Symulacja w Badaniach i Rozwoju
Vol. 1, No. 3/2010

Michał PRĄCIK, Tomasz SZLACHETKA
Politechnika Krakowska, Al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków
Uniwersytet Jagielloński, ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6,
30-348 Kraków,
E-mail: pracik@mech.pk.edu.pl, Tomasz.Szlachetka@im.uj.edu.pl

O pewnym sformułowaniu kryterium niezawodności przy sterowaniu układu dynamicznego

1 Wprowadzenie

Model układu dynamicznego np. maszyny roboczej, uwzględnia zazwyczaj model danej konstrukcji stowarzyszony z modelem procesu jej eksploatacji. Niezawodność konstrukcji – w sensie probabilistycznym - definiuje się [1], [3] jako prawdopodobieństwo, że dana konstrukcja przeniesie obciążenia, które na nią działają – bez zniszczenia i w określonym przedziale czasu. Tak definiowana niezawodność konstrukcji zależy od rozkładów losowych funkcji nośności i obciążenia, będących losowymi funkcjami czasu. Miarą niezawodności konstrukcji R w ustalonej chwili czasu jest prawdopodobieństwo tego, że nośność N jest większa od obciążenia Q jakiemu poddawana jest konstrukcja. Niezawodność w odniesieniu do procesu eksploatacji np. maszyny roboczej, ujmuje prawdopodobieństwo właściwej pracy urządzenia, nazywane funkcją niezawodności [3].

Określenie rozkładu losowego funkcji nośności bazuje na rozwiązaniach zadań wytrzymałości materiałów. Na przykład w zadaniach programowania badań doraźnej wytrzymałości próbek materiału, określa się warunki testu wytrzymałościowego i przy zadanej liczbie próbek poddaje się je kolejno obciążaniu. Obciążenie może narastać ciągle albo być stopniowanym - do ustalanych poziomów wartości, bądź zmiennym – o stałej amplitudzie (testy zmęczeniowe). Problem jak stopniować obciążenie (sterować doborem wartości), tzn. jaką sekwencję wartości obciążeń przyjąć, przy zadanej liczności k ”idealnie jednakowych” próbek, aby zagwarantować określenie ich wytrzymałości R_m w nie więcej niż $f(R_m ,k)$ krokach – testach, wydaje się być wyidealizowany [2]. Jeśli jednak poszerzy się powyższe zadanie o wymaganie znalezienia optymalnej liczby próbek, przy której średnia liczba niezbędnych kroków-testów będzie minimalna, to rozwiązanie takiego zadania wolno skojarzyć z zadaniem sterowania minimalnoczasowego.

2 Przedstawienie algorytmu

Działanie algorytmu możliwego do zastosowania przy sterowaniu obciążeniem w testach wytrzymałościowych przeprowadzanych w badaniach niezawodności konstrukcji, rozumianej, w sensie probabilistycznym, jako prawdopodobieństwo przeniesienia obciążeń w zadanym przedziale czasu, przedstawić można na przykładzie wyznaczania wytrzymałości kul zrzucanych z różnej wysokości [2].

Przypuśćmy, że chcemy wyznaczyć numer najwyższego piętra n-piętrowego budynku, po zrzuceniu z którego kula nie stłucze się. Załóżmy, że dysponujemy k takimi kulami i chcemy osiągnąć cel przy możliwie najmniejszej ilości prób, oznaczonej jako $p=f(n,k)$.

Wartości funkcji *f(n,k)* można wyznaczyć dzięki dalej podanym zależnościom, w których przez *floor[x]* oznaczamy najmniejszą liczbę całkowitą, nie mniejszą niż *x* .

