

Józef STRUSKI, Marek S. KOWALSKI

Politechnika Krakowska, Wydział Mechaniczny,
Instytut Pojazdów Samochodowych i Silników Spalinowych,
Al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków
E-mail: rust@mech.pk.edu.pl, mskow@mech.pk.edu.pl

Wpływ struktury równań więzów geometrycznych mechanizmów wielowahaczowych zawiesznień kół na efektywność numeryczną

1 Wprowadzenie

W teoretycznych zagadnieniach z zakresu kinematyki, układy prowadzenia kół względem nadwozia reprezentowane są przez mechanizmy przestrzenne. Struktura tych mechanizmów jest różnorodna. Różne metody stosowane są do rozwiązywania ich kinematyki [2]. W przypadku analizy zawiesznień kół McPhersona i na dwóch wahaczach poprzecznych stosowana jest najczęściej metoda macierzowa.

Układy nieliniowych równań więzów geometrycznych, nakładających ograniczenia na ruch względny poszczególnych członów mechanizmów zawiesznień wielowahaczowych zapisywane są w postaci skalarnej [3] lub wektorowej [4]. Układy tych równań najczęściej rozwiązywane są za pomocą metod numerycznych lub metody perturbacji [1]. Metoda perturbacji umożliwia wyznaczenie rozwiązań nieliniowych równań więzów geometrycznych w postaci szeregów liczbowych.

W zagadnieniach z zakresu syntezy zawiesznień, modelowania dynamiki samochodu, pożądana jest minimalizacja czasu przeprowadzanych eksperymentów numerycznych.

Synteza zawiesznień kół składa się z kilku etapów. W pierwszej kolejności należy opracować strukturę mechanizmu zawieszenia, następnie wyznacza się jego parametry geometryczne – współrzędne przegubów łączących wahacze z nadwoziem i ze zwrotnicą lub wspornikiem koła, których położenie w przestrzeni ruchów resorowania przyporządkowane jest konstrukcyjnej konfiguracji zawieszenia.

Badanie właściwości dynamicznych projektowanych samochodów możliwe jest za pomocą ich modeli matematycznych o wielu stopniach swobody. W modelach tych uwzględnione są mechanizmy zawiesznień o różnej strukturze.

2 Zakres i cel pracy

W opracowaniu zostaną przedstawione dwa sposoby rozwiązywania kinematyki mechanizmu wielowahaczowego zawieszenia kół kierowanych o dwóch stopniach ruchliwości za pomocą metody perturbacji [1]. W pierwszym sposobie układ 17 równań więzów geometrycznych, nakładających ograniczenia na względne przemieszczenia poszczególnych członów mechanizmów zawieszenia, zapisany zostanie w postaci skalarnej. W drugim sposobie układ 5 równań – w formie wektorowej.

Układy współrzędnych $\{N\}$, $\{O_1\}$ są układami sztywno związanymi odpowiednio z nadwoziem i zwrotnicą koła.

4 Równania więzów geometrycznych rozważanego mechanizmu

Równania więzów geometrycznych mechanizmu zawieszenia, pokazanego na rysunku, można zapisać w postaci układów 17 lub 5 nieliniowych równań algebraicznych. W pierwszym sposobie równania wyrażają kwadraty odległości charakterystycznych punktów mechanizmu

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{AjBj}^T \mathbf{r}_{AjBj} = l_j^2, & \text{dla } j = (1)5 \\ \mathbf{r}_{BjBk}^T \mathbf{r}_{BjBk} = l_{jk}^2, & \text{dla } \begin{cases} j = 1 \text{ i } k = (2)5 \\ j = 2 \text{ i } k = (3)5 \\ j = (1)5 \text{ i } k = 7 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

W powyższym układzie równań parametrami zadawanymi są współrzędne q_3 punktu $O_1(q_1, q_2, q_3)$ i przesunięcie listwy zębatej u_z , dodawane do współrzędnej y_{A3} punktu $A_3(x_{A3}, y_{A3}+u_z, z_{A3})$. Przy danych parametrach q_3 i u_z z układu (1) wyznaczane są współrzędne punktów $B_j(x_{Bj}, y_{Bj}, z_{Bj})$, dla $j=(1)5$ oraz q_1 i q_2 punktu O_1 .

