

Wiktor JAKOWLUK

Państwowa Wyższa Szkoła Informatyki i Przedsiębiorczości,
ul. Akademicka 14, 18-400 Łomża,
E-mail: wjakowluk@pwsip.edu.pl

Dobór optymalnego sygnału wejściowego w zadaniu identyfikacji parametrów układu inercyjnego

Wprowadzenie

Identyfikacja parametrów obiektu regulacji jest ważnym etapem budowy dokładnego modelu matematycznego na podstawie przeprowadzonego eksperymentu identyfikacyjnego oraz dostępnej wiedzy [1, 2]. Dokładność uzyskiwanych estymat parametrów modelu matematycznego zależy przede wszystkim od doboru odpowiedniego sygnału, który wzbudza starannie wybrane wejście obiektu regulacji [3, 4]. Stwierdzono, iż opracowanie dokładnego modelu matematycznego rozpatrywanego procesu pochłania 75% kosztów związanych z zaawansowanymi projektami automatyki [5].

W wielu praktycznych zastosowaniach identyfikacja przeprowadzana jest w czasie rzeczywistym, podczas normalnej pracy obiektu (procesu technologicznego). Z tego względu preferowane są metody doboru optymalnego sygnału wejściowego przyjaznego dla obiektu [6, 7]. Dobór optymalnego sygnału przyjaznego dla obiektu wiąże się z uwzględnieniem ograniczeń procesu technologicznego (tj. czasu trwania eksperymentu, amplitudy sygnału wejściowego i wyjściowego oraz szybkości zmian pobudzenia) [8]. Pobudzanie wejścia identyfikowanego modelu sygnałem przyjaznym zabezpiecza obiekt przed gwałtownymi zmianami sygnału sterującego, które mogą mieć wpływ nie tylko na wskaźniki ekonomiczne procesu, ale również na stabilność obiektu. Identyfikacja przyjazna dla obiektu powinna zapewniać akceptowalne wartości estymat jego parametrów [9].

Optymalizacja eksperymentu polega na wyborze kryterium optymalności i wyznaczeniu takich zmiennych eksperymentu (np. postaci sygnału pobudzającego, czasu trwania eksperymentu, schematu próbkowania, wariacji dokładności pomiarów), dla których to kryterium jest spełnione. Po sprecyzowaniu kryterium optymalności planowanie eksperymentu sprowadza się do zadania optymalizacji z ograniczeniami. Wektor dopuszczalnych eksperymentów może podlegać ograniczeniom jakościowym ze względu na liczbę i rodzaj wielkości wejściowych i wyjściowych oraz ograniczeniom ilościowym dotyczącym energii pobudzenia dopuszczalnych wejść, czasu trwania eksperymentu, fizycznych ograniczeń zmiennych eksperymentu, minimalnego odstępów czasu pomiędzy kolejnymi pomiarami, itp. Dobór optymalnego sygnału wejściowego w zadaniu estymacji wektora parametrów badanego systemu polega na optymalizacji funkcji celu zdefiniowanej na macierzy informacyjnej Fishera \mathbf{M} [10]. Często wykorzystywanym kryterium, w zadaniu doboru optymalnego sterowania, jest

maksymalizacja sumy elementów diagonalnych macierzy informacyjnej \mathbf{M} . Inne wskaźniki optymalnego rozwiązania przedstawiono poniżej:

- *A*-optymalność: $tr(\mathbf{M}^{-1})$, minimalizuje średnią wariancję estymowanych parametrów,
- *E*-optymalność: $\lambda_{\max}(\mathbf{M}^{-1})$, minimalizuje maksymalną wartość własną macierzy \mathbf{M}^{-1} ,
- *D*-optymalność: minimalizuje objętość elipsoidalnych obszarów ufności estymowanych parametrów.

Wybór kryterium optymalności jest istotny ze względu na cel przeprowadzanego eksperymentu identyfikacyjnego. Weryfikację wybranego kryterium można przeprowadzić na podstawie odpowiednio zdefiniowanego wskaźnika efektywności. Wskaźnik ten umożliwia stwierdzenie, o ile optymalny wektor eksperymentu jest „lepszy” od wektora początkowego [11].

