

**Anna KUMANIECKA**

Politechnika Krakowska, Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki  
31-155 Kraków ul. Warszawska 24  
E-mail: [pukumani@cyf-kr.edu.pl](mailto:pukumani@cyf-kr.edu.pl)

## **Modelowanie struktur dyskretno-ciągłych przy wymuszeniu impulsowym**

### **1 Wstęp**

Problemami dynamiki kontaktu odbieraka prądu z przewodem jezdny zajmują się liczące się w świecie ośrodki naukowe, zarówno ze względów poznawczych jak i aplikacyjnych. Badania układów zasilania elektrycznego pojazdów szynowych są przedmiotem zainteresowania wielu ośrodków naukowych na świecie m.in. w Japonii, USA, RFN, Francji, Szwecji, Chinach [7], [11], [12]. Analiza dynamiczna współpracy sieci trakcyjnej z odbierakiem prądu jest zagadnieniem bardzo ważnym i wnosi istotny wkład w rozwój dyscypliny naukowej Mechanika, a w szczególności w teorię drgań układów dyskretno – ciągłych.

Modelowanie układu sieć trakcyjna – odbierak prądu jest problemem związanym z ruchem dwóch podukładów: ciągłego (przewód jezdny) i dyskretnego (odbierak prądu). Aktualny stan badań teoretycznych i doświadczalnych wskazuje na potrzebę prowadzenia dalszych prac w kierunku doskonalenia modelowania tego typu układu jak również weryfikacji eksperymentalnych. Rezultaty dotychczasowych badań zostały przedstawione w monografii [1]. Pozostało jednak wiele nierozwiązanych problemów, zwłaszcza dotyczących zagadnień nieliniowych i wymuszeń impulsowych. Ważne jest uwzględnienie periodycznej przestrzennej struktury sieci trakcyjnej ze zmienną sztywnością ustroju sieci.

Wybrany do analizy problem teoretyczny wywodzi się z grupy problemów technicznych, w których rozwiązuje się zagadnienie dynamiki układów okresowych poddanych działaniu obciążenia ruchomego [10].

W pracy przedstawiono modelowanie i analizę drgań układu hybrydowego na przykładzie układu sieć trakcyjna - odbierak prądu, wymuszonych impulsowo, z uwzględnieniem periodycznej przestrzennej struktury rozważanego układu. Przyjęto model sieci w postaci układu dwóch nieskończenie długich strun, a oddziaływanie odbieraka prądu na przewód jezdny modelowano ruchomą zmienną w czasie siłą.

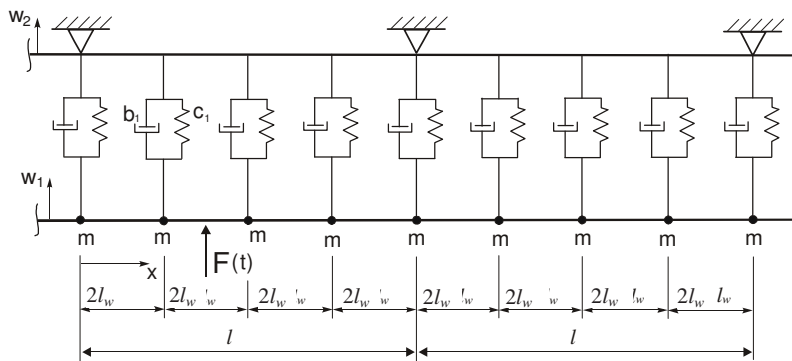
Dynamiczne zjawiska występujące w badanym układzie opisane są równaniami różniczkowymi cząstkowymi impulsowymi i zwyczajnymi. Ich rozwiązanie analityczne otrzymano wykorzystując teorię impulsowych równań różniczkowych.

### **2 Model układu**

W prezentowanej publikacji, będącej kontynuacją prac dotyczących zjawisk dynamicznych w układzie sieć trakcyjna – odbierak prądu, przyjęto do rozważań uproszczony model sieci trakcyjnej przedstawiony na rys. 1.

W pracy przedstawiono wyniki analizy dynamicznej dwuwymiarowego modelu sieci trakcyjnej z uwzględnieniem okresowego rozkładu konstrukcji ustroju wspornikowo-linowego zawieszenia przewodu jezdnego i wieszaków.

Rozważany w pracy układ składa się z dwóch nieskończenie długich strun, modelujących linię nośną i przewód jezdny, oddziałujących ze sobą poprzez sprężysto-tłumiące elementy. Górna struna (modelująca linię nośną) jest zamocowana w okresowo rozmieszczonych punktach, natomiast dolna (modelująca przewód jezdny) jest zawieszona na górnej strunie za pomocą masowych elementów sprężystych i tłumiących, rozłożonych okresowo.



