

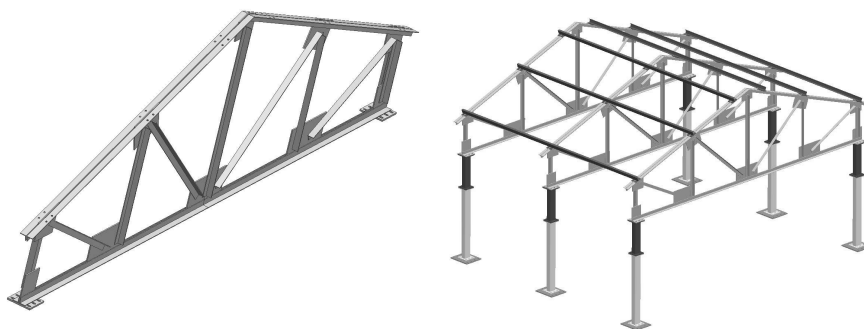
**Jan FREUNDLICH, Marek PIETRZAKOWSKI**  
Politechnika Warszawska, IPBM, 02-524 Warszawa, ul. Narbutta 84,  
E-mail: jfr@simr.pw.edu.pl, mpi@simr.pw.edu.pl

## **Symulacja MES pomiaru drgań dźwigara kratowego przy pomocy rozłożonych czujników piezoelektrycznych**

### 1 Wstęp

Konstrukcje dachowe stosowane w budownictwie narażone są na niekorzystny wpływ otoczenia w postaci zaburzeń o charakterze drganiowym, których źródłem w rejonach niskiej aktywności sejsmicznej jest głównie ruch ciężkich pojazdów transportowych. A zatem, stan odpowiedzialnych elementów konstrukcji kratownicy dachowej powinien być monitorowany także pod kątem obciążeń zmiennych w czasie w celu wykrycia i identyfikacji uszkodzeń we wczesnych fazach rozwoju.

W opracowaniu zaproponowano zastosowanie rozłożonych czujników piezoelektrycznych do pomiaru zmiennych w czasie odkształceń i przemieszczeń prętów kratownicy. Zaletą takich czujników jest brak konieczności ich zasilania. Czujniki piezoelektryczne mogą być w całości przyklejone do powierzchni obiektu w obszarze mierzonych odkształceń lub mocowane na obu brzegach przy pomocy specjalnych uchwytów [2, 5]. Zapewnienie odpowiedniej pracy czujników piezoelektrycznych w danej konstrukcji często wymaga wcześniejszej symulacji numerycznej działania całego systemu. W pracy przedstawiono budowę modelu analitycznego i MES systemu belka – czujnik piezoelektryczny. Model ten użyto do symulacji numerycznej monitorowania kratowego dźwigara dachowego przy zastosowaniu czujników piezoelektrycznych. Obliczenia wykonano dla uproszczonego modelu MES dźwigara kratowego (Rys. 1), zastosowanego w stanowisku badawczym projektu MONIT [3].



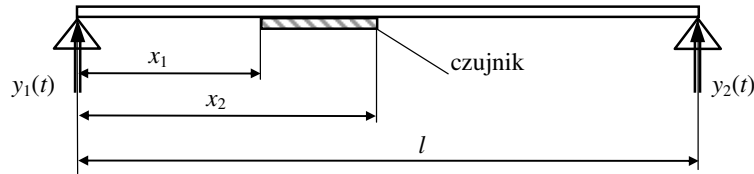
*Rys. 1. Dźwigar kratowy i konstrukcja dachowa [3]*

*Fig. 1. Truss girder and the roof structure [3]*

## 2 Model analityczny belki do obliczeń porównawczych

Jako zadanie porównawcze rozważono drgania jednorodnej, swobodnie podpartej belki z przyklejonym do dolnej lub górnej powierzchni czujnikiem piezoelektrycznym. Założono doskonałe połączenie czujnika z powierzchnią belki. Przyjęto uproszczony model czujnika piezoelektrycznego z pominięciem wpływu jego masy i sił bezwładności na drgania poprzeczne belki. Model belki założono zgodnie z teorią Bernoulliego, pomijając bezwładność obrotową przekrojów belki oraz wpływ ścinania.