Przy dwóch kulach *k = 2* mamy sekwencję rzutów kolejno z pięter o numerach: *p, p+(p-1), p+(p-1)+(p-2)*. Jeżeli przy którymś z tych rzutów pierwsza kula ulegnie zniszczeniu, wówczas kontynuuje się już próby drugą kulą poczynając od piętra o numerze o jeden wyższym niż numer z sekwencji poprzedzający o jedną pozycję ten, przy którym uległa zniszczeniu kula pierwsza. Łatwo zauważyć, że przy dowolnej wartości wytrzymałości (określonej najwyższym numerem piętra przy jakim kula się jeszcze nie rozbije) liczba prób gwarantujących określenie tej wytrzymałości jest nie większa niż *p*. Można zapisać zależności (1) pozwalające wyliczyć *p* jako całkowitą liczbę prób *p = f(n,2)*.

$$
\begin{aligned}
&p+(p-1)+\ldots+1=\frac{p(p+1)}{2}\\
&\Sigma 2=\frac{p(p+1)}{2}\wedge\frac{p(p+1)}{2}\geq n\Rightarrow p_{\Sigma 2}(n)=\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\\
&f(n,2)=floor[p_{\Sigma 2}(n)]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Przy trzech kulach *k = 3* można podobnie rozumując wyprowadzić zależności (2):

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{(p-1)p}{2}+1\right]+\left[\frac{(p-2)(p-1)}{2}+1\right]+\ldots+1=\frac{p(p^2+5)}{6}\\
&\Sigma 3=\frac{p(p^2+5)}{6}\wedge\frac{p(p^2+5)}{6}\geq n\Rightarrow p_{\Sigma 3}(n)\\
&p_{\Sigma 3}(n)=\frac{1}{3}\left(81n+3\sqrt{375+729n^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{5}{\left(81n+3\sqrt{375+729n^2}\right)^{\frac{1}{3}}}\\
&f(n,3)=floor[p_{\Sigma 3}(n)]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Przy czterech kulach *k = 4* można wyprowadzić zależności (3):

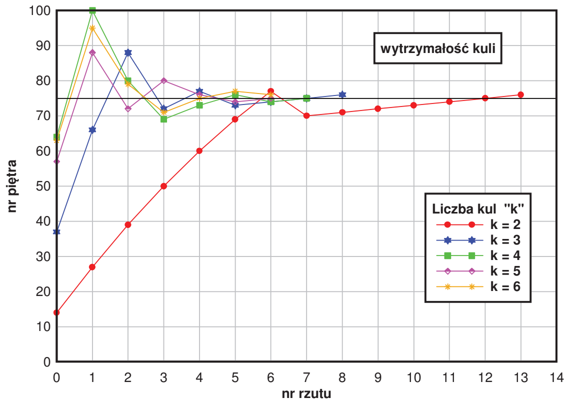
$$
\begin{aligned}
&\left\{\frac{(p-1)\left[(p-1)^2+5\right]}{6}+1\right\}+\left\{\frac{(p-2)\left[(p-2)^2+5\right]}{6}+1\right\}+\ldots+1=\Sigma 4\\
&\Sigma 4\geq n\Rightarrow f(n,4)=floor[p_{\Sigma 4}(n)]
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Zatem w ogólnym przypadku dla $k = m$ można zapisać:

$$
\Sigma m\geq n\Rightarrow f(n,m)=floor[p_{\Sigma m}(n)]
\tag{4}
$$

Przy tym, jak warto zauważyć suma Σ*m*-ta jest zależna od sumy Σ(*m*-1*)* w ten sposób, że sumowane są wyrazy ciągu utworzonego przez podstawienie za *p := (p* - 1*)* do wyrażenia na sumę Σ*(m*-1*)*. Spostrzeżenie to jest przydatne przy konstrukcji algorytmu obliczeń numerycznych, który został zrealizowany z wykorzystaniem pakietu MAPLE.

