

**Zdzisław GAŁKOWSKI**

Warsaw University of Technology,  
Institute of Machine Design Fundamentals  
ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa, Polska  
tel. (022) 234-85-32  
E-mail: [zga@simr.pw.edu.pl](mailto:zga@simr.pw.edu.pl)

## **Drgania swobodne układu dynamicznego ze sprzęgłem tulejowym wykonanym z materiału o nieliniowym tłumieniu wewnętrznym**

### **1 Wstęp**

Z pracą maszyn i urządzeń nierozzerwalnie związane jest występowanie drgań, będące skutkiem niewyważenia elementów wirujących bądź zewnętrznych wymuszeń. Zjawisko to jest szkodliwe zarówno ze względów eksploatacyjnych jak i technologicznych. Koniecznym jest więc ich tłumienie, będące przejawem rozpraszania energii mechanicznej. Na tłumienie drgań wpływ mają właściwości środowiska, w którym zachodzi ruch układu (aerodynamiczne i hydrodynamiczne), tarcie w podporach i połączeniach oraz tarcie wewnętrzne w materiale.

Straty energii na tarcie w nierozłącznych połączeniach nazwane zostały tłumieniem konstrukcyjnym. Tego rodzaju tarcie potocznie nazywa się tarcie konstrukcyjnym. Istotą tarcia konstrukcyjnego jest uwzględnianie sił tarcia na powierzchni kontaktu elementów i ich odkształcenie sprężyste. Tarcie konstrukcyjne jest jednym z naturalnych sposobów tłumienia drgań.

Badania zagadnień tłumienia konstrukcyjnego odnoszą się do uproszczonych typowych modeli nierozłącznych połączeń i przeprowadza się je przy następujących założeniach, podanych w pracy [3].

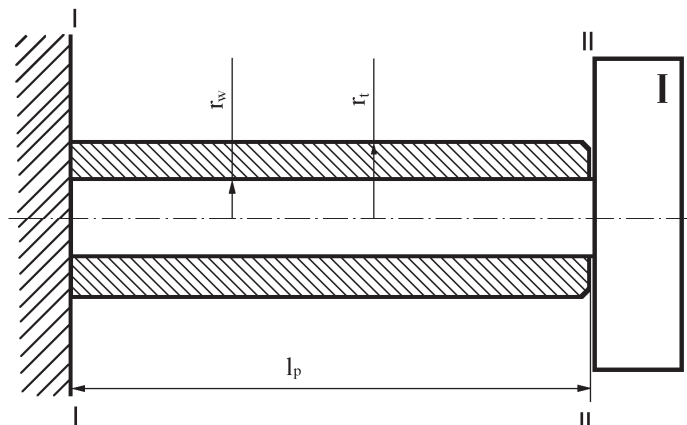
1. Materiał elementów połączenia jest idealnie sprężysty.
2. Intensywność sił tarcia na powierzchni wzajemnego poślizgu elementów łączonych opisuje się prawem Coulomba.
3. Naciski jednostkowe występujące w połączeniu mają rozkład równomierny.

Przy przyjętych założeniach możliwe jest przeprowadzenie badań właściwości sprężysto – tłumiących typowych modeli połączeń.

### **2 Budowa modelu matematycznego**

Przyjmijmy do analizy nierozłączne, włączane połączenie tuleja – wał, w którym wał jest niepodzielony, a tuleja osadzona na wale stanowi tłumik drgań skrętnych. Połączenie to jest modelem sprzęgła tulejowego występującego często w konstrukcjach maszyn i urządzeń, jako jeden z elementów łańcucha kinematycznego. Schemat przyjętego układu, uwzględniającego połowę długości wału i tulei, przedstawiono

na rys. 1. Przyjmijmy też, że naciski mają rozkład równomierny, oraz że współczynnik tarcia suchego ma stałą wartość na całej długości. Przyjmijmy również, odmiennie w stosunku do klasycznych założeń, że połączenie wykonane jest z materiału



