

# WYZNACZANIE NIEPEWNOŚCI OBLICZEŃ W PRZYPADKU MODELI NIELINIOWO ZALEŻNYCH OD PARAMETRÓW

TOMASZ PUSTY<sup>1</sup>, JERZY WICHER<sup>2</sup>

Automotive Industry Institute (PIMOT)

## Streszczenie

W artykule podjęto problem określenia niepewności wyników obliczeń prowadzonych np. podczas praktyki rzeczoznawczej w ramach rekonstrukcji wypadków drogowych.

Często stosowany do oceny niepewności wyników obliczeń wzór na różniczkę zupełną ma postać szeregu Taylora, w którym pominięto człony zawierające pochodne cząstkowe wyższych rzędów. Powstaje pytanie, czy pominięcie tych członów, jeśli istnieją, może mieć istotny wpływ na dokładność obliczenia niepewności. W artykule, na przykładzie oceny niepewności długości drogi zatrzymania hamującego motocykla, przeanalizowano wpływ pominięcia tych członów. Okazuje się, że w przypadku modeli matematycznych, w których wynik końcowy zależy nieliniowo od parametrów modelu, różnice mogą być znaczące.

**Słowa kluczowe:** niepewność, różniczka zupełna, szereg Taylora.

## 1. Wprowadzenie

Zagadnienie niepewności obliczeń w analizie wypadków drogowych jest szczególnie ważne, gdyż niekiedy niewielka modyfikacja często przyjmowanych parametrów wejściowych do obliczeń może prowadzić do zmiany odpowiedzialności uczestników wypadków drogowych.

Niepewność obliczeń jest wielkością zależną od niedokładności oszacowania potrzebnych do obliczeń wartości parametrów.

Przyjmijmy, że trzeba ocenić niepewność obliczenia wartości pewnej wielkości  $Y$ , która jest funkcją parametrów  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , czyli  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Aby wyznaczyć niepewność  $\Delta Y$  spowodowaną niedokładnością oszacowania  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$  wartości jej argumentów można skorzystać z rozwinięcia w szereg Taylora. Jeżeli zastąpi się nieskończenie

<sup>1</sup> Przemysłowy Instytut Motoryzacji, Laboratorium Badań Pojazdów, ul. Jagiellońska 55, 03-301 Warszawa  
t.pusty@pimot.org.pl, tel. 22 7777 081

<sup>2</sup> Przemysłowy Instytut Motoryzacji, ul. Jagiellońska 55, 03-301 Warszawa, j.wicher@wp.pl

małe przyrosty zmiennych niezależnych wartościami przyrostów skończonych to można napisać:

$$\begin{aligned}
 & f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = \\
 & f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \frac{(\Delta x_1)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \cdot \frac{(\Delta x_2)^2}{2!} \quad (1) \\
 & + \dots + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\Delta x_1 \Delta x_2}{2!} + \dots
 \end{aligned}$$

Na podstawie wyrażenia (1) można wyznaczyć różnicę  $\Delta Y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , która jest miarą niepewności funkcji  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Jeżeli funkcja ta zależy liniowo od parametrów  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , to wszystkie pochodne wyższych rzędów mają wartości zerowe. Wówczas:

$$\Delta Y = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n \quad (2)$$

Wyrażenie to jest bardzo podobne do wyrażenia na różniczkę zupełną. Różniczka zupełna określa największą możliwą wartość niepewności  $\Delta Y$ , dlatego przyjmuje się wartości bezwzględne pochodnych cząstkowych.

Wprowadzając oznaczenie pochodnej cząstkowej względem wielkości  $x_i$  jako  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}^{(1)}$  otrzymamy, na podstawie (2), następujący wzór na różniczkę zupełną, który jest często stosowany w analizie niepewności, a mianowicie:

$$\Delta^{(1)} Y = |f_{x_1}^{(1)}| \Delta x_1 + |f_{x_2}^{(1)}| \Delta x_2 + \dots + |f_{x_n}^{(1)}| \Delta x_n = \sum_{i=1}^n |f_{x_i}^{(1)}| \Delta x_i \quad (3)$$

Trzeba jednak wziąć pod uwagę, że powstał on przy założeniu, że funkcja  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  jest liniowo zależna od parametrów  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Jeżeli tak nie jest, to istnieją również pochodne wyższych rzędów i ich uwzględnienie spowoduje większą wartość wyznaczonej niepewności  $\Delta Y$ .