Celem niniejszej pracy jest dobór optymalnego sygnału pobudzającego w zadaniu identyfikacji parametrów układu jednoinercyjnego. Optymalizowany funkcjonal celu zdefiniowano w postaci kanonicznej Mayera.

Dobór optymalnego sygnału sterującego układem inercyjnym

W niniejszym rozdziale rozważano liniowy obiekt dynamiczny pierwszego rzędu o następującej transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{k_p}{Ts + 1} \quad (1)$$

W przypadku układu liniowego pierwszego rzędu, o jednej zmiennej wejściowej u i jednej zmiennej stanu x , działanie układu można przedstawić w postaci opisu w przestrzeni stanu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $x = x(t; a, b)$, przy czym parametry modelu a i b są stałe. Esencją planowania eksperymentów optymalnych jest spełnienie warunków wynikających z twierdzenia Cramera-Rao, tj. macierz kowariancji estymat parametrów jest ograniczona od dołu przez odwrotność macierzy informacyjnej Fishera (FIM)

$$\text{cov}([a, b]) \geq \mathbf{M}^{-1} \quad (3)$$

Macierz informacyjną FIM modelu układu jednoinercyjnego (2) można przedstawić w postaci

$$\mathbf{M}(T) = \int_0^T \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a & x_b \end{bmatrix} dt = \int_0^T \begin{bmatrix} x_a^2 & x_a x_b \\ x_a x_b & x_b^2 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int_0^T x_a^2 dt & \int_0^T x_a x_b dt \\ \int_0^T x_a x_b dt & \int_0^T x_b^2 dt \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dobór optymalnego sygnału wejściowego w zadaniu identyfikacji parametrów układu inercyjnego

gdzie $x_a = \partial x / \partial a$ oraz $x_b = \partial x / \partial b$. Różniczkując obie strony równania (2) względem jego parametrów a i b można dokonać konwersji równania stanu na równania wrażliwościowe systemu w następującej postaci

$$\dot{x}_a = x + ax_a, \quad x_a(0) = 0 \quad (5)$$

$$\dot{x}_b = ax_b + u, \quad x_b(0) = 0 \quad (6)$$

W celu doboru optymalnego sygnału sterującego układem inercyjnym, maksymalizacji poddano wskaźnik jakości w postaci wyznacznika macierzy informacyjnej FIM (kryterium D -optymalności).

$$\mathbf{M}(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a & x_b \end{bmatrix} d\tau \quad // \quad \frac{d}{dt} \quad (7)$$

Po sprowadzeniu równania (7) do postaci kanonicznej otrzymujemy

$$\dot{\mathbf{M}}(t) = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a & x_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}(0) = 0 \quad (8)$$

Przyjmując, że

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} m_{11}(t) & m_{12}(t) \\ m_{21}(t) & m_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

otrzymujemy

$$\dot{m}_{11}(t) = x_a^2(t), \quad m_{11}(0) = 0 \quad (10)$$

$$\dot{m}_{12}(t) = \dot{m}_{21}(t) = x_a(t)x_b(t), \quad m_{12}(0) = 0 \quad (11)$$

$$\dot{m}_{22}(t) = x_b^2(t), \quad m_{22}(0) = 0 \quad (12)$$

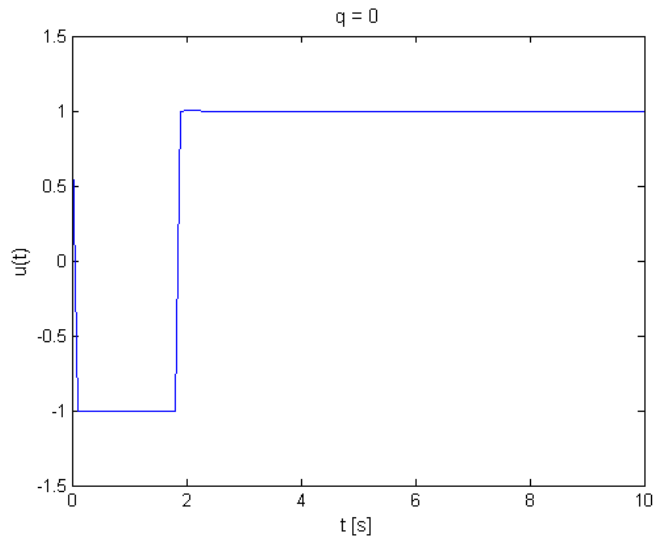
Układ równań stanu poszerzony o równania wrażliwościowe przyjmuje postać