Analizę ograniczono do drgań stacjonarnych, wymuszonych pionowym przemieszczeniem podpór belki.



Rys. 2. Schemat badanej belki

Fig. 2. Schema of the analyzed beam

Równanie ruchu drgań poprzecznych  $w(x,t)$  lepkościwej belki (Rys. 2) poddanej wymuszeniu kinematycznemu w podporach  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  odniesione do nieodkształconej osi ma postać

$$E_b J_b \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) + \rho_b A_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\rho_b A_b \left( \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \ddot{y}_1(t) + \frac{x}{l} \ddot{y}_2(t) \right) \quad (1)$$

gdzie:  $J_b$ ,  $A_b$  oznaczają odpowiednio moment bezwładności i pole przekroju belki,  $E_b$ ,  $\rho_b$  – moduł Younga i gęstość materiału belki,  $\mu$  jest współczynnikiem wewnętrznego tłumienia (model Kelvina-Voigta), dwie kropki nad literą oznaczają drugą pochodną względem czasu. Rozwiązanie równania (1) musi spełniać warunki podporowe.

Napięcie generowane odkształceniem czujnika można obliczyć z zależności (por. [4])

$$V_s = -C_s \int_0^l \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} b_s(x) dx, \quad C_s = d_{31} E_s \frac{(h_b + h_s) h_s}{2 A_s \epsilon_{33}} \quad (2)$$

gdzie:  $b_s(x)$  jest funkcją kształtu czujnika,  $b_s(x) = b_s [H(x - x_1) - H(x - x_2)]$  przy czym  $b_s$  oznacza jego efektywną szerokość,  $H(x)$  jest dystrybucją Heaviside'a,  $C_s$  oznacza współczynnik jakości czujnika, w którym,  $d_{31}$ ,  $\epsilon_{33}$  oraz  $E_s$  oznaczają odpowiednio współczynnik piezoelektryczny, przenikalność elektryczną oraz moduł Younga materiału czujnika,  $h_b$  i  $h_s$  są odpowiednio grubością belki i grubością warstwy czujnika,  $A_s$  jest efektywną powierzchnią elektrod.

Rozwiązanie równania (1) przedstawiono w postaci przepustowości widmowej ugięć belki w stosunku do przemieszczenia lewej podpory

$$H_{wy_1}(i\omega) = \frac{w(x, i\omega)}{y_1(i\omega)} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{n(\omega_n^2 - \omega^2 + i\mu\omega_n^2\omega)} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (3)$$

gdzie:  $\omega$  – częstość wymuszenia,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\omega_n^2 = \frac{E_b J_b}{\rho_b A_b} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Na podstawie zależności (2) wyznaczono przepustowość widmową napięcia sensora w stosunku do przemieszczenia lewej podpory

$$H_{Vy_1}(i\omega) = \frac{V_s(i\omega)}{y_1(i\omega)} = -\frac{2C_s b_s}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + i\mu\omega_n^2\omega} \left( \cos \frac{n\pi}{l} x_2 - \cos \frac{n\pi}{l} x_1 \right) \quad (4)$$

W analogiczny sposób można wyznaczyć przepustowości widmowe odniesione do przemieszczenia prawej podpory.

