. Biorąc pod uwagę dwójnik dynamiczny działający w stanie okresowym niesinusoidalnym, dla którego sygnałem wymuszenia będzie napięcie $v(t) = v(t + T)$, T - okres, a odpowiedzią prąd $i(t) = i(t + T)$, to wówczas energię oddaną przez źródło $v(t)$ do odbiornika w przedziale czasu $\Delta t = nT$, $n \in N$, określamy wyrażeniem:

$$W(\Delta t) = nW_T, \quad (28)$$

gdzie W_T oznacza energię jednookresową, tzn. energię dostarczoną do odbiornika podczas jednego okresu wymuszenia i odpowiedzi.

Zatem w stanie okresowym niesinusoidalnym wyznaczenie energii pobranej ze źródła przez odbiornik w danym przedziale czasu $\Delta t = nT$ można sprowadzić do określenia energii jednookresowej W_T , a następnie pomnożenia przez n . Dla badanego zagadnienia W_T wynosi:

$$W_T = \int_0^T v(t)i(t)dt = \int_0^T v(t) \frac{d}{dt} \left(\int i(\tau)d\tau \right) dt = \int_{q(0)}^{q(T)} v(t)dq(t) = \int_{\psi(0)}^{\psi(T)} i(t)d\psi(t), \quad (29)$$

gdzie $q(t) = \int i(t)dt$ oznacza ładunek, a $\psi(t) = \int v(t)dt$ - strumień magnetyczny źródła.

Z postaci wyrażenia (29) wynika, że pole powierzchni ograniczonej pętlą na fazowej płaszczyźnie energii o współrzędnych $(v(t), q(t))$ lub równoważnie $(\psi(t), i(t))$ określa energię jednookresową W_T pobraną przez odbiornik ze źródła, gdy współdziałają one w stanie okresowym niesinusoidalnym.

Gdy $v(t) = |V|\sqrt{2} \cos(\omega t)$ jest harmonicznym napięciem źródłowym, to prąd jako odpowiedź w obwodzie można przedstawić w postaci $i(t) = |I|\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$, gdzie φ oznacza argument impedancji dwójnika $Z = R + jX$, $|V|$ - wartość skuteczną napięcia, $|I| = |V|/Z$ - wartość skuteczną prądu. Gdy prąd chwilowy $i(t)$ przyjmiemy jako jedną ze współrzędnych fazowej płaszczyzny energii, wówczas strumień magnetyczny $\psi(t) = \int v(t)dt = \frac{|V|\sqrt{2}}{\omega} \sin(\omega t)$ powinien być drugą współrzędną tej płaszczyzny. W tym przypadku:

$$W_T = \int_{\psi(0)}^{\psi(T)} i(t)d\psi(t) \quad (30)$$

Aby wyznaczyć wyrażenie określające pętlę energii jednookresowej należy uzależnić sygnał $i(t)$ od $\psi(t)$ przez wyeliminowanie zmiennej t , co można uzyskać przez

podstawienie $\cos(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega\psi(t)}{|V|\sqrt{2}} \right)^2}$, gdzie $\frac{\omega\psi(t)}{|V|\sqrt{2}} = \sin(\omega t)$, do wzoru na $i(t)$.

W rezultacie tego podstawienia otrzymujemy:

$$x^2(t) + y^2(t) - 2x(t)y(t)\sin\varphi = \cos^2\varphi, \quad (31)$$

gdzie $x(t) = i(t)/|I|\sqrt{2}$, $y(t) = \omega\psi(t)/|V|\sqrt{2}$ nowe zmienne bezwymiarowe prądu i strumienia.

Zatem na płaszczyźnie $(x(t), y(t))$ pętla energii jednookresowej przyjmuje postać elipsy, a wartość energii jednookresowej można wyznaczyć jako pole powierzchni elipsy

$$W_T = \pi ab = \frac{2\pi|V||I|\cos^2\varphi}{\omega\sqrt{1 - \sin^2\varphi}} = T|V||I|\cos\varphi, \quad (32)$$

gdzie $T = 2\pi/\omega$ oznacza okres harmonicznego sygnału na wejściu dwójnika.

Rozpatrując kontakt koło-szyna w płaszczyźnie pionowej można zauważyć, że na szynę ze strony koła działa pionowa siła nacisku mająca charakter sygnału okresowego

$$F(t) = f(t + T), \quad (33)$$

gdzie okres T odpowiada przedziałowi czasu do przyjechania koła w następnym wagonie, $T = \Delta x/v$, v - prędkość wzdłuż toru.

W płaszczyźnie pionowej prostopadłej do szyny układ dynamiczny kontaktu tocznego można opisać następującym układem równań:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_1}{dt^2} + b_1 \frac{d(y_1 - y_2)}{dt} + k_1(y_1 - y_2) &= 0 \\ M \frac{d^2 y_2}{dt^2} + b_2 \frac{d(y_2 - y_1)}{dt} + k_2(y_2 - y_1) &= F(t) \end{aligned} \quad (34)$$

gdzie zmienne $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, m , b_1 , k_1 związane są z podkładem, a M , b_2 , k_2 z szyną.