W drugim sposobie równania wyrażają kwadraty długości wektorów o początkach i końcach, odpowiednio, w punktach A_j, B_j , dla $j=(1)5$ zapisane w formie:

$$\left(\mathbf{r}_{NO1.N} + \mathbf{A}_{NO1} \mathbf{r}_{O1Bj.O1} - \mathbf{r}_{NAj.N} \right)^T \left(\mathbf{r}_{NO1.N} + \mathbf{A}_{NO1} \mathbf{r}_{O1Bj.O1} - \mathbf{r}_{NAj.N} \right) = l_j^2 \quad (2)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_{NO1} = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{A}_\beta \mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \quad (3)$$

Jest macierzą obrotu $\{O_1\}$ względem $\{N\}$.

Natomiast

$$l_j^2 = \mathbf{r}_{AjBj.N}^T \mathbf{r}_{AjBj.N}$$

Przy wymienionych już zadawanych parametrach q_3 i u_z z układu (1) obliczane są współrzędne q_1 i q_2 środka koła $O_1(q_1, q_2, q_3)$ oraz kąty rotacji $\{O_1\}$ względem $\{N\}$: α, β, γ .

W celu zapewnienia równoważności zakresu obliczeń algorytmów opracowanych na podstawie układów równań (1) i (2) konieczne jest wyznaczenie kątów rotacji $\{O_1\}$: α, β i γ względem $\{N\}$. Zatem układ równań (1) musi być uzupełniony o obliczenia wymienionych kątów.

Po obliczeniu współrzędnych punktów O_1 , i $B_j(j=(1)5)$ można utworzyć trzy wektory \mathbf{r}_{O1Bj} dla $j \in \{1,2,3,4,5\}$. Dla każdego z tych wektorów spełnione jest równanie macierzowe

$$\mathbf{r}_{O1Bj.O1} = \mathbf{A}_{O1N} \mathbf{r}_{O1Bj.N} \quad (4)$$

gdzie:

$\mathbf{r}_{O_1B_j.O_1}$ – wektor w $\{O_1\}$,

$\mathbf{r}_{O_1B_j.N}$ – wektor w $\{N\}$,

$$\mathbf{A}_{O_1N} = \mathbf{A}_{NO_1}^T = \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & c\beta s\gamma & -s\beta \\ s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\beta s\gamma + s\alpha c\gamma & s\alpha c\beta \\ c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

Oznaczając współrzędne wektorów: $\mathbf{r}_{O_1B_j.O_1} = [x_{bj} \quad y_{bj} \quad z_{bj}]^T$.

$\mathbf{r}_{O_1B_j.N} = [x_{jb} \quad y_{jb} \quad z_{jb}]^T$ i przyjmując $j = n, m, v$; na podstawie (4) otrzymuje się:

$$\left. \begin{aligned} x_{bn} &= (x_{nb}c\gamma + y_{nb}s\gamma)c\beta - z_{nb}s\beta \\ x_{bm} &= (x_{mb}c\gamma + y_{mb}s\gamma)c\beta - z_{mb}s\beta \\ x_{bv} &= (x_{vb}c\gamma + y_{vb}s\gamma)c\beta - z_{vb}s\beta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Z układu równań (5) obliczane są kąty rotacji β i γ . W celu obliczenia kąta rotacji α wykorzystano równanie:

$$y_{bv} = (x_{vb}s\beta c\gamma)s\alpha - (x_{vb}s\gamma)c\alpha + (y_{vb}s\beta s\gamma)s\alpha + (y_{vb}c\gamma)c\alpha + (z_{vb}c\beta)s\alpha \quad (6)$$

