Symulacja w Badaniach i Rozwoju
Vol. 1, No. 1/2010

Edward RYDYGIER
Urząd Miasta Stołecznego Warszawy, ul. Kondratowicza 20, 00-983 Warszawa
Politechnika Radomska, Wydz. Transportu i Elektrotechniki,
ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom
McLeod Institute of Simulation Sciences, Satellite Center in Radom
E-mail: rydygier@tlen.pl

Zygmunt STRZYŻAKOWSKI
Politechnika Radomska, Wydz. Transportu i Elektrotechniki,
Instytut Automatyki i Telematyki, ul. Malczewskiego 29, 26-600 Radom
McLeod Institute of Simulation Sciences, Satellite Center in Radom
E-mail: zstrz@data.pl

Efektywne metody identyfikacji w inżynierii kolejowej

1 Wstęp

Skuteczne metody identyfikacji parametrów w modelowaniu układów rozpatrywanych w inżynierii kolejowej znajdują zastosowania zarówno w eksploatacji jak i w projektowaniu pojazdów szynowych [8]. Przedstawione w tej pracy wyniki badań nad opracowaniem efektywnych metod identyfikacji dotyczą zagadnień polowych opisanych cząstkowymi równaniami różniczkowymi drugiego rzędu (układy 2-D). Szczególną uwagę poświęcono zagadnieniu identyfikacji źródeł pola. Znalezienie rozwiązań zagadnień identyfikacji źródeł ma duże znaczenie praktyczne, gdyż często z powodu braku możliwości dokładnych pomiarów albo utrudnień w dostępie do wnętrza układu, trudno jest uzyskać wystarczającą liczbę danych pomiarowych potrzebnych do bezpośredniego określenia położenia i intensywności źródeł wytwarzających dane pole. Dlatego wiedza oparta na możliwych do uzyskania danych pomiarowych musi zostać wsparta specjalnym aparatem matematycznym. Ponieważ w modelowaniu układów dynamicznych zagadnienie identyfikacji stanowi problem odwrotny, który zawiera się w klasie problemów niepoprawnie sformułowanych, uzyskane rozwiązania mogą być niestabilne [2]. Zatem metody obliczeniowe identyfikacji powinny być tak skonstruowane, aby zapewniały stabilizację wyników rozwiązania. W celu ustabilizowania wyników opracowane metody obliczeniowe rozwiązania zagadnienia identyfikacji zostały uzupełnione o odpowiednie procedury stabilizacyjne. Do najbardziej znanych metod stabilizacji wyników rozwiązań problemów odwrotnych należy metoda regularyzacji, np. metoda Tichonowa [13]. Ustabilizowanie wyników uzyskuje się także sposobem samoregularyzacji. Efektywną metodą samoregularyzacji jest procedura aproksymacyjna wykorzystująca metodę interpolacji Sheparda [1]. We wcześniejszych pracach autorów [8, 9, 10, 11, 12] przedstawiono metody numeryczne wykorzystujące w konstrukcji algorytmów narzędzia obliczeniowe zbudowane z pojęć i formuł stosowanych w analizie kombinatorycznej uzupełnione o procedurę samoregularyzacji skonstruowaną w oparciu o metodę Sheparda, która posiada własności regularyzacyjne. W niniejszej pracy zaprezentowano inny sposób identyfikacji źródeł, a mianowicie przez rozwiązanie zagadnienia optymalizacji z użyciem funkcjonału mocy. W tym przypadku podstawowym zagadnieniem obliczeniowym jest znalezienie ekstremum funkcjonału dla dyskretnych wartości funkcji źródłowej. Funkcjonał mocy wykorzystywany do rozwiązywania zagadnień obwodowych w elektrotechnice został zaadaptowany do rozwiązania zagadnienia identyfikacji źródeł w układach opisanych równaniem Poissona. Ponieważ opracowane algorytmy obliczeniowe metody identyfikacji odnoszą się do pól opisanych równaniem Poissona, to przy badaniu układów rozpatrywanych w inżynierii kolejowej opracowana metoda może znaleźć zastosowania w modelowaniu zagadnień wytrzymałościowych i cieplnych takich, jak przykładowo: identyfikacja parametrów naprężeń dla skręcania szyny kolejowej przy wymuszeniach siłowych oraz identyfikacja źródeł ciepła w szynie spowodowanych kontaktem tocznym [8, 9].

