ZASTOSOWANIE TEORII PROCESÓW SEMI-MARKOWA DO OPRACOWANIA MODELU NIEZAWODNOŚCIOWEGO SAMOCHODU

JERZY GIRTLER[1], MAREK ŚLĘZAK[2]
Politechnika Gdańska, Przemysłowy Instytut Motoryzacji

Streszczenie

W artykule przedstawiono możliwość zastosowania teorii procesów semi-Markowa (semimarkowskich) do opisu niezawodności samochodu, na przykładzie samochodu osobowego. W rozważaniach uwzględniony został samochód, w którym wyróżniono takie węzły konstrukcyjne (zespoły funkcjonalne) jak: silnik z układami zasilania czynnikami energetycznymi (paliwem, olejem smarowym i cieczą chłodzącą), sprzęgło, skrzynia biegów, wał napędowy, most napędowy, zespół kierowniczy z zawieszeniem, zespół hamulcowy, zespół urządzeń elektrycznych, nadwozie wraz z podwoziem i zespół urządzeń kontrolno-pomiarowych. Opracowano model niezawodnościowy samochodu w formie procesu semimarkowskiego, który jest modelem jedenastostanowym. Do zbioru stanów niezawodnościowych samochodu zakwalifikowano stan zdatności samochodu oraz dziesięć stanów niezdatności wymienionych zespołów funkcjonalnych. Przedstawiono graf zmian tych stanów oraz określono rozkład początkowy i macierz funkcyjną odwzorowującą zmiany wymienionych stanów niezawodnościowych samochodu. Wyprowadzone zostały wzory określające rozkład graniczny procesu zmian stanów technicznych takiego samochodu. Rozkład ten stanowią prawdopodobieństwa przebywania samochodu w stanie zdatności oraz w stanach niezdatności wskutek uszkodzenia dowolnego z wymienionych jego zespołów funkcjonalnych. Przedstawiono możliwość zastosowania statystyki do oszacowania prawdopodobieństw zmiany wspomnianych stanów niezawodnościowych samochodu. Zasygnalizowano także możliwość zastosowania teorii procesów semimarkowskich do badań niezawodności samochodów w przypadku opracowania rozkładu chwilowego procesu zmian ich stanów niezawodnościowych.

Słowa kluczowe: niezawodność, proces semi-Markowa, samochód.

[1] Politechnika Gdańska, Wydział Oceanotechniki i Okrętownictwa, Katedra Siłowni Okrętowych, ul. Gabriela Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk ul. e-mail: jgirtl@pg.gda.pl, tel.: 58 347 24 30

[2] Przemysłowy Instytut Motoryzacji, ul. Jagiellońska 55, 03-301 Warszawa, e-mail: m.slezak@pimot.org.pl, tel.: 22 7777-012

1. Wstęp

W ostatnich latach widoczny jest znaczny postęp techniczny w produkcji współczesnych samochodów, nie tylko osobowych, które cechują wysokie wartości wskaźników energetycznych, trwałości i niezawodności uzyskiwane w warunkach normalnych, czyli takich, dla których został każdy rodzaj samochodów zaprojektowany. Wspomniane wskaźniki mają istotny wpływ na bezpieczeństwo ruchu tych samochodów i z tego powodu samochody te cechują także wysokie wskaźniki bezpieczeństwa. To sprawia, że jeśli współczesne samochody są racjonalnie eksploatowane, to przyczyną wypadków drogowych z reguły nie jest ich stan techniczny, lecz błędy kierowców popełniane w czasie jazdy. Racjonalna eksploatacja tych samochodów, najogólniej tę kwestię ujmując, polega na takim uruchamianiu silników oraz ich obciążaniu w czasie jazdy (podobnie jak i innych zespołów funkcjonalnych), aby zapewnić możliwie najmniejsze zużycie wspomnianych zespołów, a także na wykonywaniu takich obsług profilaktycznych, które wynikają z zastosowania diagnostyki technicznej samochodów. Wtedy uszkodzenia samochodów w czasie jazdy będą zdarzeniami losowymi, wynikającymi z ich zużycia, o małych prawdopodobieństwach ich zajścia.