Rys. 1. Schemat badanego układu dynamicznego

Fig. 1. A scheme of the analyzed system

o właściwościach lepkosprężystych opisywanych zespolonym modułem sprężystości na skręcanie, o nieliniowym współczynniku tłumienia wewnętrznego:

$$G^* = G(1 + i\beta), \quad (1)$$

gdzie:  $G$  – moduł sprężystości postaciowej (Kirchhoffa),

$\beta = \beta_0 + \beta_1 \varphi_A \operatorname{sign} \varphi_A + \beta_2 \varphi_A^2$  – współczynnik tłumienia wewnętrznego.

Dokonyjąc prostych przekształceń, otrzymujemy zależność na zespoloną sztywność na skręcanie w postaci:

$$k_s^* = k_s (1 + i\beta). \quad (2)$$

Oznaczając przez  $\varphi$  kąt skręcenia pręta, moment skrętny elementu lepkosprężystego, na podstawie [1], można wyrazić w postaci:

$$M_s = k_s \varphi + \frac{k_s \beta}{\omega_0} \dot{\varphi} = k_s \varphi + l \dot{\varphi}. \quad (3)$$

gdzie  $l$  jest współczynnikiem tłumienia wiskotycznego reprezentującym właściwości tłumienia wewnętrznego materiału.

W przyjętym modelu dynamicznym, uwzględniającym występowanie tarcia konstrukcyjnego, na powierzchni styku tulei i wału występuje tarcie suche. Jednostkowa siła tarcia określana jest prawem Coulomba, a więc jest proporcjonalna do nacisku i opisana jest zależnością:

$$q_T = p \cdot f, \quad (4)$$

gdzie:  $p$  – nacisk jednostkowy,

$f$  – współczynnik tarcia suchego.

Przyjmując do analizy, hipotezy sformułowane w pracy [3], przyjęto następujące założenia:

- długość połączenia jest wystarczająco duża, tak aby nie nastąpił obrót wału względem tulei, w przypadku wystąpienia maksymalnego momentu obciążającego układ,
  - współczynnik tarcia ma stałą wartość na całej długości połączenia,
  - w strefach względnego poślizgu pomiędzy wałem i tuleją, pojawią się jednostkowe siły tarcia o rozkładzie równomiernym,
  - w strefach w których poślizg nie nastąpił, momenty od sił tarcia nie występują.
- Przy tak przyjętych założeniach, jednostkowy moment tarcia jest stały i wynosi:

$$m_T = 2\pi r_w q_T, \quad (5)$$

gdzie:  $r_w$  – promień wału.

Kąt skręcenia przekroju II – II względem przekroju I – I, opisujący właściwości sprężysto – tłumiące połączenia, w dowolnym etapie ruchu, na podstawie [2] ma postać:

$$\varphi(M) = \varphi_A(M_A) - k \frac{M - M_A}{G_w I_w} l_p + \frac{1 - 3k + 3k^2}{1 - k} \frac{(M - M_A)^2}{4m_T G_w I_w} \text{sign } \dot{\varphi} \quad (6)$$

gdzie:  $\varphi_A(M_A)$  – maksymalne przemieszczenie układu w końcu i-tego etapu ruchu,

$$k = \frac{G_w I_w}{G_w I_w + G_T I_T} \quad \text{– współczynnik udziału sztywności wału w sztywności połączenia,}$$

$G_w I_w$  – sztywność wału,

$G_T I_T$  – sztywność tulei,

$l_p$  – długość połączenia.