### 3 Model MES belki do obliczeń porównawczych

Zakładając schemat obliczeniowy belki podobny do przyjętego w obliczeniach analitycznych (Rys. 2), zbudowano model MES badanej belki z czujnikiem piezoelektrycznym. Model MES belki zbudowano z dwuwęzłowych elementów belkowych według teorii Bernoulliego (Elementy B33 [1]). Model MES czujnika piezoelektrycznego został zbudowany przy zastosowaniu 20-to węzłowych trójwymiarowych elementów objętościowych o właściwościach piezoelektrycznych z dodatkowymi elektrycznymi stopniami swobody w węzłach (elementy C3D20E [1]). W elementach tych sprzężenie piezoelektryczne uzyskuje się przez wprowadzenie odpowiednich współczynników piezoelektrycznych i stałych dielektrycznych materiału. Użyto mechanizmu systemu Abaqus do analizy drgań przy wymuszeniu w podporach.

Model belki zbudowano z 45 elementów belkowych (B33), natomiast model czujnika piezoelektrycznego składa się z 24 trójwymiarowych elementów C3D20E, rozmieszczonych w dwóch warstwach. Zgodność przemieszczeń węzłów elementów czujnika piezoelektrycznego z przemieszczeniami węzłów belki została uzyskana przez zastosowanie więzów kinematycznych („Kinematic coupling” wg [1])

### 4 Obliczenia porównawcze modelu analitycznego i modelu MES belki

W obliczeniach porównawczych drgań belki przyjęto, że belka o długości 3 m ma przekrój dwuteowy o wysokości 120 mm, szerokości 60 mm, półkach o grubości 6 mm i ścianie pionowej o grubości 3 mm. Moduł Younga materiału belki przyjęto równy  $E_b = 2,0 \cdot 10^5$  MPa, gęstość  $\rho_b = 7600$  kg/m<sup>3</sup>, współczynnik tłumienia materiałowego  $\mu = 10^{-5}$  s. Czujnik piezoelektryczny ma kształt prostokątnej płytki o wymiarach 60x30 mm i grubości 1 mm. Założono następujące właściwości materiału czujnika: moduł Younga  $E_s = 6,3 \cdot 10^4$  MPa, gęstość  $\rho_s = 7280$  kg/m<sup>3</sup>, przenikalność elektryczną  $\epsilon_{33} = 1,5938 \cdot 10^{-8}$  F/m, współczynnik piezoelektryczny  $d_{31} = -1,7 \cdot 10^{-10}$  CN<sup>-1</sup>.

We wstępnym etapie obliczeń porównano wartości kilku pierwszych częstości drgań własnych wyznaczonych metodą analityczną i obliczonych dla modelu MES analizowanej belki (Tabela 1).

Tabela 1. Częstości drgań własnych belki obliczone dwiema metodami.

Postać drgań	1	2	3	4	5	6
MES [rad/s]	279,8	1119,0	2518,4	4476,7	6993,7	10073,0
Met. analit. [rad/s]	280,1	1120,4	2520,9	4481,7	7002,6	10083,7

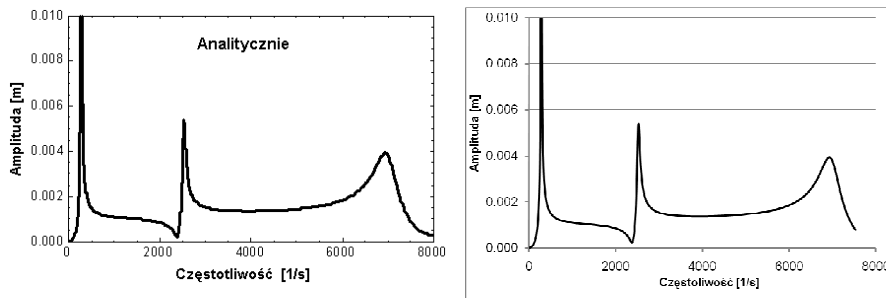
Maksymalny błąd względny między częstościami własnymi obliczonymi porównywanymi metodami wynosi około 1%, co potwierdza zgodność modelu MES z modelem analitycznym rozpatrywanej belki w zakresie podstawowego parametru drganiowego.