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & \dot{x}_1 &= ax_1 + bu, & x_1(0) &= x_{10} \\ x_2 &= x_a, & \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, & x_2(0) &= 0 \\ x_3 &= x_b, & \dot{x}_3 &= ax_3 + u, & x_3(0) &= 0 \\ x_4 &= m_{11}, & \dot{x}_4 &= x_2^2, & x_4(0) &= 0 \\ x_5 &= m_{12} = m_{21}, & \dot{x}_5 &= x_2 x_3, & x_5(0) &= 0 \\ x_6 &= m_{22}, & \dot{x}_6 &= x_3^2, & x_6(0) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Maksymalizacji poddano funkcjonal celu w formie kanonicznej Mayera. W celu „wygładzenia” charakteru przebiegu sygnału sterującego (rys. 1), do kryterium dodano człon odpowiadający całce z kwadratu sterowania, przemnożonej przez założoną stałą q (tj. koszt energetyczny), która powinna być tak dobrana aby nie zdominować członu z wyznacznikiem macierzy informacyjnej Fishera [12]. Maksymalizowany wskaźnik jakości przyjmuje postać

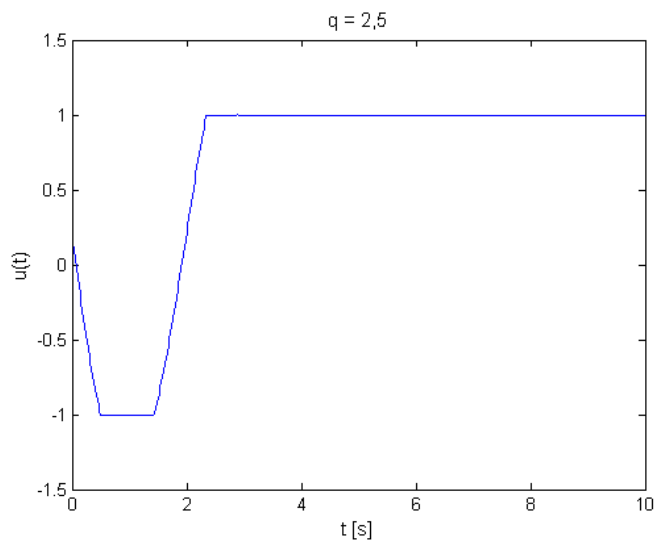
$$J = (x_4(T_f)x_6(T_f) - x_5^2(T_f)) - q \int_0^{T_f} u^T(t)u(t)dt \quad (14)$$

Powyższy problem może zostać rozwiązany z wykorzystaniem istniejących bibliotek narzędziowych przeznaczonych do rozwiązywania problemów optymalnego sterowania, takich jak: RIOTS_95 [13], DIRCOL [14] oraz MISER[15]. Obliczenia i symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem komputera osobistego (Pentium 4, 3,00 GHz, 512 MB RAM), systemu operacyjnego Windows XP oraz programu Matlab 7 (R14). Optymalne i suboptymalne sygnały wejściowe zostały wyznaczone przyjmując nominalne wartości parametrów modelu układu inercyjnego $a = -1$, $b = 1$, funkcję kryterialną określono na stanie końcowym $T_f = 10$ [s], wykorzystano algorytm SQP. Przedział wartości sterowań dobrano arbitralnie $-1 \leq u(t) \leq 1$, założono warunek początkowy systemu $x_0(0) = 5$ oraz wartość początkową sygnału sterującego $u(0) = 1$. Optymalny sygnał sterujący wyznaczono na podstawie gradientu wskaźnika jakości uzyskanego w wyniku całkowania równań różniczkowych krokową metodą Runge-Kutty z siatką całkowania 0,2 [s]. Wyniki doboru D -optymalnych sygnałów wejściowych dla różnych wartości współczynnika kosztu energetycznego q przedstawiono na poniższych rysunkach.