2 Metody identyfikacji źródeł

Rozpatrywany układ jest opisany równaniem Poissona [5] ze znanymi warunkami brzegowymi $u\,|_{\Gamma}$ na brzegu Γ badanego obszaru

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = f(x,y)\,, \tag{1}$$

gdzie: $x \in (0, l_x)$, $y \in (0, l_y)$, $u = u(x, y) \in R^2$ – funkcja polowa, $f = f(x, y) \in R^2$ – funkcja rozkładu źródeł (funkcja źródłowa).

Rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł pola opisanego równaniem (1) polega na wyznaczeniu funkcji rozkładu źródeł, co stanowi problem odwrotny. Aby rozwiązać ten problem numerycznie należy przybliżyć ciągły opis układu modelem dyskretnym. W tym celu należy zamienić zmienne ciągłe na dyskretne, co w przypadku prostokątnej siatki podziału badanego obszaru o wymiarach $l_x \times l_y$ zapisujemy w postaci następującej zależności $x = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, M$, $y = jh$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, $M = l_x/h$, $N = l_y/h$, h – długość kroku dyskretyzacji. W zmiennych dyskretnych przybliżenie równania różniczkowego (1) równaniem różnicowym za pomocą schematu różnic skończonych [5] sprowadza się do uzyskania układu równań algebraicznych wiążących wartości funkcji polowej u i źródłowej f w węzłach siatki w następujący sposób

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = h^2 f(i,j) = q_{i,j}\,, \tag{2}$$
$$i = 1, 2, \ldots, M,\; j = 1, \ldots, N$$

gdzie: $u_{i,j} = u(i, j)$, $q_{i,j} = q(i, j)$.

Warunki brzegowe dla równania (2) przyjmują postać

$$u(0, j) = U_0(j), \quad u(M, j) = U_M(j), \qquad j = 0, 1, \ldots, N$$
$$u(i, 0) = U_0(i), \quad u(i, N) = U_N(i), \qquad i = 0, 1, \ldots, M.$$

Dla modelu dyskretnego rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł polega na wyznaczeniu dyskretnych wartości funkcji źródłowej $q(i,j)$. Efektywną metodą obliczeniową identyfikacji źródeł w układach 2-D jest symulacyjna metoda identyfikacji [12]. Metoda ta skonstruowana została przy użyciu symulacji komputerowych w oparciu o narzędzia obliczeniowe skonstruowane z wykorzystaniem pojęć i terminów z zakresu nowoczesnej analizy kombinatorycznej, jak zmodyfikowane trójkąty obliczeniowe generujące współczynniki monicznych wielomianów potęgowych [6].

3 Optymalizacja przy pomocy funkcjonału mocy

Oryginalnym sposobem identyfikacji źródeł pola jest identyfikacja przez wyznaczenie rozwiązania zagadnienia optymalizacji jako ekstremum funkcjonału mocy. Dla układu 2-D w odniesieniu do różnicowej postaci równania Poissona (2), funkcjonał mocy można zdefiniować następująco [7]

$$F = \sum_{i,j=1} F_{i,j} = \sum_{i,j=1} \left[\frac{1}{2} [(u_{i,j} - u_{i+1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i-1,j})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j+1})^2 + (u_{i,j} - u_{i,j-1})^2] - u_{i,j} q_{i,j} \right] \tag{3}$$

Funkcjonał w postaci powyższej formuły (3) został nazwany funkcjonałem mocy przez analogię do rozwiązania zagadnienia obwodowego w elektrotechnice [4]. Jeśli zamiast siatki prostokątnej dyskretyzującej badany obszar rozpatrzona zostanie sieć rezystancyjna, to wówczas funkcjonał mocy określa moc w obwodzie. W przypadku sieci rezystancyjnej zawierającej oporniki jednakowej konduktancji $G=R^{-1}$, funkcjonał mocy dla sieci o węzłach w punktach (i-1, j), (i, j), (i, j+1), (i, j-1), (i+1, j) przybiera postać