Następnie, mając kąty rotacji $\{N\}$ względem $\{O_1\}$, obliczono współrzędne wektora $\mathbf{r}_{B_6B_7.N}$

$$\mathbf{r}_{B_6B_7.N} = \mathbf{A}_{NO_1} \mathbf{r}_{B_6B_7.O_1}, \quad (7)$$

wektor jednostkowy $\mathbf{e}_k = [e_{kx} \quad e_{ky} \quad e_{kz}]$ na osi obrotu koła oraz kąty skreću i pochylenia koła:

$$\delta_k = -\arctg\left(\frac{e_{kx}}{e_{ky}}\right), \quad (8)$$

$$\gamma_k = -\arcsin(e_{kz}). \quad (9)$$

Obliczenie kątów δ_k i γ_k w obu algorytmach jest analogiczne.

5 Rozwiązywanie układów równań więzów geometrycznych mechanizmu zawieszenia.

Rozwiązanie układów równań (1) i (2) uzyskano za pomocą metody perturbacji [1]. W odniesieniu do układu równań przestępnych (2) funkcje trygonometryczne rozwinięto w szeregi trygonometryczne:

$$\sin(x_0 + x) = \sin x_0 + x \cos x_0 - \frac{x^2 \sin x_0}{2}, \quad (10)$$

$$\cos(x_0 + x) = \cos x_0 - x \sin x_0 - \frac{x^2 \cos x_0}{2} \quad (11)$$

i otrzymano układ równań, który można zapisać w ogólnej formie:

$$f_j(q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) = 0 \quad j = (1)5 \quad (12)$$

Równania układu (12) rozdzielono na części nieliniowe i liniowe:

$$f_{jN}(q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) + f_{jL}(q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) = 0, \quad j = (1)5 \quad (13)$$

Części nieliniowe tych równań pomnożono przez parametr perturbacyjny ε i otrzymano układ równań pomocniczych

$$g_j(\varepsilon, q_1, q_2, \alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon f_{jN} + f_{jL}, \quad j = (1)5, \quad (14)$$

Dla $\varepsilon=1$ układy równań (13) i (14) są identyczne, natomiast dla $\varepsilon=0$ układ (13) utworzony jest tylko z równań liniowych.

Założono, że rozwiązaniami układu (14) są szeregi liczbowe:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i q_{1i}, & q_2 &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i q_{2i}, \\ \alpha &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \alpha_i, & \beta &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \beta_i, & \gamma &= \sum_{i=0}^m \varepsilon^i \gamma_i, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Po podstawieniu (15) do (14) otrzymuje się

$$g_j(\varepsilon, q_1(\varepsilon), q_2(\varepsilon), \alpha(\varepsilon), \beta(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)) = 0, \quad j = (1)5, \quad (16)$$

Układ równań (16) rozwinięto w szeregi względem potęg ε :

$$\sum_{i=0}^2 \varepsilon^i g_{ji} = 0, \quad j = (1)5 \quad (17)$$

Następnie rozwiązano liniowe układy równań $g_{ji}=0$ najpierw dla $i=0$ potem dla $i=1,2$. Otrzymano rozwiązania, które można zapisać w ogólnej postaci:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \sum_{i=0}^2 q_{1i}, & q_2 &= \sum_{i=0}^2 q_{2i}, \\ \alpha &= \sum_{i=0}^2 \alpha_i, & \beta &= \sum_{i=0}^2 \beta_i, & \gamma &= \sum_{i=0}^2 \gamma_i, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Układ równań (1) rozwiązano w analogiczny sposób.