Rys. 1. Model układu sieć trakcyjna – odbierak prądu  
 Fig. 1. Model of catenary - pantograph system

Analizę procesów związanych z ruchem odbieraka prądu przeprowadzono w nieruchomym układzie współrzędnych  $(x, y)$ . Górna struna jest zamocowana w punktach  $x = nl$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , dolna struna jest zawieszona na górnej za pomocą elementów sprężysto-tłumiących rozmieszczonych wzdłuż struny w punktach  $x = 2kl_w$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Przyjęto, że odległość  $l$  jest wielokrotnością odległości  $2l_w$ . Można zapisać  $l = 2rl_w$ ,  $r \in N$ . Z siecią współdziała odbierak prądu poruszający się wzdłuż dolnej struny ze stałą prędkością  $v$ . Wartość siły tarcia w punkcie oddziaływania odbieraka prądu na strunę jest pomijalnie mała. Oddziaływanie odbieraka prądu na dolną strunę jest modelowane zmienną w czasie siłą  $F(t)$ .

Równania małych drgań poprzecznych strun pod wpływem zmiennej w czasie siły poprzecznej  $F(t)$  przyjęto w postaci:

$$\rho_1 A_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - T_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = F(t) \delta(x - vt)$$

$$\rho_2 A_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} - T_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0$$
(1)

gdzie:

- $w_i(x, t)$  – przemieszczenia poprzeczne struny ( $i = 1$  dla dolnej,  $i = 2$  górnej),
- $\rho_i$  – gęstość materiału struny,
- $\rho_i A_i$  – masa struny na jednostkę długości,
- $T_i$  – siła naciągu struny,
- $F(t)$  – siła oddziaływania odbieraka prądu na dolną strunę,
- $x$  – współrzędna przestrzenna mierzona wzdłuż nieodkształconej osi struny,
- $v$  – prędkość,
- $t$  – czas,
- $\delta(\cdot)$  – delta Diraca.

W punktach zamocowania elementów lepko-sprężystych  $x = 2kl_w \neq nl$  muszą być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 w_1 \Big|_{x=2kl_w^+} - w_1 \Big|_{x=2kl_w^-} &= 0 \\
 w_2 \Big|_{x=2kl_w^+} - w_2 \Big|_{x=2kl_w^-} &= 0 \\
 T_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \Big|_{x=2kl_w^+} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \Big|_{x=2kl_w^-} \right) &= \left( c_1 (w_1 - w_2) + b_1 \frac{\partial}{\partial t} (w_1 - w_2) + m \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) \Big|_{x=2kl_w} \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$T_2 \left( \frac{\partial w_2}{\partial x} \Big|_{x=2kl_w^+} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \Big|_{x=2kl_w^-} \right) = \left( c_1 (w_2 - w_1) + b_1 \frac{\partial}{\partial t} (w_2 - w_1) \right) \Big|_{x=2kl_w}$$

gdzie:

- $x = 2kl_w^+$  – położenie dowolnie bliskie  $x = 2kl_w$  dla  $x > 2kl_w$ ,
- $x = 2kl_w^-$  – położenie dowolnie bliskie  $x = 2kl_w$  dla  $x < 2kl_w$ .

Dla współrzędnych zamocowania górnej struny  $x = nl$ , warunki brzegowe można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}
 w_2 \Big|_{x=nl} &= 0 \\
 w_1 \Big|_{x=nl^+} - w_1 \Big|_{x=nl^-} &= 0 \quad (3) \\
 T_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial x} \Big|_{x=nl^+} - \frac{\partial w_1}{\partial x} \Big|_{x=nl^-} \right) &= \left( c_1 w_1 + b_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \right) \Big|_{x=nl}
 \end{aligned}$$

dla  $k, n \in N$ .

W równaniach (2) i (3) przyjęto następujące oznaczenia:

- $c_1$  – współczynnik sprężystości elementów łączących struny,
- $b_1$  – współczynnik tłumienia elementów łączących struny,
- $m$  – masa zredukowana wieszaka sieci trakcyjnej,
- $l_w$  – połowa odległości dwóch sąsiednich wieszaków,
- $l$  – odległość podpór struny górnej.

Model przedstawiony na rys. 1 ma cechę periodyczności ze względu na współrzędną przestrzenną  $x$ .