$$F_{i,j} = \frac{1}{2} G\left[(V_{i,j} - V_{i+1,j})^2 + (V_{i,j} - V_{i-1,j})^2 + (V_{i,j} - V_{i,j+1})^2 + (V_{i,j} - V_{i,j-1})^2 \right] - V_{i,j} I_{i,j}, \tag{4}$$

gdzie $I_{i,j}$ oznacza natężenie prądu źródła prądowego dołączonego w punkcie (i, j),$V_{i,j}$ – napięcie w punkcie (i, j), $V_{i+1,j}$ – napięcie w punkcie (i+1, j), $V_{i,j+1}$ – napięcie w punkcie (i, j+1), $V_{i,j-1}$ – napięcie w punkcie (i, j-1), kwadraty różnic napięć zostały uzyskane z podstawienia w miejsce odpowiedniego prądu płynącego między sąsiednimi węzłami iloczynu konduktancji i różnicy odpowiednich napięć.

Funkcjonał mocy (4) jest skonstruowany z dwóch składowych. Pierwsza składowa jest określona jako połowa sumy mocy elementów pasywnych, a druga składowa - mocą źródła prądowego występującego w obwodzie. Przyjmując $G = 1S$, $q_{i,j} = I_{i,j}$, $u_{i,j} = V_{i,j}$ oraz sumując po indeksach i, j otrzymujemy wyrażenie (3). Po wyznaczeniu z równania (2) potencjałów „pośrednich", tzn. służących do obliczeń pośrednich przy znanych wartościach potencjałów na brzegu obszaru i przez podstawienie ich do równania (3) uzależniono funkcjonał mocy od wartości źródeł, które stanowią zmienne niezależne. Optymalizacja za pomocą funkcjonału mocy (3) polega na minimalizacji funkcjonału F dla dyskretnych wartości $q_{i,j}$. W pojęciach rzeczywistego funkcjonału kwadratowego $F = F(q_1, q_2, \ldots q_n)$, gdzie n – ilość źródeł, poszukiwany zestaw źródeł $q_1^* \ q_2^*, \ldots \ q_n^*$ wyznacza się jako punkt stacjonarny funkcjonału przez obliczenie jego gradientu i przyrównaniu go do zera

$$\nabla F = 0. \tag{5}$$

Funkcjonał kwadratowy może zostać przedstawiony w postaci macierzowej następująco

$$F = A_0 + \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{q} + \frac{1}{2}\boldsymbol{q}^t\boldsymbol{C}\boldsymbol{q}, \tag{6}$$

gdzie górny indeks t oznacza transpozycję, A_0 i składowe wektora $\boldsymbol{B}$ stanowią wyrazy skalarne, a macierz $\boldsymbol{C}$ jest macierzą kwadratową.

Stosując regułę obliczania gradientu funkcjonału kwadratowego [14], wyznaczamy gradient funkcjonału w postaci

$$\nabla F = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}. \tag{7}$$

Porównując gradient (7) do zera wyznaczamy punkt stacjonarny funkcjonału mocy F

$$\boldsymbol{q}^* = -\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}. \tag{8}$$

Znając szczegółową postać funkcjonału (6) można wyznaczyć jego punkt stacjonarny w oparciu o zależność (8), a tym samym uzyskać rozwiązanie zagadnienia identyfikacji źródeł.

W pracach z zakresu elektrotechniki [4, 14] funkcjonał mocy zastał użyty do opisu stanu sieci rozgałęzionej, a znalezienie punktu stacjonarnego funkcjonału służyło do wyznaczenia wartości potencjałów w węzłach niezależnych. W celu ustalenia szczegółowej postaci funkcjonału mocy do opisu elementów tworzących obwód elektryczny zastosowano transformatę Laplace'a oraz wykorzystano pojęcia impedancji $Z_p(s)$ i admitancji $Y_p(s) = Z_p^{-1}(s)$ operatorowej. Przedstawiają one elementy pasywne odpowiednio ze sobą połączone w poszczególnych gałęziach obwodu w uzależnieniu od uogólnionej częstotliwości zespolonej $s = \sigma + j\omega$. W przypadku ogólnym, w którym występuje l_g gałęzi oraz l_w węzłów niezależnych transformaty napięcia i prądu związane z daną impedancją są przedstawione w postaci zależności