Przekształcając odpowiednio równanie (6), otrzymujemy wyrażenie określające wartość momentu skrętnego pochodzącego od sił tarcia, uogólnionego na dowolny etap ruchu, w postaci:

$$M_T = \frac{k_0}{\kappa} \left[ -\sqrt{\mu_p k^2} - \sqrt{\mu_p k^2 - 2\kappa\varphi_A \text{sign } \dot{\varphi}} + 2\sqrt{\mu_p k^2 + \kappa(\varphi - \varphi_A) \text{sign } \dot{\varphi}} \right] \text{sign } \dot{\varphi} \quad (7)$$

gdzie:  $k_0 = \sqrt{m_T G_w I_w}$  – współczynnik sprężystości tarcia,

$$\mu_p = \frac{m_T l_p^2}{G_w I_w} \quad \text{– współczynnik określający długość połączenia,}$$

$$\kappa = \frac{1 - 3k + 3k^2}{1 - k} \quad \text{– współczynnik.}$$

Równanie ruchu przedstawionego układu dynamicznego, można przedstawić w postaci:

$$I\ddot{\phi} + l\dot{\phi} + \frac{k_0}{\kappa} \left[ -\sqrt{\mu_p k^2} - \sqrt{\mu_p k^2 - 2\kappa\varphi_A \text{sign } \dot{\phi}} + 2\sqrt{\mu_p k^2 + \kappa(\varphi - \varphi_p) \text{sign } \dot{\phi}} \right] \text{sign } \dot{\phi} = M(t). \quad (8)$$

Po dokonaniu odpowiednich przekształceń, (rozwiniecie w szereg), mających na celu wyłonienie członu proporcjonalnego do przemieszczenia, równanie ruchu otrzymujemy w postaci:

$$I\ddot{\phi} + k_s \varphi = M(t) - \frac{\beta k_s}{\omega_0} \dot{\phi} + \frac{k_0}{\kappa} \left\{ \sqrt{\mu_p k^2} + \sqrt{\mu_p k^2 - 2\kappa\varphi_A \text{sign } \dot{\phi}} - 2\sqrt{\mu_p k^2 - \kappa\varphi_A \text{sign } \dot{\phi}} \left[ 1 + \sum_{n=2}^N (-1)^{n-1} \frac{[2(n-1)]!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} \left( \frac{\kappa\varphi}{\mu_p k^2 - \kappa\varphi_A \text{sign } \dot{\phi}} \right)^n \right] \right\} \text{sign } \dot{\phi} \quad (9)$$

gdzie:  $k_s = \frac{k_0}{\sqrt{\mu_p k^2 - \kappa\varphi_A \text{sign } \dot{\phi}}}$  – współczynnik sztywności połączenia na skręcanie.

Zależność (9) możemy przedstawić w postaci:

$$I\ddot{\phi} + k_s \varphi = M(t) + F(\varphi, \dot{\phi}, t), \quad (10)$$

### 3 Rozwiązanie równania ruchu

Analizę równania ruchu (9) przeprowadzimy dla przypadku drgań swobodnych.

Rozwiązania równania (9) będziemy poszukiwać przy pomocy asymptotycznej metody Bogoliubowa – Kryłowa – Mitropolskiego podanej w pracy [4], przyjmując pierwsze przybliżenie w postaci:

$$\varphi = \varphi_A \cos(\Theta + \xi). \quad (11)$$

W równaniu powyższym  $\varphi_A$  i  $\xi$  wyznaczamy z układu równań różniczkowych pierwszego przybliżenia:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_A}{dt} &= A_1(\varphi_A, t, \xi) \\ \frac{d\xi}{dt} &= \omega_0 - \omega(t) + B_1(\varphi_A, t, \xi) \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

gdzie:  $\omega_0$  – częstość drgań własnych.

Dokonyjąc odpowiednich przekształceń równania (12) otrzymujemy w postaci:

$$A_1(\varphi_A, t, \xi) = -\frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} F_0(\varphi_A, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (13)$$

$$B_1(\varphi_A, t, \xi) = -\frac{1}{2\pi\omega_0\varphi_A} \int_0^{2\pi} F_A(\varphi_A, \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta, \quad (14)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \Theta + \xi \\ F_0(\varphi_A, \vartheta) &= F(\varphi_A \cos \vartheta, -\omega_0 \varphi_A \sin \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Podstawiając równania (13) i (14) do układu równań (12), równania pierwszego przybliżenia przyjmują postać:

$$\frac{d\varphi_A}{dt} = -\frac{1}{2\pi I \omega_0} \int_0^{2\pi} F_0(\varphi_A, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (16)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega_0 - \omega(t) - \frac{1}{2\pi I \omega_0 \varphi_A} \int_0^{2\pi} F_A(\varphi_A, \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta. \quad (17)$$