W stanie ustalonego ruchu układu, pod działaniem wymuszenia harmonicznego z częstością  $\Omega$ :

$$F(t) = F_0 e^{i\Omega t} \quad (4)$$

przemieszczającego się wzdłuż struny dolnej ze stałą prędkością  $v$  musi być spełniony następujący warunek periodyczności:

$$w_i(x, t) = w_i\left(x + nl, t + \frac{nl}{v}\right) e^{\frac{-i\Omega nl}{v}} \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

Warunek (5) oznacza fizycznie, że przemieszczenia w wybranym miejscu  $x$  oraz chwili  $t$  są ściśle związane z odpowiednimi przemieszczeniami w miejscu określonym współrzędną  $x + nl$  oraz w chwili  $t + \frac{nl}{v}$ . Charakterystyczne zmiany czasu  $\frac{nl}{v}$  oraz współrzędnej przestrzennej  $nl$  są związane z przemieszczającą się z prędkością  $v$  siłą wymuszającą ruch układu. Czynniki  $e^{\frac{-i\Omega nl}{v}}$  wprowadza przesunięcie fazowe pomiędzy rozważanymi przemieszczeniami. Stosując transformację Fouriera, można przeprowadzić analizę częstotliwościową ruchu układu. Wykorzystując warunek periodyczności można z wiązać ze sobą odpowiednie rozwiązania w każdej parze przedziałów ograniczonych punktami zamocowania przewodu górnego. Biorąc to pod uwagę, obliczenia wystarczy wykonać w przedziale  $x \in [0, l]$ , a otrzymane transformaty Fouriera są funkcjami opisującymi widma przemieszczeń dla dowolnych punktów układu. Wykonując odwrotną transformację Fouriera, można otrzymać rozwiązanie problemu drgań układu dwóch strun modelujących sieć trakcyjną.

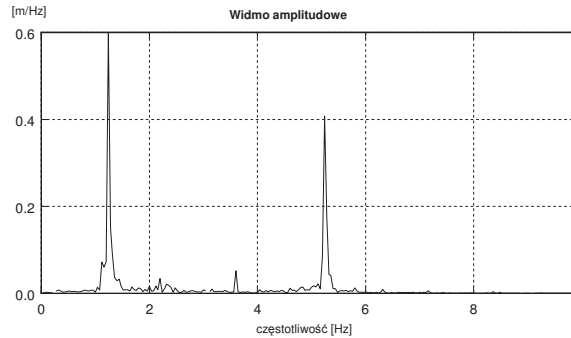
### 3 Analiza numeryczna

Do analizy numerycznej przyjęto następujące wartości parametrów :

$l = 64 \text{ m}$	$r = 4$	$l_w = 8 \text{ m}$	$v = 50 \text{ m/s}$
$T_1 = 19600 \text{ N}$	$T_2 = 9800 \text{ N}$	$c_1 = 1500 \text{ N/m}$	$\Omega = 2 \text{ Hz}$
$\rho_1 A_1 = 2,175 \text{ kg/m}$	$\rho_2 A_2 = 1,5 \text{ kg/m}$	$b_1 = 50 \text{ Ns/m}$	
$c_{1s} = 94,93 \text{ m/s}$	$c_{2s} = 80,83 \text{ m/s}$	$m = 0,4 \text{ kg}$	

gdzie  $c_{1s}$ ,  $c_{2s}$  są prędkościami fal sprężystych rozchodzących się w strunach.

Wykorzystując wyprowadzone zależności, wyznaczono widmo amplitudowe przemieszczenia dla punktu o współrzędnej  $x = 8 \text{ m}$  należącego do struny dolnej będącej modelem przewodu jezdnego. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2. Widmo amplitudowe przemieszczenia dla punktu przewodu jezdnego  $x=8\text{ m}$   
Fig. 2. Spectrum of the displacement of the contact cable at point  $x=8\text{ m}$

Widma pozostałych punktów przewodu jezdnego mają podobny kształt. Drgania przewodu są zdominowane przez dwie składowe harmoniczne o częstotliwościach około 1,2 Hz oraz 5,2 Hz. Obie te składowe są wywołane przemieszczającą się wzdłuż przewodu jezdnej siłą. Prędkość przemieszczania się tej siły wzdłuż przewodu jest jednocześnie prędkością ruchu pojazdu trakcyjnego i wynosi  $v = 50\text{ m/s}$ . Częstotliwość wymuszenia harmonicznego jest równa 2 Hz. Przemieszczająca się siła jest źródłem dwóch fal biegnących o różnych częstotliwościach. Fala poruszająca się w kierunku zgodnym z kierunkiem przemieszczania się siły ma częstotliwość większą niż 2 Hz, natomiast fala poruszająca się w kierunku przeciwnym ma częstotliwość mniejszą niż 2 Hz.