$$U_p(s) = Z_p(s)I_p(s). \tag{9}$$

Prądy źródeł napięciowych $E_q(s)$ są oznaczone jako $I_q(s)$, $q = 1, 2, \dots, l_g$, prądy źródeł prądowych $I_h(s)$, $h = 1, 2, \dots, l_g$, a napięcia na ich zaciskach $U_h(s)$, $h = 1, 2, \dots, l_g$. W celu uwzględnienia struktury stosuje się strukturalne macierze: węzłową $\boldsymbol{W}$ i oczkową $\boldsymbol{O}$, które przemnożone odpowiednio przez wektor prądów gałęziowych $\boldsymbol{I}(s) = \left[I_p(s)\right]_1^{l_g}$ ub wektor napięć gałęziowych $\boldsymbol{U}(s) = \left[U_p(s)\right]_1^{l_g}$ dają następujące równania

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{I}(s) = \boldsymbol{0}, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{O}\boldsymbol{U}(s) = \boldsymbol{0}. \tag{11}$$

Funkcjonał mocy F tworzą dwie składowe skalarne, składowa pasywna F_P oraz składowa źródłowa $F_Ż$ związane relacją

$$F = F_P + F_Ż. \tag{12}$$

Pierwsza składowa F_P jest określona jako polowa sumy wszystkich elementów pasywnych w obwodzie

$$F_P = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{lp} U_k(s)I_k(s), \tag{13}$$

gdzie l_p oznacza liczbę elementów pasywnych w sieci reprezentowanych przez impedancję $Z_k(s) = 1, 2, \dots, l_p$.

Druga składowa $F_Ż$ jest określona mocą tylko części źródeł występujących w danym obwodzie. Zależy ona od rodzaju wyznaczanych sygnałów w sieci, tzn. zależy od tego, czy wyznaczane są potencjały węzłów niezależnych, czy też tylko prądy w cieciwach. W przypadku wyznaczania potencjałów węzłów niezależnych otrzymujemy

$$F_Ż = -\sum_{l=1}^{l_m} U_{Żl}(s) I_Ż(s), \tag{14}$$

gdzie l_m oznacza ilość źródeł prądowych, $U_{Żl}(s)$, $I_{Żl}(s)$, l= 1, 2, ... , l_m są związane tylko ze źródłami prądowymi w obwodzie.

W przypadku wyznaczania prądów cięciwowych składową źródłową funkcjonału mocy określamy następująco

$$F_Ż = -\sum_{l=1}^{l_h} E_q(s) I_q(s), \tag{15}$$

gdzie l_h oznacza ilość źródeł napięciowych, a $E_q(s)$ oraz $I_q(s)$, q = 1, 2, ... , l_h są sygnałami związanymi tylko ze źródłami napięciowymi w obwodzie.

Pamiętając o tym, że w stanie nieustalonym wszystkie sygnały są transformatami laplasowskimi odpowiednich sygnałów rzeczywistych, argument s pominięto w dalszych zapisach. Przykładem zastosowania funkcjonału mocy do wyznaczenia stanu sieci jest obliczenie sieci rezystancyjnej w stanie stałym w czasie utworzonej z l_g = 4 gałęzi posiadającej l_w = 2 węzłów niezależnych, w pierwszej gałęzi jest włączone źródło o stałym napięciu E_1, a do gałęzi zawierającej opór R_4 jest włączone źródło prądowe o natężeniu I_5 [4]. Dla takiej sieci wyznaczamy stałe w czasie potencjały węzłowe V_1, V_2. Stosując wzory (12), (13), (14) otrzymujemy

$$F = \frac{1}{2}\,[G_1(E_1 - V_1)^2 + G_2V_1^2 + G_3(V_1 - V_2)^2 + G_4V_2^2] - V_2I_5\,, \tag{16}$$

gdzie $G_k = R_k^{-1}$, k = 1, 2, 3, 4.