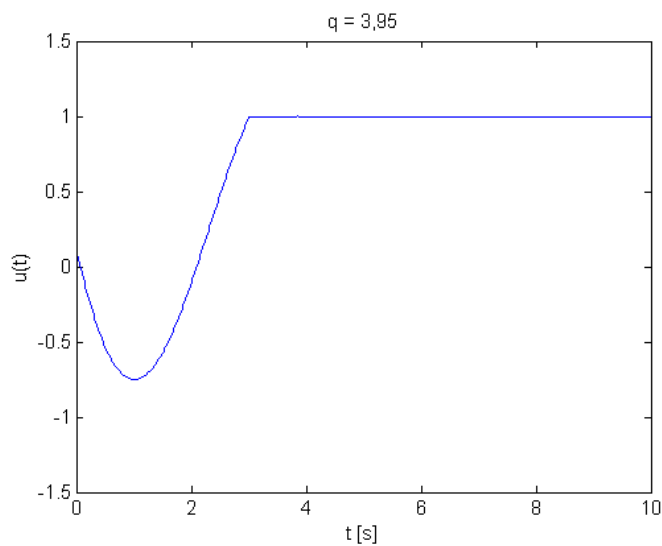


Rys. 1. Optymalny sygnał wejściowy dla współczynnika $q = 0$

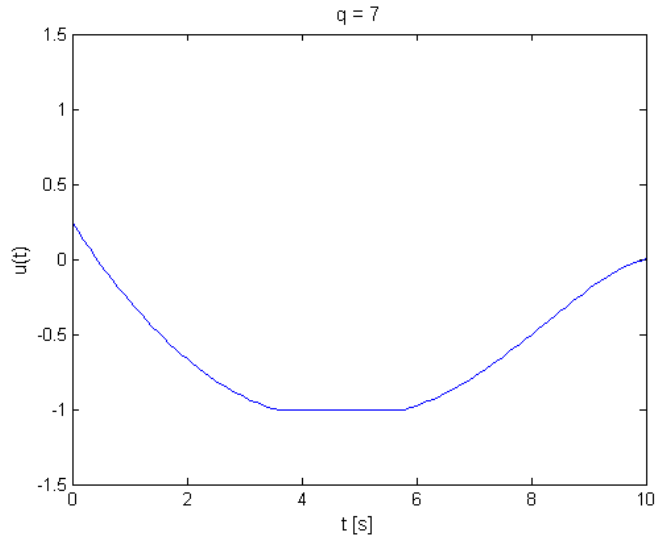
Fig. 1. Optimal input signal for coefficient $q = 0$



Rys. 1. Optymalny sygnał wejściowy dla współczynnika $q = 2,5$
Fig. 1. Optimal input signal for coefficient $q = 2,5$



Rys. 3. Optymalny sygnał wejściowy dla współczynnika $q = 3,95$ (wartość krytyczna)
Fig. 3. Optimal input signal for coefficient $q = 3,95$ (critical value)



Rys. 4. Optymalny sygnał wejściowy dla współczynnika $q = 7$

Fig. 4. Optimal input signal for coefficient $q = 7$

W celu uniknięcia lokalnych maksimów wszystkie obliczenia powtórzono kilkakrotnie przyjmując różne warunki początkowe. Wyznaczanie optymalnego sygnału sterującego zajmowało około sześćdziesięciu sekund. Optymalny sygnał pobudzający wyznaczony na podstawie maksymalizacji wskaźnika jakości (14) bez ograniczenia na energię sygnału wejściowego (tj. $q = 0$) przedstawiono na rysunku 1. Następnie zwiększano współczynnik opłaty za energię sterowania (rys. 2) aż do uzyskania wartości krytycznej $q = 3,95$ przekroczenie, której powoduje dominację funkcjonału odpowiadającego za koszt energetyczny nad maksymalizowanym wyznacznikiem FIM. W celu porównania na rysunku 3 przedstawiono D -optymalny sygnał wejściowy wyznaczony dla wartości krytycznej współczynnika energetycznego oraz zamieszczono wizualizację sygnału nieoptymalnego (rys. 4) uzyskanego dla $q = 7$. Opłata za energię sterowania jest w tym przypadku tak duża, że obiektem „nie opłaca” się sterować.