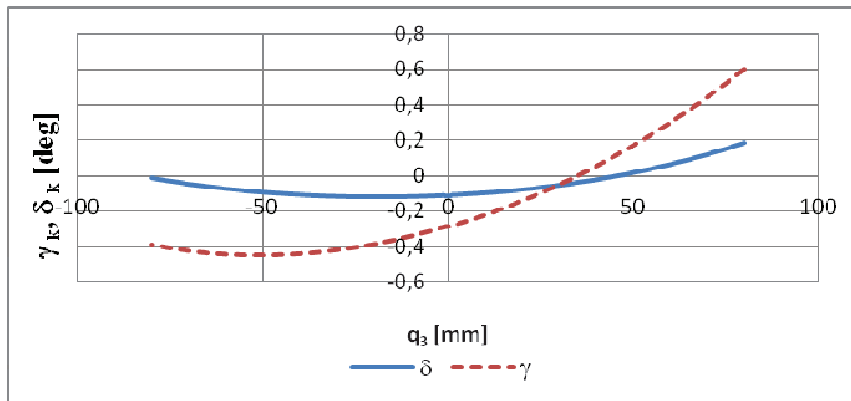
6 Przykład liczbowy

Położenie konstrukcyjne mechanizmu zawieszona pokazanego na rysunku 1 określone jest wartościami współrzędnych charakterystycznych punktów w [mm]:

$A_1(132,1, 347,4, -93,8),$	$A_2(-245,3, 379,0, -114,3)$
$A_3(-88,05, 385,61, 280,92),$	$A_4(138,74, 431,18 389,65)$
$A_5(6,47, 400,47, 381,42),$	
$B_1(29,0, 697,0, -98,2),$	$B_2(-23,7, 693,3, -132,5)$
$B_3(-140,3, 619,7, 284,0),$	$B_4(9,3, 675,3, 389,0)$
$B_5(-24,0, 642,0, 387,0),$	
$B_6(-0,2, 650,0, 0,5),$	$B_7(0,0, 750,0, 0,0)$

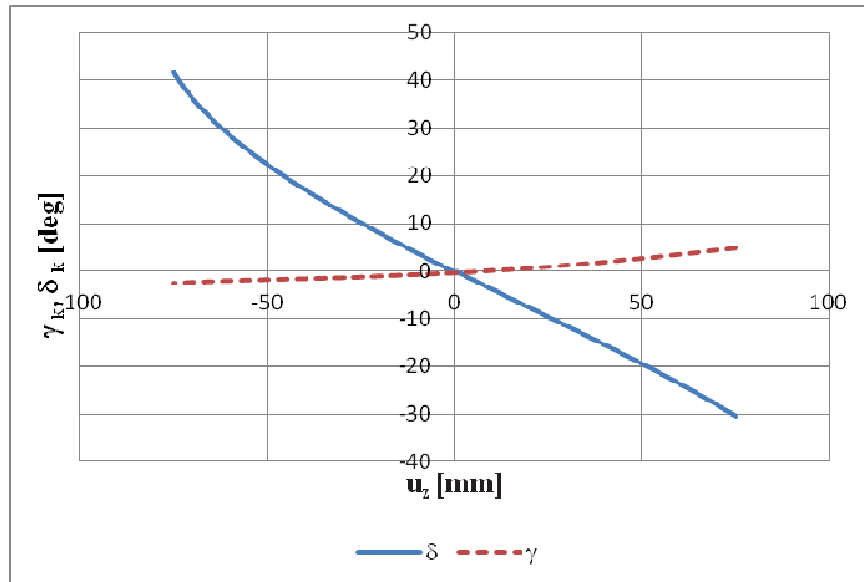
Rozwiązania układów równań (1) i (2) wyznaczano dla zadawanych parametrów wejściowych q_3 i u_z z tym samym krokiem równym 0,5 mm. Porównywalne rozwiązania wymienionych układów przy tym kroku uzyskano prawie takie same.

Na rysunkach 2 i 3 przedstawiono podstawowe charakterystyki kinematyczne kątów skrętu i pochylenia koła oraz podano czas obliczeń numerycznych.