Dla danych wartości $G_1 = G_2 = G_3 = G_4$ = 1S, E_1 = 10V oraz I_5 = 5A funkcjonał (16) zapisujemy w postaci macierzowej jako formę kwadratową

$$F = 50 + [-10, -5]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\,[V_1, V_2]\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Punkt stacjonarny funkcjonału (17) można wyznaczyć korzystając ze wzoru (8) jako

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}^* = -\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

W punkcie swego minimum (V_1= 5V, V_2 = 5V) funkcjonał mocy osiąga wartość *min* F = 12,5 W, co jest równe różnicy polowy mocy kompletnych gałęzi z elementami pasywnymi i mocy idealnego źródła prądowego w stanie równowagi analizowanej sieci.

Adaptując koncepcję funkcjonału mocy z zagadnienia obwodowego do modelu dyskretnego układu 2-D opisanego równaniem Poissona (2), identyfikacja źródeł przez wyznaczanie punktu stacjonarnego funkcjonału mocy (3) zostanie zilustrowana na przykładach.

Przykład 1

Dla układu 2-D przyjmujemy dyskretyzację badanego obszaru siatką kwadratową dla $N = M = 2$. Potencjał pośredni $u(1, 1) = V_1$, a potencjały graniczne oznaczymy jako V_2, V_3, V_4, V_5.

Wówczas funkcjonał mocy zgodnie ze wzorem (3) możemy zapisać w postaci

$$F = \frac{1}{2}\left[(V_1 - V_2)^2 + (V_1 - V_3)^2 + (V_1 - V_4)^2 + (V_1 - V_5)^2\right] V_1 q_1.$$

Po przybliżeniu równania Poissona schematem różnic skończonych, otrzymane równanie różnicowe przyjmuje następującą postać

$V_5 - 2V_1 + V_3 + V_4 - 2V_1 + V_2 = q_1$, skąd wyznaczamy potencjał pośredni $V_1 = \frac{1}{4}(V_2 + V_3 + V_4 + V_5 - q_1)$.

Po podstawieniu $V_1(q_1)$ do wzoru na F i pogrupowaniu wyrazów z odpowiednimi potęgami q_1 otrzymujemy

$F = \mathrm{A} - \frac{1}{4}(V_2 + V_3 + V_4 + V_5)q_1 + \frac{3}{8}q_1^2$, gdzie A – wyraz wolny.

$$\frac{dF}{dq_1} = -\frac{1}{4}(V_2 + V_3 + V_4 + V_5) + \frac{3}{4}q_1 = 0$$

$$q_1^* = \frac{1}{3}(V_2 + V_3 + V_4 + V_5).$$

Przykład 2

Dla układu 2-D i przyjmujemy dyskretyzację badanego obszaru siatką kwadratową dla $N = M = 3$. Potencjały pośrednie położone w węzłach wewnętrznych oznaczymy przez V_1, V_2, V_3, V_4, wartości znanych potencjałów brzegowych przez V_5, V_6, V_7, V_8, V_9, V_{10}, V_{11}, V_{12}, natomiast nieznane wartości funkcji źródłowej przez q_1, q_2, q_3, q_4. Dla powyższych oznaczeń różnicowe równanie przybliżające równanie różniczkowe Poissona przyjmuje w zapisie macierzowym następującą postać

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix}$$

skąd

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix}.$$

Funkcjonał mocy zgodnie ze wzorem (3) przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{2}[(V_1-V_5)^2 + (V_1-V_{12})^2 + (V_1-V_2)^2 + (V_1-V_3)^2 + (V_3-V_6)^2 + (V_3-V_7)^2 + (V_3-V_4)^2 + (V_4-V_8)^2 + (V_4-V_2)^2 + (V_4-V_9)^2 + (V_2-V_{10})^2 + (V_2-V_{11})^2] - V_1q_1 - V_2q_2 - V_3q_3 - V_4q_4.$$

Funkcjonał mocy przedstawiony przez powyższe wyrażenie odznacza się specyficznymi cechami: w nawiasach kwadratowych znajduje się 12 członów, które odpowiadają dwunastu odcinkom łączącym 12 węzły siatki, natomiast poza nawiasami znajdują się cztery składniki odpowiadające 4 węzłom, w których znajdują się poszukiwane źródła.