Rozważmy przypadek, gdy funkcja  $Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  zależy nieliniowo od wielkości  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , i istnieją pochodne cząstkowe II rzędu. W tym przypadku pojawią się dodatkowe człony we wzorze (3). Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = f_{x_i}^{(2)} - \text{druga pochodna funkcji } Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ względem zmiennej } x_i, i=1, \dots, n$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i, x_j}^{(2)} - \text{druga mieszana pochodna funkcji } Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ względem zmiennych } x_i, x_j, i, j=1, \dots, n$$

otrzymamy, po zastosowaniu twierdzenia Schwarz'a o równości mieszanych pochodnych, następujący wzór na niepewność:

$$\Delta^{(2)}Y = \sum_{i=1}^n \left| f_{x_i}^{(1)} \right| \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \left| \frac{f_{x_i}^{(2)}}{2} \right| (\Delta x_i)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left| f_{x_i x_j}^{(2)} \right| \Delta x_i \Delta x_j \quad (4)$$

## 2. Długość drogi zatrzymania motocykla

Zastosowanie przedstawionych wyżej zależności będzie przedstawione na przykładzie wyznaczenia długości drogi zatrzymania  $S_z$  hamującego awaryjnie motocykla:

$$S_z = V(t_r + t_0 + \frac{t_n}{2}) + \frac{V^2}{2\mu g f_n} [m] \quad (5)$$

gdzie:

- $t_r$  – czas reakcji kierowcy [s],
- $V$  – prędkość początkowa motocykla [m/s],
- $t_0$  – czas reakcji układu hamulcowego [s],
- $t_n$  – czas narastania opóźnienia [s],
- $\mu$  – współczynnik przyczepności,
- $g$  – przyspieszenie ziemskie [m/s<sup>2</sup>].

Praktyczną skuteczność hamowania motocykla można określić za pomocą współczynnika  $f_n$  wyrażającego udział poszczególnych kół w sumarycznej, możliwej do uzyskania efektywności hamowania oboma hamulcami. Wartość tego współczynnika przyjmuje następujące wartości [4]:

- tylko tylne koło – (40÷45)%,
- tylko przednie koło – (50÷75)%,
- przód + tył – do 95%

Obliczenia przeprowadzono przyjmując następujące wartości początkowe:

- prędkość początkowa motocykla  $V=14$  m/s,
- czas reakcji kierowcy na niespodziewaną sytuację:  $t_r=1,4$  s,
- czas zadziałania hamulców dla układu hydraulicznego:  $t_0=0,25$  s,
- czas narastania siły hamowania przy gwałtownym hamowaniu  $t_n=0,3$  s,
- współczynnik przyczepności na nawierzchni asfaltowej suchej  $\mu=0,85$ ,
- przyspieszenie ziemskie jest stałe i wynosi  $g=9,81$  m/s<sup>2</sup>,
- współczynnik skuteczności hamowania  $f_n=0,7$

Po podstawieniu powyższych wartości początkowych nominalna długość drogi zatrzymania obliczona za pomocą wzoru (5)  $S_z = 42$  m.

Wyznaczmy, jaka jest niepewność tych obliczeń w przypadku stosowania wzoru (3) na różniczkę zupełną. Długość drogi zatrzymania motocykla jest funkcją następujących parametrów:

$$S_Z = f(t_r, t_0, t_n, \mu, V, g, f_n)$$

Na podstawie wzoru (3) można napisać:

$$\Delta^{(1)}S_Z = \left|f_{t_r}^{(1)}\right|\Delta t_r + \left|f_{t_0}^{(1)}\right|\Delta t_0 + \left|f_{t_n}^{(1)}\right|\Delta t_n + \left|f_{\mu}^{(1)}\right|\Delta\mu + \left|f_V^{(1)}\right|\Delta V + \left|f_{f_n}^{(1)}\right|\Delta f_n \quad (6)$$

Przyjęto następujące niedokładności oszacowania wartości parametrów:

$$\Delta V=2\text{m/s}; \Delta t_r=0,2\text{s}; \Delta t_0=0,1\text{s}; \Delta t_n=0,1\text{s}; \Delta\mu=0,2; \Delta g=0; \Delta f_n=0,2$$

Po obliczeniach niepewność  $\Delta^{(1)}S_Z = 22\text{m}$ .