Korzystając z koncepcji badania procesów energetycznych na fazowej płaszczyźnie energii stosowanej do analizy obwodów elektrycznych, energię jednookresową dla badanego przypadku można w oparciu o wzór (29) przedstawić następującą zależnością

$$W_T = \int_0^T F w dt = \int_{y(0)}^{y(T)} F dy_2, \quad w = \frac{dy_2}{dt}. \quad (35)$$

Z postaci wyrażenia (35) wynika, że pole powierzchni ograniczonej pętlą na fazowej płaszczyźnie energii o współrzędnych $(F(t), y_2(t))$ określa energię W_T przekazaną w jednym okresie. Korzystając analogii z opisem obwodu elektrycznego, siła $F(t)$ odpowiada wymuszeniu, czyli napięciu źródłowemu $v(t)$, a zmienna przemieszczenia $y(t)$ - chwilowemu ładunkowi $q(t)$ płynącemu w obwodzie.

7 Wnioski

W pracy przedstawiono zastosowanie sposobów obliczeniowych z zakresu elektrotechniki do rozwiązywania wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor. Wykazano, że takie narzędzia obliczeniowe, jak potęgowe wielomiany moniczne, zmodyfikowane trójkąty liczbowe, czy pojęcia takie, jak funkcjonal mocy, energia jednookresowa używane w obliczeniach sieci i obwodów elektrycznych mogą być wykorzystane w modelowaniu wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor.

Literatura

1. Groetsch Ch. W.: *Inverse Problems in Mathematical Sciences*. Vieweg, Braunschweig/Wiebaden 1992
2. Kącki E.: *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*. WNT, Warszawa 1995
3. Kłos. A., Trzaska Z.: *Modelowanie sieci elektrycznych*. Wyd. ITE, Warszawa 2007.
4. Potter D.: *Metody obliczeniowe fizyki*. PWN, Warszawa 1977
5. Ross K. A. Ch., Wright R. B.: *Matematyka dyskretna*. PWN, Warszawa 1996
6. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Application of inverse problems modelling to design and utilize rail vehicles. *Proc. International Conference on Transport of the 21st Century*, Stare Jabłonki, September 2007, Vol. 2, pp. 169-174

7. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: The Simulation Method used to solve engineering inverse problems. *Proc. 6th Vienna Int. Conf. on Mathematical Modelling MATHMOD9*, Vienna, February 2009, Full Papers CD Vol., Argesim Report No. 35
8. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Efektywne metody modelowania użyteczne w eksploatacji pojazdów szynowych. *Logistyka* 2/2010, dział „Logistyka Nauka”
9. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Modelowanie kontaktu koło - szyna. *Logistyka* 6/2009
10. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Efektywne metody identyfikacji w inżynierii kolejowej. *Symulacja w Badaniach i Rozwoju* .Vol. 1, No 1/2010, str. 73-83
11. Tikhonov A. N.: Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G.: *Numerical Methods for the Solution of Ill-posed Problem*. Kluwer, Dordrecht 1995
12. Trzaska Z.: *Analiza i projektowanie obwodów elektrycznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008

Streszczenie

W pracy przedstawiono wyniki badań nad zaadaptowaniem narzędzi obliczeniowych wykorzystywanych w elektrotechnice do modelowania wybranych zagadnień w układzie pojazd szynowy – tor. Wykazano, że wielomiany potęgowe, wykorzystywane w obliczeniach sieci i obwodów elektrycznych, stanowią efektywne narzędzia obliczeniowe w algorytmach metod numerycznych służących do identyfikacji źródeł pól fizycznych opisanych równaniem różniczkowym cząstkowym (Poissona). Opracowane z użyciem wielomianów potęgowych, a także funkcjonału mocy metody identyfikacji źródeł mogą znaleźć zastosowanie w rozwiązywaniu zagadnień wytrzymałościowych i cieplnych w układach transportu szynowego, m.in. w układzie pojazd szynowy – tor. Natomiast sposób obliczeń z wykorzystaniem pojęcia energii jednookresowej może znaleźć zastosowanie w modelowaniu dynamiki kontaktu koło - szyna dla siły wertykalnej.

Application of computational approaches from the field of electrical engineering to model selected issues in a rail vehicle – track system

Summary

In this paper there are presented the results of investigations regarding the adaptation of computational tools from the field of electrotechnique to modelling selected issues in a rail vehicle – track system. It is showed that the power polynomials applied in calculations of electrical nets and circuits are the effective computational tools useful in construction of algorithms of numerical methods for identification of field sources which are described by the Poisson equation. Also it is showed that the power functional applied to descript a state of ramification electrical nets is the useful tool to solve a field sources identification problem in systems described by the Poisson equation. The identification methods established with the use of power polynomials and the power functional can be applied in solving endurance and heat problems in railway transport systems, e. g. in a rail vehicle – track system. Also it is presented special approach of dynamical modelling a wheel-rail contact for vertical force with the use of one period energy concept which is applied in the analysis of real time energetic processes in electrical circuits.