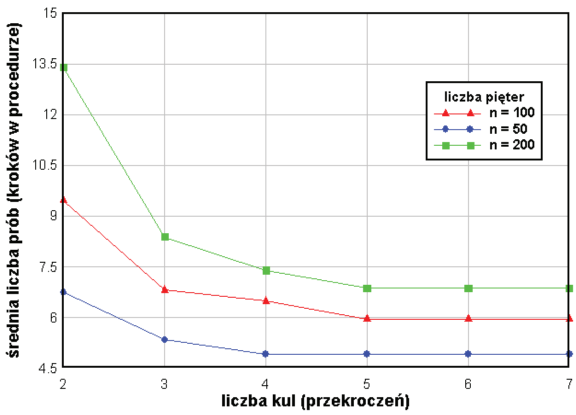
Omawiana wyżej procedura pozwala, poza wyznaczeniem wytrzymałości kul, podać optymalną sekwencję prób przy różnej ich liczbie k i znanym zakresie badań (znanej liczbie pięter *n)*. Przykładowy wykres prezentujący realizację kroków optymalnej procedury znajdowania hipotetycznie ustalonej wytrzymałości $n_R = 75$, przy $n = 100$ i przy różnej liczbie kul, przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Graficzna prezentacja kroków procedury przy zadanym parametrze "k"

Fig.1. Diagram of presentation of the procedure steps when the "k" parameter is given

Ścieżki dyskretnego zdążania do rozwiązania pokazane na rys. 1 przypominają charakterystyki czasowe układu dynamicznego z regulatorem. W celu odszukania innych analogii z dziedziną sterowania i automatyki, dalszej analizie poddano średnią liczbę kroków w procedurze znajdowania rozwiązania (nastawy), gdy zadaje się dopuszczalną liczbę przekroczeń punktu rozwiązania, przy znajomości ograniczenia obszaru poszukiwań.



Rys. 2. Średnia liczba kroków w procedurze znajdowania rozwiązania (nastawy) w funkcji liczby przekroczeń nastawy, przy założeniu znajomości obszaru poszukiwań

Fig.2. Average number of steps in finding solution procedure (tending to demand value) vs. number of exceedances of this value, under assumption of investigated field limits knowledge

3 Porównanie zadań sterowania optymalnoczasowego i sterowania z zadaną liczbą przekroczeń

W teorii układów automatycznej regulacji definiuje się różne wskaźniki jakości regulacji [4]. Zazwyczaj obliczenia tych wskaźników dokonuje się bazując na dopuszczalnym odchyleniu sygnału wyjściowego od nastawianej, żądanej wartości wartości – sygnału wejściowego. W sterowaniu minimalnoczasowym czas regulacji t_r definiowany jest dla dopuszczalnego odchylenia Δ:

$$t_r = sup_i \{t_i\} \tag{5}$$

gdzie: sup_i oznacza kres górny ciągu $\{t_i\}$ utworzonego przez rozwiązania równania:

$$|e(t_i)| = \Delta \tag{6}$$

$e(t) = x(t) - y(t)$ sygnał uchybu regulacji;

$x(t)$ - sygnał zadany; $y(t)$ - sygnał na wyjściu.

Z kolei optymalizacja t_r traktowanego jako funkcjonał J parametrów układu regulacji może być zapisana ogólnie:

$$t_r = J[x(t), z(t), C, O] \quad \rightarrow \quad J_o[C_o] = \min_{C \to C_o} J[x(t), z(t), C, O] \tag{7}$$

gdzie użyto oznaczeń:

$z(t)$ - zakłócenia;

C - parametry struktury regulatora;

O - parametry obiektu regulacji;

C_o - poszukiwany regulator optymalny.

Jeśli proces sterowania optymalnego skojarzyć z dopuszczalną liczbą przekroczeń wartości zadawanej na wejściu układu UAR, to wtedy można zapisać ogólnie:

$$t_r = J[x(t),\ u(t,k),\ C,\ O] \tag{8}$$

gdzie: *k* - dopuszczalna krotność przekroczeń;

u(t, k) – sterowanie.

W miejsce zależności (6) pojawi się następująca zależność:

$$|e(t_i\ ,\ k)| = \Delta, \tag{9}$$

która implikuje dodatkowy warunek przy poszukiwaniu minimum funkcjonału czasu.

W szczególności w układach dyskretnych wprowadzenie takiego dodatkowego warunku może wpłynąć na uzyskanie odmiennych parametrów regulatora optymalnego, odmiennych od parametrów regulatora minimalnoczasowego projektowanego przy znajomości jedynie parametrów obiektu regulacji, wpływających na niego zakłóceń i przy założonej strukturze regulatora.