Wzór (6) (różniczkę zupełną) jest przeznaczony do wyznaczenia niepewności w przypadku liniowej zależności drogi zatrzymania motocykla od wszystkich parametrów. W rozważanym przypadku droga zatrzymania jest nieliniową funkcją prędkości motocykla  $V$ . Dlatego wartość niepewności powinna uwzględniać również składniki z pochodnymi cząstkowymi wyższego rzędu. Na podstawie zależności (4) jest:

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)}S_Z = & \left|f_{t_r}^{(1)}\right|\Delta t_r + \left|f_{t_0}^{(1)}\right|\Delta t_0 + \left|f_{t_n}^{(1)}\right|\Delta t_n + \left|f_{\mu}^{(1)}\right|\Delta\mu + \left|f_V^{(1)}\right|\Delta V + \left|f_{f_n}^{(1)}\right|\Delta f_n \\ & + \frac{1}{2}\left|f_{t_r}^{(2)}\right|(\Delta t_r)^2 + \frac{1}{2}\left|f_{t_0}^{(2)}\right|(\Delta t_0)^2 + \frac{1}{2}\left|f_{t_n}^{(2)}\right|(\Delta t_n)^2 + \frac{1}{2}\left|f_{\mu}^{(2)}\right|(\Delta\mu)^2 \\ & + \frac{1}{2}\left|f_V^{(2)}\right|(\Delta V)^2 + \frac{1}{2}\left|f_{f_n}^{(2)}\right|(\Delta f_n)^2 \\ & + \left|f_{t_r t_0}^{(2)}\right|\Delta t_r \Delta t_0 + \left|f_{t_r t_n}^{(2)}\right|\Delta t_r \Delta t_n + \left|f_{t_r \mu}^{(2)}\right|\Delta t_r \Delta\mu + \left|f_{t_r V}^{(2)}\right|\Delta t_r \Delta V + \left|f_{t_r f_n}^{(2)}\right|\Delta t_r \Delta f_n \\ & + \left|f_{t_0 t_n}^{(2)}\right|\Delta t_0 \Delta t_n + \left|f_{t_0 \mu}^{(2)}\right|\Delta t_0 \Delta\mu + \left|f_{t_0 V}^{(2)}\right|\Delta t_0 \Delta V + \left|f_{t_0 f_n}^{(2)}\right|\Delta t_0 \Delta f_n \\ & + \left|f_{t_n \mu}^{(2)}\right|\Delta t_n \Delta\mu + \left|f_{t_n V}^{(2)}\right|\Delta t_n \Delta V + \left|f_{t_n f_n}^{(2)}\right|\Delta t_n \Delta f_n \\ & + \left|f_{\mu V}^{(2)}\right|\Delta\mu \Delta V + \left|f_{\mu f_n}^{(2)}\right|\Delta\mu \Delta f_n \\ & + \left|f_{V f_n}^{(2)}\right|\Delta V \Delta f_n \end{aligned} \quad (7)$$

Po obliczeniach niepewność  $\Delta^{(2)}S_Z = 29\text{ m}$ .

### 3. Wniosek

Okazało się, że opuszczone składniki we wzorze (3) na różniczkę zupełną mają wartość 7 m, co stanowi ponad 30% wartości niepewności obliczonej za pomocą wzoru (3). Przykład ten pokazuje, że jeśli obliczana wielkość jest nieliniową funkcją parametrów, to trzeba uwzględniać pochodne wyższych rzędów, ponieważ ich wpływ może być znaczący.

W typowych obliczeniach dynamiki ruchu samochodu rzadko występują parametry, dla których istnieją niezerowe pochodne rzędu wyższego niż II, zatem do obliczeń najczęściej wystarczy procedura wyznaczania niepewności wykorzystująca człony I i II rzędu, – czyli taka, jaką zaprezentowano w artykule.

### Literatura

- [1] WICHER J., *Błąd wyników obliczeń*, Rzeczoznawca samochodowy 10/2003 nr 96, Stowarzyszenie Rzeczoznawców Techniki Samochodowej i Ruchu Drogowego.
- [2] WACH W., *Niepewność obliczeń dotyczących zderzeń pojazdów*, Paragraf na drodze, sierpień 8/2008, Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych.
- [3] WICHER J. *Bezpieczeństwo samochodów i ruchu drogowego*. Pojazdy samochodowe, wyd. 2. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 2004r.
- [4] *Wypadki drogowe, Vademecum biegłego sądowego*, Wydawnictwo Instytutu Ekspertyz Sądowych, Wydanie II zmienione, Kraków 2006r.
- [5] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. ISO, Switzerland 1995.