#### 4 Wnioski końcowe

W rzeczywistości zjawiska drgań sieci trakcyjnej są procesem bardziej złożonym od procesu, który można opisać prostymi zależnościami matematycznymi. Sieć trakcyjna jest nieliniowym, dynamicznym układem. Prawidłowy dobór jego własności dynamicznych gwarantuje bezawaryjną eksploatację, wyeliminowanie zjawisk łukowych oraz zbyt dużych sił oddziaływania odbieraka prądu. Sieć trakcyjna i odbierak tworzą układ dynamiczny wzajemnie sprzężony. W układzie rzeczywistym podwieszenie sieci trakcyjnej wraz z przewodem jezdny tworzą układ przestrzenny z uwagi na „wężykowanie”, zatem drgania sieci są przestrzenne a nie „płaskie”. W każdym prześle występują dwa niezależne przewody o różnej długości (lina nośna i przewód jezdny), połączone ze sobą wieszakami, mające określoną sztywność i dekrement tłumienia. Istotny wpływ mają punkty podwieszenia sieci (wieszaki, konstrukcje ustroju wspornikowo-linowego zawieszenia przewodu jezdny oraz punkty kotwienia sieci). Fale przemieszczające się wzdłuż przewodu jezdny trakcji elektrycznej są superpozycją fal wytwarzanych przez odbierak prądu oraz przez sprzężyste zamocowanie wieszaków sieci. W stanie ustalonym, który jest rozważany w obliczeniach, obie fale w wyniku odbić mają wpływ na ruch każdego punktu przewodu, niezależnie od tego, czy w danej chwili znajduje się on przed czy za poruszającą się siłą. Przedstawiona w pracy metoda analizy fal wywołanych ruchem

odbieraka prądu może być wykorzystana do optymalnego doboru parametrów sieci trakcyjnej.

#### Literatura

1. Bogacz R., Krzyżyński T., Popp K.: *On dynamic of systems modelling continuous and periodic guideways*, Archives of Mechanics, 45, (5), 1993, 575-593.
2. Kumaniecka A., Nizioł J., Prącik M.: *Współpraca dynamiczna odbieraka prądu z siecią trakcyjną*, Problemy Eksploatacji, nr 1/2002 (44), 145-154.
3. Kumaniecka A.: *Zagadnienia modelowania układu lina zasilająca-pantograf*, X Warsztaty Naukowe PTSK Symulacja w badaniach i w rozwoju, Kraków 2004, 167-174.
4. Kumaniecka A., Snamina J.: *Transient response of the pantograph – catenary system to impulsive loads*, Machine Dynamics Problems, vol. 29, No 2, 2005, 91-105
5. Kumaniecka A.: *Mechanical wave phenomena in overhead catenary – pantograph system*, Machine Dynamics Problems, Vol. 29, No. 4, 2005, 89-96
6. Kumaniecka A.: *Metody analizy drgań układów dyskretno-ciągłych ich zastosowanie do problemów transportu szynowego*, Monografia 352, Politechnika Krakowska 2007.
7. Poetsch G., Evans J., Meisinger R., Kortum W., Baldauf W., Veitl A., Wallaschek J.: *Pantograph/ Catenary Dynamics and Control*. Vehicle System Dynamic, vol. 28, 1997, 159–195.
8. Roman Z.: *Symulacja współpracy odbieraka z siecią trakcyjną*, Technika Transportu Szynowego, nr 7–8/2001.
9. Roman Z.: *Dobór parametrów sieci trakcyjnej i odbieraka prądu dla warunków dużych prędkości jazdy*, Problemy Kolejnictwa, z. 134, 2001, 19-50.
10. Szolc T.: *Analiza dynamiczna złożonych, dyskretno-ciągłych układów mechanicznych*, Prace IPPT PAN, 2/2003.
11. Zhai W.M., Cai C.B.: *Effect of locomotive vibrations on pantograph-catenary system dynamics*, Vehicle System Dynamics, Supplement 28, 1998, 47-58.
12. Zhang W., Mei G., Wu X., Shen Z.: *Hybrid simulation of dynamics for the pantograph – catenary system*, Vehicle System Dynamics, Vol. 38, No. 6, 2002, 393-414.

#### Streszczenie

Praca dotyczy analizy dynamicznej modelu układu sieć trakcyjna – odbierak prądu. W pracy przedstawiono wyniki badań symulacyjnych współdziałania odbieraka prądu z siecią. Rozważany układ składa się z dwóch strun, modelujących linę nośną i przewód jezdny, oddziaływujących ze sobą poprzez sprężysto – tłumiące elementy. Oddziaływanie pantografu na przewód jezdny sprowadzono do harmonicznie zmieniającej się siły przemieszczającej się ze stałą prędkością wzdłuż przewodu jezdnego. Układ równań stanowiący matematyczny model rozwiązano numerycznie.

## **Simulation of dynamics of the catenary – pantograph system**

### Summary

In the paper the dynamical analysis model of catenary – pantograph system is provided. The results of simulation of interaction between catenary and pantograph are presented. The model for the catenary is composed of two strings (the contact and carrying cables) connected by visco-elastic elements. It was assumed that the force exerted by the pantograph is harmonic. The force moves along the contact cable at constant velocity. The set of equations of motion were solved numerically.