W kolejnym etapie obliczeń wyznaczono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe drgań belki oraz napięć generowanych w czujniku piezoelektrycznym. Zbadano drgania punktu belki, który odpowiada środkowi czujnika piezoelektrycznego. Obliczenia wykonano przyjmując przemieszczenia podpór zgodne w fazie ( $\varphi = 0$ ) i z przesunięciem fazowym  $\varphi = \pi$ .

W przypadku metody analitycznej obliczenia przeprowadzono na podstawie wzorów (3 i 4) na przepustowości widmowe, przy pomocy pakietu obliczeń symbolicznych „MATHEMATICA”. Obliczone charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe drgań wybranego punktu belki oraz napięcia czujnika przy wymuszeniu zgodnym w fazie ( $\varphi = 0$ ) przedstawiono graficznie odpowiednio na rysunkach 3 i 4.

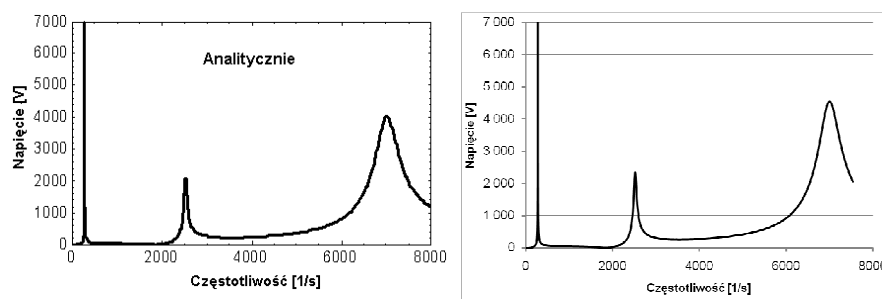
Analogiczne obliczenia wykonano przy użyciu systemu MES Abaqus, stosując zaproponowany model MES analizowanej belki. Tak jak w przypadku obliczeń analitycznych, wyznaczono amplitudy drgań punktu belki i amplitudy napięć czujnika w zależności od częstości wymuszenia. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych ugięć wybranego węzła belki (Rys. 3) i napięcia czujnika (Rys. 4) przy zgodnym w fazie ruchu podpór.

Porównując krzywe zależności amplitudy drgań od częstości wymuszenia przy wymuszeniu w podporach zgodnym w fazie (Rys. 3), widać, że wyniki otrzymane metodą analityczną i metodą elementów skończonych nie wiele się różnią. Nieznacznie większe różnice występują w przypadku charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych napięć generowanych w czujnikach piezoelektrycznych (Rys. 4).



*Rys. 3. Amplituda drgań – obliczenia analityczne i MES, kąt  $\varphi = 0$*

*Fig. 3. Vibration amplitude – analytical and FEM calculations, angle  $\varphi = 0$*



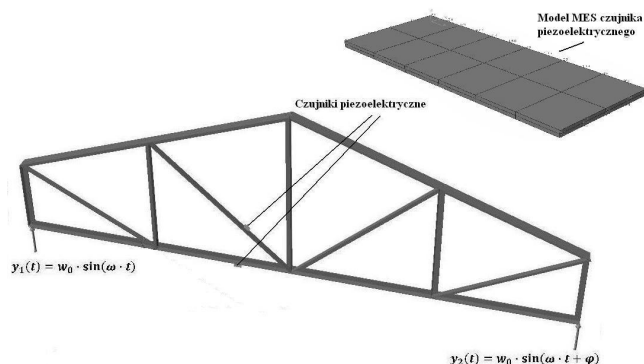
*Rys. 4. Amplituda napięcia – obliczenia analityczne i MES, kąt  $\varphi = 0$*

*Fig. 4. Voltage amplitude – analytical and FEM calculations, angle  $\varphi = 0$*

Podobne wyniki uzyskano w przypadku przesunięcia fazowego ruchu podpór  $\varphi = \pi$ . Biorąc pod uwagę zgodność obliczonych częstości drgań własnych badanego układu oraz przedstawionych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych, można przyjąć, że model MES układu belka – czujnik piezoelektryczny został zbudowany poprawnie i nadaje się do stosowania w bardziej złożonych układach.