Gdy wprowadzimy oznaczenia

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \boldsymbol{R}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_5 + V_{12} \\ V_{10} + V_{11} \\ V_6 + V_7 \\ V_8 + V_9 \end{bmatrix},$$

to $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}.$

Po podstawieniu wartości potencjałów pośrednich do wzoru na funkcjonał mocy otrzymamy funkcjonał w postaci formy kwadratowej

$$F = A_0 + [B_1, B_2, B_3, B_4] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[q_1, q_2, q_3, q_4]\,\boldsymbol{C} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix},$$

skąd $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = -\boldsymbol{C}^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}.$

4 Metoda identyfikacji za pomocą funkcjonału mocy w układach 1-D

Sposób identyfikacji źródeł w układach 1-D za pomocą funkcjonału mocy zostanie zaprezentowany w odniesieniu do zagadnień cieplnych. Jako układ badawczy przyjęto pręt oddający ciepło do otoczenia z uwzględnieniem konwekcji. Tego typu układ w praktyce może stanowić np. kabel żyłowy. Przy założeniu, że długość l badanego pręta jest znacznie dłuższa od jego średnicy $2r << l$ możemy badany układ przybliżyć modelem 1-D. Ciepło w pręcie jest generowane przez prąd stały o natężeniu I, rezystancja liniowa, tzn. na jednostkę długości pręta wynosi $R_0 = R_c/l$ [Ω/m], gdzie $R_c=\rho l/S$ oznacza rezystancję całkowitą, ρ - rezystywność materiału, a S - pole przekroju poprzecznego. Przyjęto, że dla badanego układu dominuje przewodzenie wzdłuż pręta, tzn. $\frac{\partial T}{\partial r}$ = 0. Zagadnienie przewodzenia cieplna w badanym układzie jest opisane równaniem przewodnictwa cieplnego w stanie ustalonym

$$S\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + R_0 I^2 = \alpha(T - T_p) \ , \tag{19}$$

gdzie $T = T(x)$ to temperatura w funkcji odległości od krańca pręta o temperaturze T_0 wzdłuż jego długości, T_p oznacza temperaturę powietrza, α = *const* $\left[\frac{W}{m\ {}^oC}\right]$ - współczynnik konwekcji, a $\lambda \left[\frac{W}{m\ {}^oC}\right]$ - przewodność cieplną na jednostkę długości.

Podstawiając $\lambda_0 = S\lambda$ oraz wprowadzając nową zmienną $T_a = T - T_p$ oznaczającą różnicę między temperaturą w pręcie i powietrzu, równanie przewodnictwa (19) można zapisać w postaci

$$\frac{d^2T_a}{dx^2} + \frac{R_0}{\lambda_0} I^2 = \frac{\alpha}{\lambda_0} T_a \tag{20}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń $\frac{R_0}{\lambda_0} = q(x)I^2$, $\frac{\alpha}{\lambda_0} = g$ oraz zaniedbując indeks a równanie (20) zapisujemy w postaci

$$\frac{d^2T}{dx^2} + q(x) I^2 = gT \ . \tag{21}$$

Przybliżenie różnicowe powyższego równania różniczkowego (11) przy kroku dyskretyzacji o długości $h = \Delta x = \frac{l}{N}$ i po zamianie zmiennych ciągłych na dyskretne $x_k = kh$, $k = 1, \ldots, N$ daje równanie różnicowe w postaci

$$T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1} + h^2 q_k = h^2\, gT_k \ , \tag{22}$$

które po wprowadzeniu oznaczeń dla źródeł ciepła $q_k = h^2 q_k$ oraz $p = h^2 g$ można zapisać w postaci

$$T_{k+1} - 2(p + 1)T_k + T_{k-1} + q_k = 0 \ . \tag{23}$$

Jako warunki brzegowe przyjmujemy znane temperatury na końcach pręta, czyli w punktach granicznych, które dla kroku $h = l/10$ oznaczamy $T_0 = A$, $T_{10} = B$. Temperatury w węzłach wewnętrznych $T_1, T_2, \ldots, T_9$ nie są znane. Funkcjonał mocy dla badanego układu skonstruowany w oparciu o wzór (3) ma postać

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k=l+1, l=0}^{9} \left(T_k - T_l\right)^2 - \sum_{k=1}^{9} q_k T_k \ . \tag{24}$$

