

Tomasz Janusz TELESZEWSKI, Piotr RYNKOWSKI

Politechnika Białostocka, WBiIS, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, rynkowski@pb.edu.pl

Symulacja linii prądu w przepływach Stokes'a metodą brzegowych równań całkowych

1 Wstęp

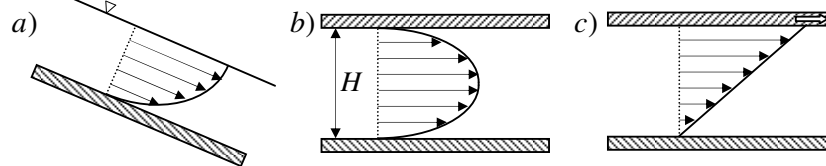
W pracy wyprowadzono algorytm wyznaczania funkcji prądu przepływów Stokes'a. Znajomość przebiegu linii prądu pozwala zaprojektować optymalne kształty w wielu maszynach przepływowych oraz w mikrokanałach [1], w których zachodzą przepływy pełzające. Zakres stosowania metod analitycznych w przepływach Stokes'a jest ograniczony tylko do najprostszycich zagadnień. Obecnie najczęściej stosowane metody numeryczne wyznaczania linii prądu oparte są o metody siatkowe, takie jak metoda różnic skończonych i metoda elementów skończonych [2,3]. Wadą metod siatkowych jest pracochłonność wykonywania siatek. Metoda brzegowych równań całkowych eliminuje wady metod siatkowych.

Stacjonarny płaski przepływ Stokes'a opisany jest następującym równaniem [4,5]:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{c}} = \frac{1}{\nu} \bar{\boldsymbol{\rho}} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \bar{\mathbf{f}} \quad (1)$$

gdzie: $\bar{\mathbf{c}}$ jest to prędkość przepływu, $\bar{\mathbf{f}}$ są to siły masowe, p jest to ciśnienie, ρ jest gęstością cieczy, natomiast ν jest współczynnikiem lepkości kinematycznej.

W dalszej kolejności rozważań zakłada się przepływ nad ścianką (rys. 1a) lub przepływ między ściankami (rys. 1b-c) na której przyjmuje się przeszkodę. Przedstawiony algorytm może być wykorzystany do symulowania przepływów Stokes'a, w których wykorzystuje się profile prędkości liniowe (przepływ Couette'a – rys. 1c), jak również paraboliczne (przepływ Hagen-Poiseuille'a – rys. 1b-c).



Rys. 1. Przykłady przepływów Stokes'a: a) przepływ w polu sił grawitacyjnych wzdłuż powierzchni nachylonej do poziomu, b) przepływ pomiędzy dwiema nieruchomymi ściankami, w obecności gradientu ciśnienia (przepływ Hagen-Poiseuille'a), c) przepływ pomiędzy dwiema równoległymi ściankami, gdy jedna z nich jest w ruchu (przepływ Couette'a).

Fig. 1. Example of the use Stokes flow with wall: a) flow in layer on an inclined plane due to gravity, b) flow under pressure gradient between two fixed rigid

planes (Hagen-Poiseuille flow), c) flow due to relative motion of two rigid planes (Couette flow).

Po wyznaczeniu składowych prędkości c_x, c_y , funkcję prądu Ψ wyznacza się z następujących zależności:

$$c_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad ; \quad c_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (2)$$

2 Brzegowe równanie całkowe opisujące płaski przepływ Stokes'a w zagadnieniach dwuwymiarowych

W obszarze płaskim (Λ) ograniczonym zamkniętym nieprzenikalnym brzegiem (L) rozwiązaniem równania różniczkowego (1) jest równanie całkowe [6,7]:

$$\begin{aligned} -f(\mathbf{p}) - \frac{1}{4\pi\mu} \int_L \left(f(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} c_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & c_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ c_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & c_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \right) dL = \\ \stackrel{(3)}{=} + \frac{1}{4\pi} \int_L \left(\begin{bmatrix} u_x(\mathbf{p}) \\ u_y(\mathbf{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & \sigma_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ \sigma_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & \sigma_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \right) dL, \end{aligned}$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in (L)$

gdzie:

$$c_{mn}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \delta_{mn} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) + \frac{(\chi_{mq} - \chi_{mp})(\chi_{nq} - \chi_{np})}{(\chi_{mq} - \chi_{mp})^2 + (\chi_{nq} - \chi_{np})^2}, \quad (3a)$$

$$r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|, \quad (3b)$$

gdzie przez χ oznaczono argumenty (x_p, y_p) , (x_q, y_q) oraz:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= K_{xxx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})n_{xq} + K_{xxy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})n_{yq} \\ \sigma_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= K_{xyx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})n_{xq} + K_{xyy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})n_{yq} \\ \sigma_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= K_{yxx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})n_{xq} + K_{yxy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})n_{yq} \\ \sigma_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= K_{yyx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})n_{xq} + K_{yyy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})n_{yq} \end{aligned} \right\} \quad (3c)$$

przy czym:

$$K_{mnk}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\delta_{mk} P_n + \frac{\partial c_{mn}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \chi_{kq}} + \frac{\partial c_{kn}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \chi_{mq}} \quad (3d)$$

gdzie: $\delta_{mn} = 1 (m = n)$, $\delta_{mn} = 0 (m \neq n)$, n_{xq}, n_{yq} -są wektorami normalnej $\bar{\mathbf{n}}_q$,

oraz

$$p_x = \frac{x_q - x_p}{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} \quad ; \quad p_y = \frac{y_q - y_p}{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2} \quad (3e)$$

Po wyznaczeniu gęstości $f(\mathbf{q})$ na brzegu (L), składowe prędkości c_x, c_y , w obszarze

Λ można opisać związkami całkowymi:

$$c_x(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_L \left(f(\mathbf{q})_x c_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f(\mathbf{q})_y c_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dL - \frac{1}{4\pi} \int_L \left(u_x(\mathbf{q}) \sigma_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_y(\mathbf{q}) \sigma_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dL + c_{x\infty}(\mathbf{p}) \quad (4)$$

$$c_y(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_L \left(f(\mathbf{q})_x c_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f(\mathbf{q})_y c_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dL - \frac{1}{4\pi} \int_L \left(u_x(\mathbf{q}) \sigma_{xy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + u_y(\mathbf{q}) \sigma_{yy}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dL + c_{y\infty}(\mathbf{p}) \quad (5)$$

$$\mathbf{q} \in (L) , \mathbf{p} \in (\Lambda)$$

Funkcja prądu przepływu Stokes'a [7] została wyznaczona poprzez modyfikację jąder całkowych (4,5), zgodnie z zależnością (2):

$$\Psi(\mathbf{p}) = -\frac{1}{4\pi\mu} \int_{(L)} \left(f_x(\mathbf{q}) S_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q}) S_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dL - \frac{1}{4\pi} \int_{(L)} \left(\tilde{c}_x(\mathbf{q}) W_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \tilde{c}_y(\mathbf{q}) W_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dL + \Psi_\infty(\mathbf{p}) \quad (6)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} S_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= +\frac{1}{2}(y_p - y_q) \ln(r_{pq}^2) - (y_p - y_q) + C_1 \\ S_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -\frac{1}{2}(x_p - x_q) \ln(r_{pq}^2) + C_2 \end{aligned} \right] \quad (6a)$$

oraz:

$$\left. \begin{aligned} W_{xx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= W_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + W_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q) \\ W_{yx}^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= W_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; x_q) + W_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \cos(\bar{\mathbf{n}}_q; y_q) \end{aligned} \right] \quad (6b)$$

gdzie:

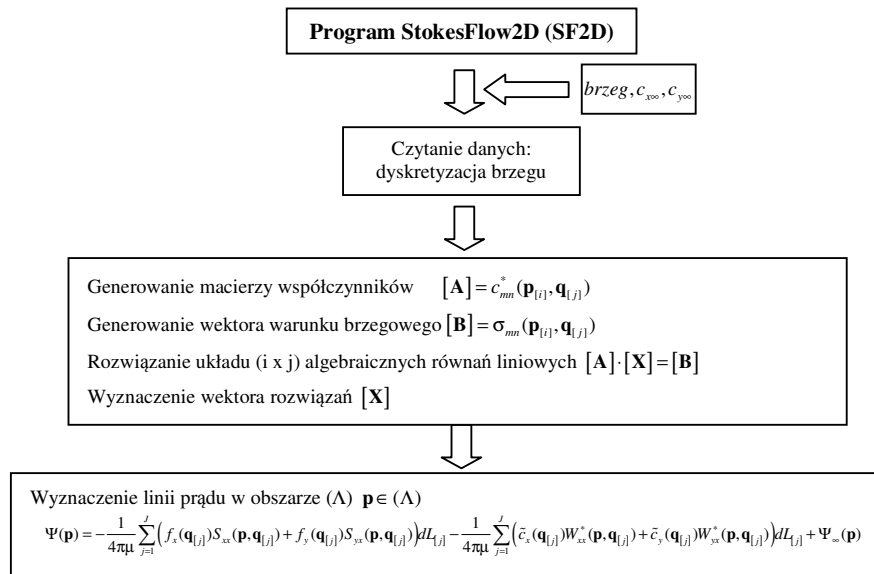
$$\left. \begin{aligned} W_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \right) + \frac{2(x_p - x_q)(y_p - y_q)}{r_{pq}^2} + C_3 \\ W_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \right) - \frac{2(x_p - x_q)(y_p - y_q)}{r_{pq}^2} + C_4 \end{aligned} \right] \quad (6c^1)$$

$$\left. \begin{aligned} W_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -\frac{2(x_p - x_q)}{r_{pq}^2} + C_5 \\ W_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= -\frac{2(x_p - x_q)}{r_{pq}^2} + C_6 \end{aligned} \right\} (6c^2)$$

W powyższych wzorach indeksem ∞ oznaczono składniki przepływu niezakłóconego.

3 Porównanie rozwiązań zagadnień przepływu Stokes'a metodą brzegowych równań całkowych ze znanym eksperymentem

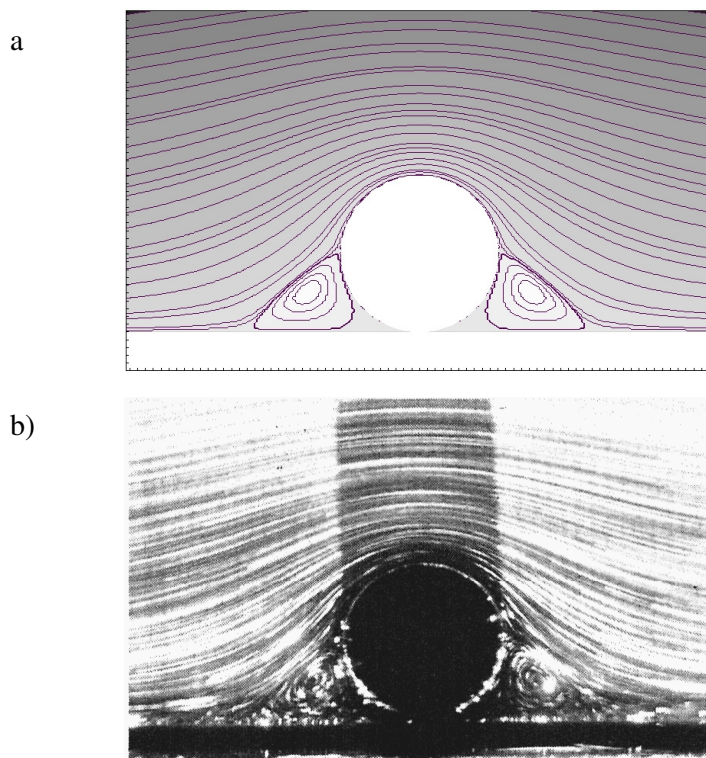
W celu wykonania walidacji metody brzegowych równań całkowych porównano rezultaty obliczeń MEB z fotografią linii prądu znanego eksperymentu [8]. Do obliczeń MEB przyjęto linię brzegową zgodną z warunkami eksperymentu [8]. W celu wykonania symulacji metodą elementów brzegowych został napisany program StokesFlow2D w języku programowania Fortran, którego schemat blokowy przedstawia rysunek 2.