Funkcjonał celu przedstawiony równaniem (14) może zostać zapisany w następującej postaci

$$J = J_1 - qJ_2 \quad (15)$$

gdzie: J_1 oznacza wyznacznik FIM, J_2 jest całką z kwadratu sygnału wejściowego.

Eksperyment D -optymalny \mathbf{e}^* maksymalizuje wyznacznik macierzy informacyjnej Fishera $|\mathbf{M}(\mathbf{e})|$ lub minimalizuje wyznacznik macierzy odwrotnej $|\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{e})|$. Każde kryterium optymalności $J(\cdot)$ może być weryfikowane na podstawie odpowiednio zdefiniowanego wskaźnika efektywności. Wskaźnik ten umożliwia wyznaczenie względnej miary wydajności dowolnego wektora eksperymentu \mathbf{e} , w stosunku do wektora eksperymentu optymalnego \mathbf{e}^* . D -efektywność, która określa ilościową miarę suboptymalności trajektorii sygnału wejściowego, zdefiniowano za pomocą poniższej zależności

$$E_D(\mathbf{e}) = \left\{ \frac{\det(\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}))}{\det(\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{e}^*))} \right\}^{1/k} \quad (16)$$

gdzie: k - ilość identyfikowanych parametrów, $\boldsymbol{\theta}$ - wektor estymowanych parametrów oraz \mathbf{e}^* - wektor eksperymentu D – optymalnego.

Wyniki obliczeń dla różnych wartości współczynnika kosztu energetycznego q oraz odpowiadających im wartości D -efektywności zamieszczono w tabeli 1.

Tabela 1. Porównanie komponentów wskaźnika jakości oraz D-efektywności

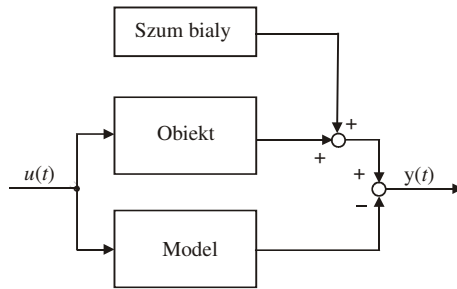
Table 1. Comparison of the performance index components and D-efficiency

q	J_1	J_2	$E_D(\mathbf{e})$
0,00	43,97	0,00	1,00
2,50	42,18	21,61	0,98
3,95	36,85	27,77	0,92
7,00	33,51	30,35	0,87
8,00	4,77e-12	7,82e-11	3,29e-7

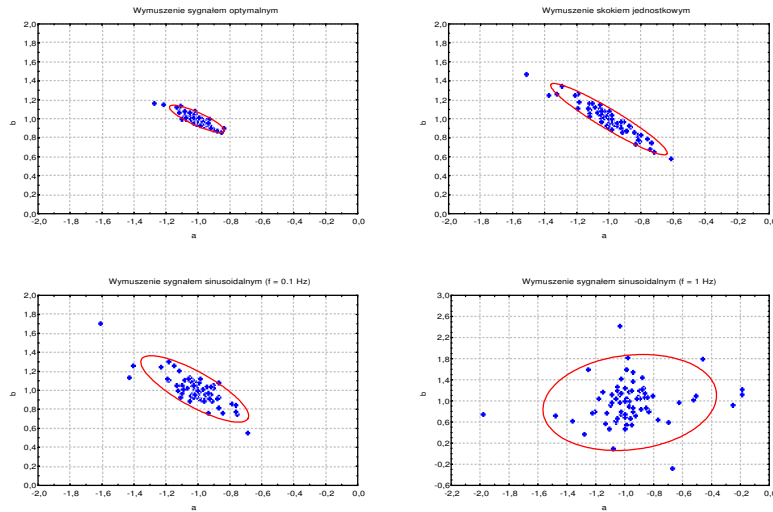
Jak można było się spodziewać ograniczenie na energię sygnału wejściowego ma znaczny wpływ na postać optymalnego sterowania. Wartość wyznacznika $\det(\mathbf{M}) = 4,77 \times 10^{-12}$ oznacza, iż odpowiadająca mu macierz informacyjna Fishera jest praktycznie osobliwa (dla $q = 8$).