## 5 Obliczenia MES dźwigara kratowego

Do obliczeń MES przyjęto dane dźwigara kratowego według dokumentacji projektu MONIT [3] (Rys. 1). Pasy górne i dolny badanego dźwigara zbudowane są z teowników o wysokości 30 mm, szerokości 60 mm, grubości półki 3 mm oraz grubości ścianki pionowej 6 mm. Pręty kraty (tzw. krzyżulce) wykonane są z kątowników 30x30x3 mm. Taka konstrukcja powoduje, że rama nie jest ściśle płaska, a zatem mimo wymuszenia lub obciążenia w płaszczyźnie ramy, występują także przemieszczenia o składowych prostopadłych do jej płaszczyzny



Rys. 5. Schemat obliczeniowy badanego dźwigara kratowego

Fig. 5. Calculation scheme of the roof girder

Parametry materiałowe dźwigara kratowego i czujnika piezoelektrycznego przyjęto takie jak w rozdziale 4, zakładając, że wymiary czujnika są również takie same. Założono natomiast większy, przyjmowany dla stali współczynnik tłumienia materiałowego  $\mu = 1 \cdot 10^{-4}$  s.

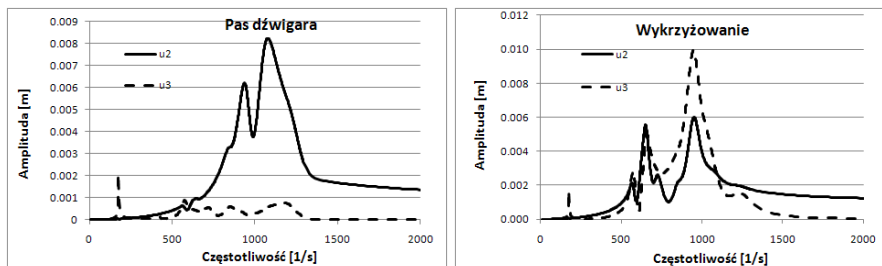
W celu przeprowadzenia obliczeń MES, zbudowano odpowiednie modele dźwigara kratowego z umieszczonymi na nim czujnikami piezoelektrycznymi. Model MES kratownicy składa się z 103 węzłów oraz 110 elementów belkowych według teorii Bernoulliego (B33 [1]). Zastosowano dwa czujniki piezoelektryczne, jeden umieszczony na pasie dolnym, natomiast drugi na jednym z prętów wykrzyżowania (Rys. 5). Każdy z czujników składa się z 201 węzłów i 24 trójwymiarowych elementów o właściwościach piezoelektrycznych C3D20E [1].

W pierwszym etapie, podobnie jak w obliczeniach porównawczych belki, obliczono kilka najniższych, kolejnych częstości drgań własnych kratownicy.

Następnie wyznaczono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe drgań punktów dźwigara znajdujących się bezpośrednio pod środkami geometrycznymi czujników piezoelektrycznych. Charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe przedstawione na rysunku 6 dotyczą drgań wywołanych wymuszeniem w podporach zgodnym w fazie ( $\varphi = 0$ ) i odnoszą się do punktu na pasie dźwigara i wykrzyżowaniu (Rys. 5). Na wykresach charakterystyk linią ciągłą oznaczono przemieszczenia w płaszczyźnie dźwigara, a linią przerywaną w kierunku prostopadłym do niej (Rys. 6). Natomiast charakterystyki napięciowe przy tym wymuszeniu zamieszczono na rysunku 7. Wykresy charakterystyk zmian napięcia wywołane ruchem podpór o przeciwnej fazie ( $\varphi = \pi$ ) pokazano na rysunku 8.