Po przeprowadzeniu całkowania i odpowiednich przekształceń, równania (16) i (17) określające pochodną amplitudy i pochodną fazy otrzymujemy w postaci:

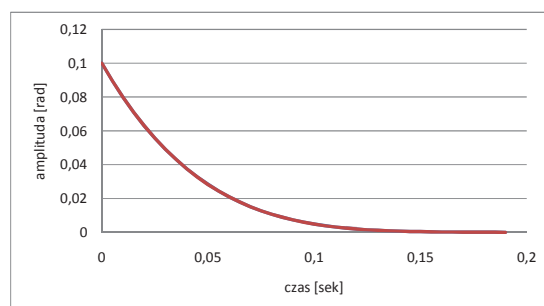
$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_A}{dt} &= -\frac{2k_0}{\pi I \omega_0 \kappa} \left\{ \sqrt{\mu_p k^2} + \sqrt{\mu_p k^2 + 2\kappa\varphi_A} - 2\sqrt{\mu_p k^2 + \kappa\varphi_A} \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 - \sum_{j=1}^{\text{int}(N/2)} \frac{[2(2j-1)]!}{2^{4j+1} (2j-1)! (2j)!} \left( \frac{\kappa\varphi_A}{\mu_p k^2 + \kappa\varphi_A} \right)^{2j} \right\} - \frac{\omega_0 \varphi_A}{2} \beta, \end{aligned} \quad (18)$$

oraz

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \omega_0 - \frac{2k_0}{I \omega_0 \varphi_A \kappa} \left\{ \sum_{j=1}^{\text{int}(N/2)} \frac{(4j)!}{2^{4j+1} (2j+1)! (2j)!} \times \right. \\ &\times \left. \frac{(2j+1)!}{[2(2j+1)]!} \left( \frac{\kappa\varphi_A}{\mu_p k^2 + \kappa\varphi_A} \right)^{2j} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie:  $\beta = \beta_0 + \beta_1 \varphi_A + \beta_2 \varphi_A^2$  – współczynnik tłumienia wewnętrznego materiału.

Korzystając z otrzymanych zależności (18) i (19) przeprowadzono symulację komputerową określając wpływ nieliniowego tłumienia wewnętrznego materiału na przebieg amplitudy drgań swobodnych. Do obliczeń za [7] przyjęto, że elementy połączenia wykonane są ze stali E295 (St5) o następujących wartościach współczynników tłumienia wewnętrznego:  $\beta_0 = 3,81 \cdot 10^{-4}$ ,  $\beta_1 = 3,51 \cdot 10^{-4}$  oraz  $\beta_2 = 1,27 \cdot 10^{-7}$ . Wyniki symulacji cyfrowej przedstawiono w postaci wykresu przedstawionego na rys 2. Na wykresie tym przedstawiono przebieg amplitudy drgań swobodnych układu, dla połączenia wykonanego z materiału lepkosprężystego oraz porównano z amplitudą układu wykonanego z materiału sprężystego. Z przedstawionego wykresu wynika, że amplitudy te są prawie jednakowe, a zatem efekt tłumienia jest minimalny.