Poszukiwane źródła $q_1, q_2, \ldots, q_9$ jako punkt stacjonarny funkcjonału (14) można wyznaczyć przez przyrównanie gradientu funkcjonału do zera

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} = 0 \;\;, k = 1, 2, \dots, 9. \tag{25}$$

Aby dokonać różniczkowania (25) należy uzależnić temperatury pośrednie T_1, T_2, …, T_9 od źródeł q_1, q_2, … , q_9, według (23), co można zapisać w sposób macierzowy

$$\begin{bmatrix} 2+p & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2+p & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2+p & -1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \dots \\ T_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \dots \\ q_9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ T_{10} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

W sposób rekurencyjny zależność $T_k(q_1, q_2, \dots, q_k)$ może zostać wyznaczona przy użyciu wielomianów monicznych $P_k(p)$ o współczynnikach określonych przez zmodyfikowany trójkąt liczbowy *MTL* [10]. Moniczny wielomian określony względem $x \in R$ generujący zmodyfikowany trójkąt liczbowy *MTL* jest zdefiniowany za pomocą wyrażenia rekurencyjnego w następującej postaci

$$P_{n+2}(x) = (2 + x)P_{n+1}(x) - P_n(x) \;,\; n = 0, 1, 2, \dots ,\; P_0(x) = 0 \text{ oraz } P(x) = 1 \tag{27}$$

skąd

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{n} b_{n,r}\, x^r \;\;,\;\; n = 0, 1, 2, \dots \;, \tag{28}$$

$$b_{n,\,r} = 2b_{n\text{-}1,\,r} + b_{n\text{-}1,\,r\text{-}1} - b_{n\text{-}2,\,r}\,, \quad b_{0,\,0} = 0 \text{ oraz } b_{1,\,0} = 1,\; n = 0, 1, 2, \dots ,\; 0 \le r \le n\,. \tag{29}$$

Zmodyfikowany trójkąt liczbowy *MTL* przyjmuje postać podaną w tab. 1.

Tab. 1. Zmodyfikowany trójkąt liczbowy MTL

Tab. 1. Modified numerical triangle

n \ r	0	1	2	3	4	5	6 …	Suma liczb w wierszu
0	0							0
1	1							1
2	2	1						3
3	3	4	1					8
4	4	10	6	1				21
5	5	20	21	8	1			55
6	6	35	56	36	10	1		144
...	...	...	...	...	...	...	... ...	...

Sumy liczb w poszczególnych wierszach trójkąta *MTL* są wyrazami ciągu Fibonacci'ego z nieparzystymi indeksami.

Wprowadzając wielomiany moniczne $P_k(p)$ do równania (23) można otrzymać formułę służącą do wyznaczenia temperatury w k-tym węźle:

$$T_k = P_k(p)T_1 - P_{k\text{-}1}(p)T_0 + P_{k\text{-}2}\, q_1 + P_{k\text{-}3}\, q_2 + \dots + P_1 q_{k\text{-}1} \tag{30}$$

Podstawiając $k = 10$ do wzoru (17) można wyznaczyć temperaturę w węźle 1

$$T_1 = \frac{B + P_9(p)A - P_8(p)q_1 - ... - P_1 q_9}{P_{10}(p)}, \tag{31}$$

natomiast wartość temperatury w węźle wewnętrznym k można przedstawić w postaci następującej formuły

$$T_k = P_k T_1 - P_{k\text{-}1} A + \sum_{l=1}^{k-1} P_{k-l+1} q_l \ . \tag{32}$$

5 Wnioski

Przedstawiony w pracy oryginalny sposób identyfikacji źródeł pól za pomocą skalarnej funkcji zwanej funkcjonałem mocy jest przykładem wykorzystania analogii zagadnień występujących w elektrotechnice i inżynierii kolejowej. Opracowana metoda identyfikacji źródeł zalicza się do metod intuicyjnych, które opierają się na pewnych strukturach ekwiwalentnych wyznaczanych na podstawie doświadczenia danego specjalisty. Podejście to jest przykładem wykorzystania w praktyce bardziej ogólnych metod odwołujących się do podstawowych zasad obowiązujących w fizyce, jakimi są zasada zachowania energii czy zasady termodynamiki. Opracowana metoda identyfikacji źródeł może znaleźć zastosowania w rozwiązywaniu praktycznych zagadnień inżynierii kolejowej takich, jak np. identyfikacja parametrów naprężeń dla skręcania szyny kolejowej przy wymuszeniach siłowych oraz identyfikacja źródeł w śladzie cieplnym w szynie spowodowanych kontaktem tocznym [8, 9, 10].