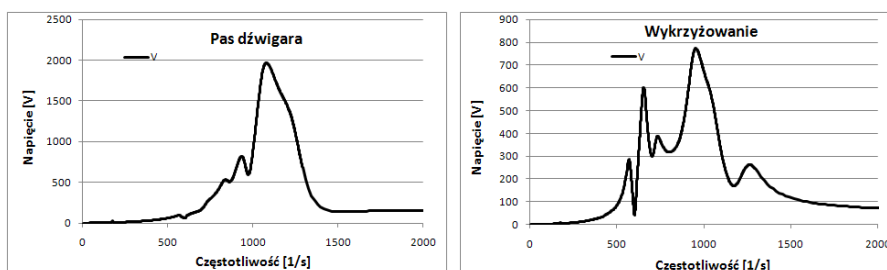
*Symulacja MES pomiaru drgań dźwigara kratowego  
przy pomocy rozłożonych czujników piezoelektrycznych*

---



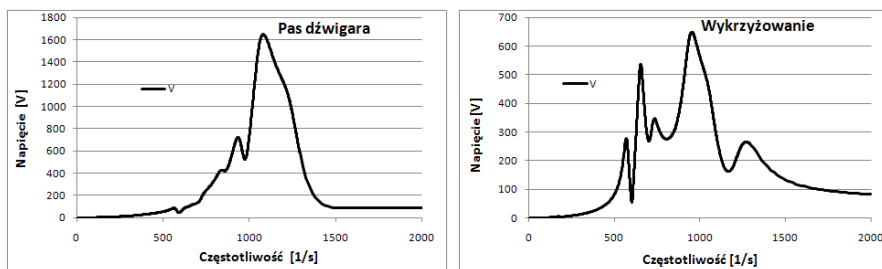
Rys. 6. Amplituda drgań punktu pasa i wykrzyżowania, kąt  $\varphi = 0$

Fig. 6. Vibration amplitude of the point on the chord and the diagonal, angle  $\varphi = 0$



Rys. 7. Amplituda napięcia w czujnikach piezoelektrycznych, kąt  $\varphi = 0$

Fig. 7. Voltage amplitude in piezoelectric sensors, angle  $\varphi = 0$



Rys. 8. Amplituda napięcia w czujnikach piezoelektrycznych, kąt  $\varphi = \pi$

Fig. 8. Voltage amplitude in piezoelectric sensors, angle  $\varphi = \pi$

Jak wspomniano wcześniej, zastosowanie prętów kraty o przekroju kątowym (Rys. 1) powoduje, że dźwigar nie jest ściśle płaski i jest strukturą mało sztywną w kierunku poprzecznym. Oznacza to, że przy wymuszeniu w płaszczyźnie dźwigara pojawiają się znaczące składowe przemieszczeń o kierunku prostopadłym do jego płaszczyzny. Jak wynika z analizy, najniższa częstość drgań dźwigara kratowego odpowiada postaci drgań o dominujących składowych prostopadłych do płaszczyzny dźwigara (Rys. 6). Efekt ten

jest szczególnie widoczny na wykresach amplitudowo-częstotliwościowych punktu pręta wykrzyżowania (Rys. 6), gdzie składowa przemieszczenia prostopadła do płaszczyzny dźwigara (linia przerywana) osiąga wyraźnie większe wartości amplitud rezonansowych niż składowa przemieszczenia w płaszczyźnie dźwigara (linia ciągła).

Złożony obraz drgań prętów kraty i tym samym złożony stan odkształcenia czujnika piezoelektrycznego powoduje trudności z interpretacją powstających napięć (Rys. 7 i 8). W tym przypadku wskazane jest zastosowanie dwóch czujników o jednokierunkowym działaniu umieszczonych we wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Dodatkową trudnością może być występowanie drgań giętno-skrętnych i efektu piezoelektrycznego wywołanego ścinaniem.