Jednak racjonalne zastosowanie diagnostyki technicznej do identyfikacji stanu technicznego samochodów nie jest łatwe. Wynika to głównie z tego, że sformułowanie diagnozy o stanie technicznym samochodów bądź o stanie, któregokolwiek ich węzła konstrukcyjnego (zespołu funkcjonalnego) ma formę hipotezy. Przykładowa treść takiej diagnozy jest bowiem następująca: *„samochód znajduje się w takim a nie innym stanie technicznym dlatego, ponieważ obserwowany jest taki a nie inny wektor parametrów diagnostycznych"*. W tym przypadku zdanie: *„jest taki a nie inny wektor parametrów diagnostycznych"* jest zdarzeniem pewnym natomiast zdanie: *„samochód znajduje się w takim a nie innym stanie technicznym"* jest zdaniem prawdopodobnie prawdziwym. Do uprawdopodobnienia tego zdania potrzebna jest znajomość wiarygodności bądź trafności diagnozy [5]. Ponadto należy mieć na uwadze, że samochody są często eksploatowane w warunkach znacznie odbiegających od normalnych, co wynika zarówno z warunków zewnętrznych (stan nawierzchni drogowej, ukształtowanie terenu, opady atmosferyczne, siła i kierunek wiatru) jak też z umiejętności prowadzenia samochodu przez kierowców. Prowadzi to z czasem do powstawania coraz częstszych uszkodzeń samochodów. Oczywiście, że na częstość tych uszkodzeń będą miały różny wpływ poszczególne węzły konstrukcyjne (zespoły funkcjonalne) samochodów, do których można zaliczyć: silnik z układami zasilania czynnikami energetycznymi (paliwem, olejem smarowym i cieczą chłodzącą), sprzęgło, skrzynia biegów, wał napędowy, most napędowy, zespół kierowniczy z zawieszeniem, zespół hamulcowy, zespół urządzeń elektrycznych, nadwozie wraz z podwoziem i zespół urządzeń kontrolno-pomiarowych. Częstość uszkodzeń samochodów może dodatkowo wzrastać wskutek nieodpowiedniego do stanu technicznego samochodów wykonania ich obsług profilaktycznych bądź wymuszonych wcześniej różnymi uszkodzeniami elementów wspomnianych zespołów funkcjonalnych. Zatem w racjonalnej eksploatacji samochodów potrzebna jest znajomość prawdopodobieństwa pojawiania się tych uszkodzeń. Prawdopodobieństwo to można interpretować w sensie statystycznym jako liczbę, wokół której oscyluje częstość względna tego rodzaju zdarzeń losowych. W związku z tym istotne staje się określenie niezawodności samochodów, która w sensie wartościującym może być określona jako prawdopodobieństwo poprawnego działania dowolnego samochodu.

Do opisu niezawodności samochodów bądź wspomnianych ich zespołów funkcjonalnych mogą być stosowane modele klasycznej teorii niezawodności. W takim przypadku wykorzystywane są różne struktury, najczęściej szeregowa. Porównując jednak te modele z modelami niezawodnościowymi, jakimi są grafy stanów – przejść, można zauważyć, że te ostatnie są bardziej przydatne do opisu niezawodnościowego samochodów. Umożliwiają one bowiem bardziej wnikliwe badanie niezawodności samochodów niż modele klasycznej teorii niezawodności, ponieważ odwzorowują zmiany wynikające ze specyfiki ich funkcjonowania oraz zespołów funkcjonalnych. Z tego też względu modele grafów przejść nazywane są modelami niezawodnościowo-funkcjonalnymi urządzeń, w tym – samochodów. Ponadto przydatność tych modeli wynika także z możliwości stosunkowo łatwego wyznaczania wskaźników niezawodnościowych zarówno samochodów jak też ich zespołów. Wskaźniki te można uzyskać bądź wykorzystując zależności analityczne, bądź też metody symulacji komputerowej. Przy spełnieniu odpowiednich założeń, dotyczących własności rozkładów prawdopodobieństw wielkości (zmiennych) losowych i innych własności charakteryzujących samochody jako obiekty badań niezawodnościowych, można skorzystać z teorii procesów semimarkowskich [1, 2, 4].

W opracowaniu podjęto próbę wykazania, że do opisu niezawodnościowego dowolnego samochodu bardziej przydatne są modele niezawodnościowo-funkcjonalne niż struktury niezawodnościowe klasycznej teorii niezawodności urządzeń.