Rys. 2. Schemat programu obliczeniowego SF2D do wyznaczania potencjału prądu

Fig. 2. Block diagram of the computer program SF2D

Graficzne porównanie linii prądu otrzymane metodą brzegowych równań całkowych z eksperymentem zostało przedstawione na rysunku 3. Linie prądu przepływu Stokes'a nad walcem zlokalizowanym na dolnej ścianie otrzymanymi metodą brzegowych równań całkowych (rys.3a) są zbieżne z liniami przedstawionymi na fotografii eksperymentu (rys.3b) [8].



Rys. 3. Linie prądu przepływu Stokesa nad ścianką z zadaną przeszkodą w kształcie walca: a) rozwiązanie numeryczne MEB, b) fotografia linii prądu eksperymentu S.Taneda [8]

Fig. 3. Streamlines – Stokes between two fixed rigid planes with cylinder at the a bottom of a wall: a) BEM solution, b) experiment by S. Taneda [8]

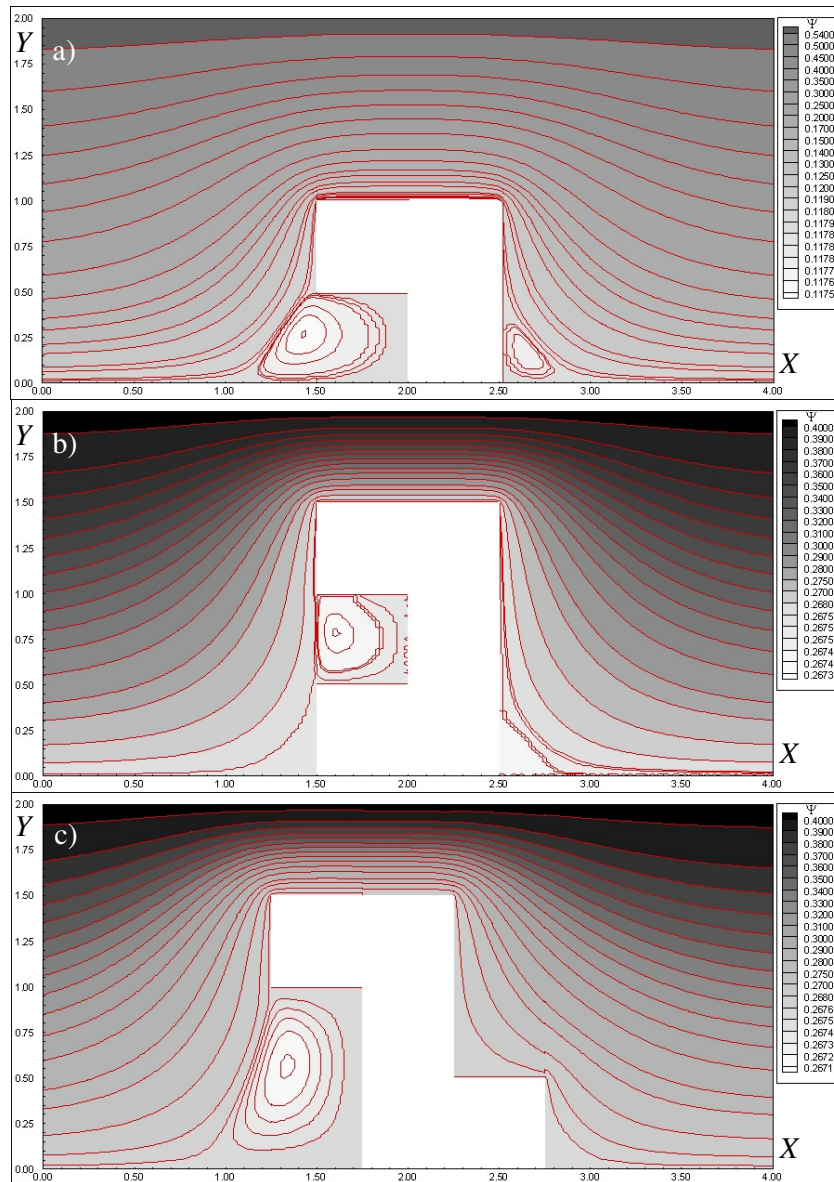
4 Przykłady obliczeniowe

Jako przykłady zastosowania metody brzegowych równań całkowych w wyznaczaniu przepływów Stokes'a przedstawiono przepływ nad zadaną przeszkodą między dwiema ściankami. W poniższych przykładach założono niezakłócony przepływ między dwiema nieruchomymi ściankami opisany wzorem Hagen-Poiseuille'a (rys.1b):

$$c_{x\infty}(y) = \bar{\rho}(Hy - y^2) \quad ; \quad c_{y\infty}(y) = 0 \quad ; \quad \bar{\rho} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \quad (7)$$

gdzie: p jest to ciśnienie, μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, natomiast H oznacza odległość między ściankami. Do obliczeń przyjęto jednostkową wartość $\bar{\rho}$.