Przeprowadzono identyfikację parametrów modelu układu inercyjnego poddając go podbudzeniu różnymi sygnałami wejściowymi. W celu weryfikacji dokładności uzyskiwanych estymat parametrów modelu system poddano wymuszeniu: sygnałem optymalnym (rys. 1), skokiem jednostkowym, sygnałem sinusoidalnym „wolnym” o częstotliwości $f = 0,1$ [Hz] oraz sygnałem sinusoidalnym „szybkim” o częstotliwości $f = 1$ [Hz]. Symulacje przeprowadzono z wykorzystaniem obiektu opisanego równaniem (1) przyjmując nominalne wartości parametrów równe: $a = -1$ oraz $b = 1$. Obiekt poddano zakłóceniu losowemu o rozkładzie normalnym, wartości średniej równej zero i ograniczonej wariancji. Schemat blokowy procesu identyfikacji przedstawiono na rysunku 5. Identyfikowano parametry modelu poszukując minimum zmiennej wyjściowej $y(t)$ wykorzystując metodę poszukiwań prostych Neldera - Meada. Minimalnych wartości zmiennej $y(t)$ poszukiwano wprowadzając węzły siatki warunku początkowego $-5 \leq x_0(0) \leq 5$ zmieniającego się skokowo o jeden i wariancji zakłóceń $0 \leq \sigma^2 \leq 0,7$ zmieniającej się skokowo o jedną dziesiątą. Wyznaczono optymalne estymaty parametrów modelu dla wszystkich kombinacji wartości warunku początkowego oraz wariancji zakłóceń.

Poszczególne elementy macierzy kowariancji parametrów określają wybrane wymiary elipsy niepewności. Szerokość elipsy wzdłuż poszczególnych osi współrzędnych jest określona przez wariancję estymat elementów diagonalnych macierzy kowariancji. Spłaszczenie elipsy zależy od współczynnika korelacji estymat, tj. stosunku odpowiednich elementów pozadiagonalnych do diagonalnych macierzy kowariancji parametrów. Wartości własne macierzy kowariancji określają długości poszczególnych osi elipsy. Kwadrat pola powierzchni elipsy jest proporcjonalny do wyznacznika macierzy kowariancji, który jest również iloczynem wartości własnych tej macierzy. Na rysunku 6 wykreślono obszary ufności estymat parametrów modelu.



Rys. 5. Przepływ informacji w procesie identyfikacji
 Fig. 5. Flow of information in identification



Rys. 6. Elipsoidalne obszary ufności estymat parametrów modelu inercyjnego pobudzanego różnymi sygnałami wejściowymi

Fig. 6. Ellipsoidal confidence regions of the inertial model parameters estimates which was perturbed using different input signals

Optimalny sygnał sterujący układem inercyjnym różni się od skoku jednostkowego przełączeniem występującym w początkowej fazie przebiegu sterowania (rys. 1). Różnice te wpływają jednak w zauważalny sposób na niepewność otrzymywanych estymat parametrów. Najmniejszą niepewność wyznaczonych parametrów uzyskano pobudzając system optymalnym sygnałem wejściowym, o czym świadczy obszar ufności wyznaczonych estymat (rys. 6). Nieco większą niepewność wyników estymacji zaobserwowano przy pobudzeniu systemu skokiem jednostkowym. Można zauważyć, że niepewność estymowanych parametrów modelu sterowanego sygnałem sinusoidalnym rośnie wraz ze wzrostem jego częstotliwości.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono problem wielokryterialnego doboru optymalnego sygnału wejściowego w zadaniu identyfikacji parametrów modelu układu inercyjnego. Wyniki doboru optymalnego sygnału pobudzającego oraz jego weryfikację zamieszczono w postaci graficznej. Istotne znaczenie ma fakt, iż maksymalizowany wskaźnik jakości może zostać zapisany w postaci kanonicznej Mayera, co umożliwi rozwiązanie zadania z wykorzystaniem istniejących bibliotek narzędziowych do optymalizacji układów dynamicznych.