Rys. 2. Przebieg amplitudy drgań

Fig. 2. Vibrations' amplitude

Tabela 1

Table 1

Czas	0,0	0,025	0,05	0,075	0,1	0,125
m. spręż.	0,1	0,557684E-1	0,283937E-1	0,128332E-1	0,496600E-2	0,158621E-2
m. z tłum.	0,1	0,557404E-1	0,283650E-1	0,128102E-1	0,495157E-2	0,157926E-2
różnica	0,0	0,280E-4	0,287E-4	0,230E-4	0,1443E-4	0,695E-5

Czas	0,15	,2
m. spręż.	0,427264E-3	0,400983E-4
m. z tłum.	0,424680E-3	0,398272E-4
różnica	0,2584E-5	0,274E-7

W tabeli 1 przedstawiono przebieg różnicy amplitud obydwu materiałów. Z analizy tabeli, że różnice te są bardzo małe, mniejsze o ok. 4 rzędy wielkości od wielkości amplitud. Z wyników przedstawionych w tabeli 1, można domniemywać, wzrost amplitudy drgań powoduje wzrost efektywności tłumienia materiałowego.

#### 4 Wnioski końcowe

1. Uwzględnienie tłumienia wewnętrznego materiału w bardzo małym stopniu wpływa na jakość tłumienia amplitudy drgań w stosunku do tłumienia dla materiału sprężystego.
2. Z analizy wyników symulacji, w badanym zakresie amplitud wnioskujemy, że największy wpływ na zwiększenie tłumienia ma współczynnik  $\beta_0$ .
3. W analizie dynamicznej układów dynamicznych uwzględniających tarcie konstrukcyjne można pominąć tarcie wewnętrzne jako bardzo małe w stosunku do tarcia konstrukcyjnego.
4. Wzrost amplitudy drgań powoduje wzrost efektywności tłumienia materiałowego.

#### Literatura

1. Arczewski K., Pietrucha J., Szuster J. T.: *Drgania układów fizycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008
2. Gałkowski Z.: *Badanie procesów niestacjonarnych układy dynamicznego z uwzględnieniem tarcia konstrukcyjnego*, rozprawa doktorska, PW, 1981

3. Калинин Н. Г. и др.: *Конструкционное демпфирование в неподвижных соединениях*. Издат. А. Н. Латв. ССР Рига 1960
4. Митропольский Ю. А.: *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*. Издат. Наука. Москва 1964
5. Филиров А. П.: *Колебания механических систем*, Издат. Наук. Дума, Киев, 1965

### Streszczenie

Praca poświęcona jest analizie wpływu tarcia konstrukcyjnego oraz nieliniowego tłumienia wewnętrznego materiału na tłumienie drgań skrętnych nierozłącznego połączenia tuleja – wał, będącego modelem sprzęgła. W analizie uwzględniono występowanie tarcia konstrukcyjnego pomiędzy wałem a tuleją. Przyjęto też, że zarówno tuleja jak i wał wykonane są ze stali o nieliniowym tłumieniu wewnętrznym. Dla potrzeb analizy określono współczynnik tarcia wiskotycznego będący reprezentantem tarcia wewnętrznego. Następnie określono różniczkowe równanie ruchu układu, oraz rozwiązano je za pomocą asymptotycznej metody Bogoliubowa – Kryłowa – Mitropolskiego wyznaczając amplitudę drgań swobodnych układu.

W ramach pracy, otrzymane wyniki porównano z przebiegiem drgań swobodnych dla materiału sprężystego. Otrzymane wyniki przedstawiono w postaci wykresu.

## **Free vibration in a dynamic system with an inseparable sleeve-shaft joint made of a material with non-linear internal damping**

### Summary

The paper is dedicated to analyze the influence of constructional friction and materials' non-linear internal damping on the damping of torsion vibrations in an inseparable sleeve-shaft joint. This joint serves as a coupling model. Constructional friction between the sleeve and the shaft have been taken into account in the analysis. It was also assumed that both the sleeve and the shaft are made of steel with non-linear internal damping. The internal damping was represented by the viscotic friction coefficient for the purpose of the analysis. Next, the differential equations of the system's motion were determined. The equations were solved using asymptotic Bogolyubov – Krylov – Mitropolski method to determine the amplitude of the system's free vibration. The obtained results were compared to free vibration characteristic of an elastic material. The results are shown on graphs.