Literatura

1. Allasia G.: Some physical and mathematical properties of inverse distance weighted methods for scattered data interpolation. *Calcolo* 29 (1992) 97-109.
2. Groetsch Ch. W.: *Inverse Problems in Mathematical Sciences.* Vieweg, Braunschweig/Wiebaden 1992.
3. Kącki E.: *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*. WNT, Warszawa 1995.
4. Kłos. A., Trzaska Z.: *Modelowanie sieci elektrycznych*. Wyd. Inst. Technologii Eksploatacji,Warszawa 2007
5. Potter D.: *Metody obliczeniowe fizyki*. PWN, Warszawa 1977.
6. Ross K.A.Ch., Wright R.B.: *Matematyka dyskretna*. PWN, Warszawa 1996.
7. Rydygier E.: New approaches of modeling 2-D systems in physics and engineering. *Proc. 10th International Conference on System Modelling Control*, Kościelisko, May 2001, pp. 195-200.
8. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Application of inverse problems modelling to design and utilize rail vehicles. *Proc. International Conference on Transport of the 21st Century*, Stare Jabłonki, September 2007, Vol. 2, pp. 169-174.
9. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Effective computational tools used to solve railway inverse problems. *Proc. 11th International Conference 'Computer Systems Aided Science, Industry and Transport–TRANSCOMP – 2007'*, Zakopane, grudzień 2007, Vol. 2, str. 217-222.
10. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Effective computer methods used to solve engineering inverse problems. *Computer Systems Aided Science and Engineering Work in Transport, Mechanics and Electrical Engineering*, Monograph No. 122, Faculty of Transport, Technical University of Radom,2008, pp. 493-499.

11. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: Efektywne metody identyfikacji źródeł pola w zastosowaniach inżynierskich. *Materiały XV Warsztatów Naukowych PTSK „Symulacja w badaniach i rozwoju"*, Zakopane, wrzesień 2008, Wyd. Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa 2009, str. 342-349.
12. Rydygier E., Strzyżakowski Z.: The Simulation Method used to solve engineering inverse problems. *Proc. 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling MATHMOD9*, Vienna, February 2009, Volume of Abstracts, Vienna University of Technology, Argesim Report No. 34, p. 451, Full Papers CD Volume (I. Troch, F. Breitenecker, eds), Argesim Report No. 35.
13. Tikhonov A. N.: Goncharsky A. V., Stepanov V. V., Yagola A. G.: *Numerical Methods for the Solution of Ill-posed Problem*. Kluwer, Dordrecht 1995.
14. Trzaska Z.: *Analiza i projektowanie obwodów elektrycznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008.

Streszczenie

Przedstawione w pracy wyniki dotyczą opracowania efektywnych metod identyfikacji źródeł pól w układach będących przedmiotem badań w inżynierii kolejowej. Zaprezentowano oryginalną metodę identyfikacji źródeł polegającą na wyznaczeniu punktu stacjonarnego funkcjonału mocy. Wykazano korzyści tej metody, m.in. jej użyteczność w przypadku zredukowanej ilości danych pomiarowych ograniczonych tylko do pomiarów na brzegu badanego obszaru. Zastosowania metody przedstawiono na przykładach układów 1-D i 2-D.

Effective methods for identification in railway engineering

Summary

In this paper there are presented results of investigations regarding mathematical constructions of effective methods for identification of field sources in systems studied in railway engineering. Especially the original sources identification method with the use of a power functional was established. In this case a solution can be obtained as a stationary point of the power functional presented in a such form which depends only on sources localizations as independent variables. The profits of application of this method are indicated. One of these profits is a obtaining the correct solution in the case of reduced measurement data i.e. when only values of potential function on the border of an investigated area are known. Some examples of applications are shown for 1-D and 2-D systems.