Literatura

1. Ljung L., *System identification, Theory for the user, 2nd Edition*, Prentice Hall, USA, 1999
2. Pintelon R., Schoukens J., *System identification: A frequency domain approach*, John Wiley & Sons, USA, 2001
3. Kalaba R., Spingarn K., *Control, identification, and input optimization.*: Plenum Press, New York, 1982
4. Mehra R., *Choice of input signals. In trends and progress in systems identification*, Eykhoff, Ed, Pergamon Press, New York, 1981
5. Hussain M., *Review of the applications of neural networks in chemical process control-simulation and on-line implementation*, Artificial Intelligence in Engineering 13, 1999, 55-68
6. Narasimhan S., Rengaswamy R., *Multi-objective input signal design for plant friendly identification of process systems*, Proceeding of the American Control Conference, Boston, Massachusetts, 2004, 4891-4896
7. Narasimhan S., Rengaswamy R., *Multi-objective optimal input design for plant friendly identification*, Proceeding of the American Control Conference, Seattle, Washington, 2008, 1304-1309
8. Rivera D., Braun M., Mittelmann H., *Constrained multisine inputs for plant friendly identification of chemical process*, In IFAC World Congress, Barcelona, Spain, 2002
9. Rivera D., Lee H., Braun M., Mittelmann H., *Plant friendly system identification: A challenge for the process industries*, In SYSID 2003, Rotterdam, Netherlands, 2003
10. Atkinson A., Donev A., Tobias R., *Optimum experimental design with SAS*, Oxford University Press, Oxford, 2007
11. Jakowluk W., *Design of an optimal input signal for plant-friendly identification of inertial systems*, Electrical Review, 85 2009, n. 10, 123-128
12. Jakowluk W., *Design of an optimal excitation signal for identification of inertial systems in time domain*, Electrical Review, 85 2009, n. 6, 125-129
13. Schwartz A., Polak E., Chen Y., *A Matlab toolbox for solving optimal control problems*. Version 1.0 for Windows, May 1997. Available at: <http://www.schwartz-home.com/~adam/RIOTS/>
14. Stryk O., *User's guide for DIRCOL, a direct collocation method for the numerical solution of optimal control problems*. Version 2.1. Technische Universität Darmstadt, November 1999. Available at: <http://www.sim.informatik.tu-darmstadt.de/index/leftnav.html>

15. Jennings L., Fisher M., Teo K., Goh C., MISER 3: Optimal control software, Version 2.0. Theory and user manual. Dept. of Mathematics, University of Western Australia, Nedlands, (2002). Available at: <http://www.cado.uwa.edu.au/miser/>

Streszczenie

Dokładność uzyskiwanych estymat parametrów identyfikowanego modelu zależy przede wszystkim od doboru odpowiedniego sygnału wejściowego, który wzbudza wybrane wejście obiektu regulacji. W pracy przedstawiono wyniki doboru optymalnego sygnału pobudzającego układem jednoinercyjnym. Celem takiego eksperymentu jest minimalizacja wariancji uzyskiwanych estymat parametrów. Maksymalizowano funkcjonal celu określony jako wyznacznik macierzy informacyjnej Fishera uwzględniając nałożone ograniczenia na amplitudę sygnału wejściowego. Stwierdzono, że optymalne pobudzenie identyfikowanego obiektu minimalizuje elipsoidalne obszary ufności estymowanych parametrów.

Design of an optimal input signal for identification of inertial system parameters

Summary

The choice of an input signal used for actuation of the system is critical in the task of model building and parameter identification. In the paper the optimal excitation signal was generated for an inertial model. The objective of this kind of experiment design is to minimise the variance of the parameters to be estimated. In this case, the objective function was formulated through maximisation of the Fisher information matrix determinant in the form of a conventional integral criterion with amplitude constraints. It was shown that the optimal input signal used for system excitation minimises the volume of the ellipsoidal confidence region of parameters estimates.