Na rysunku 4 wykreślono linie prądu przepływu między ściankami z zadaną przeszkodą na dolnej ścianie w kształcie: kątownika (rys. 4a), ceownika (rys.4b) oraz zetownika (rys.4c).



Rys. 4. Rozwiązanie numeryczne MEB linii prądu przepływu między dwiema ściankami z zadaną przeszkodą na ścianie dolnej w kształcie: a) kątownika, b) ceownika, c) zetownika

Fig. 4. BEM solution- streamlines flow between two fixed rigid planes with shape at the a bottom of a wall: a) angle bar, b) channel bar, b) zee bar

5 Podsumowanie

Przedstawiony wyżej algorytm rozwiązywania płaskich zagadnień przepływu cieczy lepkiej pozwala na wyznaczenie pól prędkości, ciśnienia i linii prądu. Zastosowanie MEB zawęża dyskretyzację do brzegu, nie jest zatem wymagana budowa siatki wewnątrz obszaru, w wyniku czego jest to metoda bardziej konkurencyjna w stosunku do powszechnie stosowanych metod obszarowych ponadto ów metoda rozwija się dynamicznie. Dodatkowym atutem przedstawionej metody jest możliwość zastosowania obszarów półskończonych, co w przypadku metod siatkowych powoduje wiele trudności. Prezentowana metoda może być stosowana dla profili prędkości liniowych jak i parabolicznych.

Literatura

1. Kim S., Karrila S.J.: *Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications*. w Dover Publications 2005
2. Gresho P.M., Sani R.L.: *Incompressible Flow and the Finite Element Method, Volume 2*. John Wiley & Sons Inc. 2000
3. Zieniewicz O.C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method Fluid Dynamics Fifth Edition Volume 3*. Elsevier Singapore 2005
4. Batchelor G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 2000
5. Prosnak W.J.: *Mechanika Płynów Statyka Płynów i Dynamika Cieczy Tom I*. PWN Warszawa 1970
6. Brebbia C. A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, NY, 1984
7. Teleszewski IT.J., Sorko S.A.: *Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania płaskich przepływów cieczy lepkiej*. Acta Mechanica et Automatica, Vol.5, nr 1, 2011
8. Taneda S.: Visualization of Separating Stokes Flows
Journal of the Physical Society of Japan Vol.46, No.6 pp. 1935-1942, 1979

Streszczenie

Opracowanie zawiera zaproponowany algorytm wyznaczania linii prądu w przepływach Stokes'a metodą brzegowych równań całkowych. W celu walidacji metody elementów brzegowych porównano rozwiązania metodą brzegowych równań całkowych ze znanym eksperymentem. Przedstawiony algorytm może być wykorzystany do wyznaczania linii prądu w płaskich przepływach Stokes'a w różnych dziedzinach techniki. W prezentowanej pracy przedstawiono przykładowe graficzne rezultaty obliczeń dla wybranych przykładów, dla których nie są znane rozwiązania analityczne. Algorytm został zaimplementowany w autorskim programie obliczeniowym napisanym w języku Fortran.

Simulation of the streamlines of Stokes flow using Boundary Integral Equation Method

Summary

In this article it has been introduced the way to calculate streamlines of Stokes flow using Boundary Integral Equation Method. The algorithm was verified using a known experiment S. Taneda. The computer program was written in Fortran programming language. The algorithm BEM enables very effective solving of test and practical problems in engineering and can be alternative to mesh methods like Finite Difference Method, Finite Volume Method or Finite Element Method. A numerical examples were presented.

Opracowanie zrealizowano w ramach z pracy statutowej nr S/WBiIŚ/5/2011.