Skalowana - w odniesieniu do zakładanego kresu górnego przeciwdziedziny- aproksymacja zależności przedstawionych na rys. 2, może służyć jako podstawa do formułowania wspomnianego wyżej warunku dodatkowego, przy poszukiwaniu minimum funkcjonału czasu.

Rozwiązanie praktyczne konkretnego zadania sterowania optymalnoczasowego, z wyżej podanym warunkiem dodatkowym w postaci zadanej liczby przekroczeń wartości zadanej, realizuje się wykorzystując w programie symulacji komputerowej metodę optymalizacji dynamicznej z ograniczeniami, opartą na zasadzie maksimum Pontriagina.

4 Uwagi końcowe i wnioski

Wnikliwa analiza problemów pierwotnie stawianych i postrzeganych jako mające jedynie walory dydaktyczne wykazuje często- podobnie jak na podanym przykładzie „zadania o szklanych kulach" [2], że znaczenie ich rozwiązań może wnieść do praktyki inżynierskiej nowe treści. Może stymulować nowe kierunki badań teoretycznych i doświadczalnych, bazujących na heurystycznych metodach, w których odkrycia analogii opisów zachowań układów, podobieństwa rozwiązań, mają aspekt aplikacyjny w różnych dyscyplinach nauki i praktyki.

Wymienione w tytule pracy pojęcie pewnego kryterium niezawodności odnieść należy do dedukcyjnego uogólnienia wniosków wynikających z analizy rozwiązań „zadania o szklanych kulach". Skrótowo określając, kryterium tym jest warunek nie przekraczania minimalnej wymaganej liczby kroków procedury sterowania, kroków o obliczalnej długości czasu trwania i dopuszczającej określoną ściśle liczbę przesterowań.

Jeśli dokona się normalizacji na osi rzędnej wykresu z rys.2, to przy wcześniej przyjętych założeniach okazuje się, że średnia liczba kroków w procedurze osiągania rozwiązania stabilizuje się przy liczbie przekroczeń nastawy większej od pięciu. Wolno zatem sądzić, iż nawet przy bardzo „zgrubnym" wstępnym szacowaniu zakresu zmienności „nastaw – oczekiwanej wytrzymałości" liczba pięciu próbek będzie optymalna np. do szybkiej oceny rzeczywistej ich wytrzymałości. W odniesieniu do sterowania w UAR żądanie mniejszej niż pięć, liczby przekroczeń wartości nastawy będzie się wiązało z pogorszeniem jakości regulacji, większymi kosztami konstrukcji i eksploatacji systemu, z założenia realizującego sterowanie minimalnoczasowe.

Literatura

1. Biegus A.: *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*, PWN Warszawa 1999
2. Kourliandtchik L: *Zadania o szklanych kulach*, Delta nr 7 (350) 2003, Wydawca: Uniwersytet Warszawski
3. Niziński S.: *Elementy eksploatacji obiektów technicznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko - Mazurskiego, Olsztyn 2000
4. Takahashi Y., Rabins M.J., Auslander D.M.: *Sterowanie i systemy dynamiczne*,Wyd. N-T Warszawa 1976

Streszczenie

W pracy autorzy wskazują możliwość wykorzystania zaproponowanego algorytmu do rozwiązywania zagadnień sterowania układami dynamicznymi, przy kryterium w postaci zadanej a priori liczby przekroczeń wartości poszukiwanej. Takie postawienie zadania jest istotne np. przy problemach dynamicznego pozycjonowania układów elektro-mechanicznych i hydraulicznych albo problemach namierzania i „wstrzeliwania się" w pozycję. Zaprezentowane są wyniki obliczeń analitycznych i symulacji numerycznych.

On formulation of a reliability criterion in dynamic system controlling

Summary

Authors indicate the application of the proposed algorithm for solving dynamic system controlling problem with the criterion set a priori as the number of exceedances of the investigated value. Such approach may be important for problems such as dynamic positioning of electro-mechanical and hydraulic systems or localization and "shooting up" into position. The results of analytical calculations and numerical simulations are presented.