Czas obliczeń dla układu równań (1) = 2,276 s
 Czas obliczeń dla układu równań (2) = 45,216 s

Rys. 2. Charakterystyka kątów skrętu i pochylenia koła przy $u_z = 0$.
 Fig. 2. Steering angle and wheel camber characteristics, $u_z = 0$.



Czas obliczeń dla układu równań (1) = 2,184 s
 Czas obliczeń dla układu równań (2) = 46,334 s

Rys. 3. Charakterystyka kątów skrętu i pochylenia koła przy $q_3 = 0$.
 Fig. 3. Steering angle and wheel camber characteristics, $q_3 = 0$.

7 Zakończenie

Dla mechanizmu wielowahaczowego zawieszzenia kół kierowanych układy równań więzów geometrycznych podano w dwóch strukturalnie różnych postaciach skalarnej i wektorowej. Układ równań wektorowych utworzony jest z równań przestępnych. Rozwiązanie ich możliwe było po uprzednim rozłożeniu funkcji trygonometrycznych w szeregi potęgowe (10) i (11).

Z uwagi na wymaganą pamięć operacyjną komputera dla algorytmu programu obliczeniowego z równaniami wektorowymi, możliwe było uzyskanie rozwiązań w postaci szeregów liczbowych, zawierających po trzy wyrazy (18). Liczba wyrazów w szeregach potęgowych, stanowiących rozwiązania równań, determinuje wielkość kroku każdego parametru wejściowego (stopnia ruchliwości).

Rozwiązaniami układu (1) są szeregi liczbowe, zawierające po 10 wyrazów.

Do obliczeń wykorzystano komputer z dwurdzeniowym procesorem AMD Phenom II X2 545 3GHz i pamięcią operacyjną 4 MB. Czasy obliczeń numerycznych przeprowadzonych za pomocą programów własnych w środowisku Matlab, zawierających 5 i 17 równań, dla takich samych zagadnień z zakresu kinematyki zawieszzenia, znacznie się różnią.

Czas obliczeń dla algorytmu z 5 równaniami jest wielokrotnie większy.

Literatura

1. Grzyb A.: *On a Perturbation Method for the Analysis of the Kinetostatics of Mechanisms*. Akademie Verlag ZAMM, 2 angew. Math. Mech. 72,6 T615-T618, 1992
2. Knapczyk J.: *Metody analizy wielowahaczowych zawieszzeń kół samochodu*. Interkonmot 98, TeKa Komisji Naukowo Problemowej Motoryzacji Krakowskiego Oddziału PAN, z.16, 19-29, Kraków 1998.
3. Kowalski M. S.: *Optymalizacja wymiarowa wybranych mechanizmów wielowahaczowych zawieszzeń samochodów*. Rozprawa doktorska, Wydział Mechaniczny Politechniki Krakowskiej, Kraków 2005.
4. Struski J., Wach W.: *Multidimensional Optimization of the Steered Wheel Multi-link Suspension System*, SAE-Paper 2007-01-0849.2007 World Congress Detroit, Michigan 2007.

Streszczenie

W badaniach właściwości kinematycznych i dynamicznych złożonych układów mechanicznych wykorzystywane są wyniki eksperymentów numerycznych. Wymagana jest minimalizacja czasu rozwiązywania różnych zagadnień z tego zakresu.

W opracowaniu wykazano, że spełnienie tego warunku jest możliwe poprzez zmianę struktury więzów geometrycznych mechanizmu wielowahaczowego zawieszzenia kół.

Influence of the Geometrical Constraints of Multi-link Wheel Suspension Equations' Structure on the Numerical Efficiency

Summary

In research of the kinematic and dynamic properties of compound mechanical set-ups, results of numerical experiments are used. It is required to minimize the calculation time of various problems in the domain.

In the current paper it is demonstrated, that fulfilling of this demand is possible by the change of the geometrical constraint's structure of the multi-link wheel suspension system.