Przedstawione na rysunkach 7 i 8 charakterystyki napięć generowanych w czujniku zamocowanym do pasa dźwigara, ze względu na stosunkowo mały udział odkształceń warstwy czujnika w kierunku poprzecznym, potwierdzają możliwość jego zastosowania do oceny lokalnego poziomu naprężeń i przemieszczeń w płaszczyźnie dźwigara.

## 6 Wnioski

Opracowano model MES układu belka – czujnik piezoelektryczny. Wykonano obliczenia porównawcze drgań belki z czujnikiem piezoelektrycznym, przy użyciu modelu analitycznego i opracowanego modelu MES. Obliczone dwoma metodami wartości częstości drgań własnych oraz amplitud drgań wybranych punktów belki są prawie jednakowe, a wyznaczone napięcia w czujniku piezoelektrycznym różnią się mniej niż 5%. Wnika z tego, że model MES badanego układu został poprawnie zbudowany.

Wyniki symulacji w postaci charakterystyk amplitudowych: przemieszczeń dźwigara kratowego i generowanego napięcia czujnika potwierdzają przydatność przetworników piezoelektrycznych w systemie monitorowania niebezpiecznych stanów konstrukcji dachowych spowodowanych drganiami. W przypadku złożonych postaci drgań (np. giętno-skrętnych) czujniki piezoelektryczne o kierunkowym działaniu mają ograniczone zastosowanie.

Obliczenia MES dźwigara kratowego wymagają weryfikacji doświadczalnej, która pozwoli lepiej dopracować model MES systemu belka – czujnik piezoelektryczny. Badania takie przewidziane są w dalszej realizacji programu badawczego.

## Literatura

1. ABAQUS *Online Documentation*: Version 6.8, 2008.
2. Gaudenzi P., Carbonaro R., Benzi E.; *Control of beam vibrations by means of piezoelectric devices: theory and experiments*, Composite Structures 50 (2000) 373-379
3. „*Monitorowanie Stanu Technicznego Konstrukcji i Ocena jej Żywotności*” (MONIT). Projekt współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego w ramach Programu Operacyjnego Innowacyjna Gospodarka (PO IG 1.2)
4. Pietrzakowski M., *Experiment on a cantilever beam control and theoretical approximation*, J.of Theoretical and Applied Mechanics, 3, 40, 2002, 667-689
5. Lin M. W., Abatan A. O., Rogers C. A., *Application of Commercial Finite Element Codes for the Analysis of Induced Strain-Actuated Structures*, Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 6, 5, 1994, 869-875



## Streszczenie

W pracy przedstawiono modelowanie i symulację numeryczną drgań dźwigara kratowego z umocowanymi na powierzchniach prętów czujnikami piezoelektrycznymi, przeznaczonymi do monitorowania drgań dźwigara. W celu walidacji modelu MES, wykonano obliczenia drgań swobodnie podpartej belki z czujnikiem piezoelektrycznym metodą analityczną i MES. Uzyskano dobrą zgodność porównywanych wyników, co potwierdza poprawność modelu MES badanego układu. Następnie, zbudowano uproszczony model MES dźwigara kratowego. Model ten został zastosowany do wyznaczenia charakterystyk dynamicznych przemieszczeń dźwigara oraz napięć generowanych w czujnikach piezoelektrycznych.

## **FEM simulation of distributed piezoelectric sensors applied to truss girder vibration measurements**

### Summary

In this paper modelling and numerical simulations of the truss girder with the piezoelectric sensors mounted on the surface of the girder members are presented. The sensors are applied to monitoring of the girder vibration. For validation a simply supported beam with piezoelectric sensor is calculated using the FEM and the analytical approach. The results achieved by both methods are in a good agreement and confirm the FE model correctness. Afterwards, a simplified FE model of the truss girder was created. The model was used to calculate dynamic characteristics of both the girder displacements and the voltage generated by the sensors.