2. Przedstawienie problemu określenia niezawodności samochodu

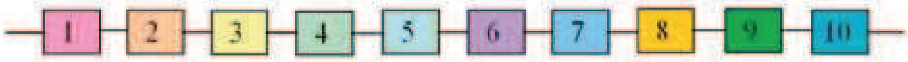
W praktyce eksploatacyjnej samochody osobowe ulegają różnym uszkodzeniom [6]. Podobnie jest w przypadku eksploatacji innych rodzajów samochodów. Racjonalna eksploatacja samochodów wymaga więc informacji o ich niezawodności. Opis niezawodnościowy danego rodzaju samochodu może być przedstawiony według takich samych zasad jak i innych urządzeń [1, 3]. Wobec tego dalsze rozważania dotyczyć będą niezawodności samochodu osobowego, składającego się (przykładowo) z następujących zespołów funkcjonalnych (jako elementów niezawodnościowych) [6]: 1) silnik z układami zasilania czynnikami energetycznymi (paliwem, olejem smarowym i cieczą chłodzącą), 2) sprzęgło, 3) skrzynia biegów, 4) wał napędowy, 5) most napędowy, 6) zespół kierowniczy z zawieszeniem, 7) zespół hamulcowy, 8) zespół urządzeń elektrycznych, 9) nadwozie wraz z podwoziem, 10) zespół urządzeń kontrolno-pomiarowych (rys. 1).

Rys. 1. Schemat przykładowego samochodu osobowego, w którym można wyróżnić takie elementy niezawodnościowe jak: 1) silnik z układami zasilania czynnikami energetycznymi, 2) sprzęgło, 3) skrzynia biegów, 4) wał napędowy, 5) most napędowy, 6) zespół kierowniczy z zawieszeniem, 7) zespół hamulcowy, 8) zespół urządzeń elektrycznych, 9) nadwozie wraz z podwoziem, 0) zespół urządzeń kontrolno-pomiarowych

Do opisu niezawodnościowego każdego samochodu ma zastosowanie struktura szeregowa. Wynika to z tego, że samochód jest zdatny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego elementy niezawodnościowe (silnik z układami zasilania czynnikami energetycznymi, sprzęgło, skrzynia biegów, wał napędowy, most napędowy, zespół kierowniczy z zawieszeniem, zespół hamulcowy, zespół urządzeń elektrycznych, nadwozie wraz z podwoziem, zespół urządzeń kontrolno-pomiarowych) są w stanie zdatności. Struktura taka wynika ze struktury funkcjonalnej tego samochodu, ponieważ jej naruszenie powoduje stan niezdatności całego pojazdu. Schemat struktury niezawodnościowej samochodu o zespołach funkcjonalnych wyszczególnionych na rys. 1, został przedstawiony na rys. 2. Wobec tego funkcja niezawodności takiego samochodu jest następująca:

$$R(t) = P\{T \geq t\} = \prod_{i=1}^{10} R_i(t) \tag{1}$$

Stosując wzór (1), należy mieć na uwadze to, że opisuje on niezawodność samochodu wyposażonego tylko w takie zespoły funkcjonalne jako elementy niezawodnościowe, które (tak samo, jak ich wspomniane elementy) mogą znajdować się tylko w dwóch wzajemnie wyłączających się stanach: zdatności i niezdatności i nie mogą się znajdować w jakichkolwiek stanach pośrednich. Oczywiste jest, że ten warunek w odniesieniu do samochodów jest trudny do zaakceptowania w ich praktyce eksploatacyjnej.



Rys. 2. Struktura niezawodnościowa samochodu osobowego, w którym można wyróżnić takie elementy niezawodnościowe jak: 1) silnik z układami zasilania czynnikami energetycznymi, 2) sprzęgło, 3) skrzynia biegów, 4) wał napędowy, 5) most napędowy, 6) zespół kierowniczy z zawieszeniem, 7) zespół hamulcowy, 8) zespół urządzeń elektrycznych, 9) nadwozie wraz z podwoziem, 10) zespół urządzeń kontrolno-pomiarowych

Aby wyznaczyć $Ri(t)$, czyli niezawodność i-tego zespołu funkcjonalnego samochodu, trzeba znać rozkład czasu poprawnej pracy tego zespołu $Fi(t)$ lub jego funkcję ryzyka $\lambda i(t)$, ponieważ [4]:

$$R_i(t) = 1 - F_i(t), \quad t > 0 \tag{2}$$

lub

$$R_i(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda_i(t)\,d\tau\right], \quad t > 0 \tag{3}$$

Wobec tego funkcja niezawodności samochodu jest następująca:

$$R(t) = \prod_{i=1}^{10}\left[1 - F_i(t)\right] \tag{4}$$

lub

$$R(t) = \exp\left[-\sum_{i=1}^{10}\int_0^t \lambda_i(\tau)\,d\tau\right] \tag{5}$$

Korzystanie z wzorów (4) lub (5) do określenia niezawodności samochodu jest uzasadnione wtedy, gdy można przyjąć następujące założenia:

- zmienne losowe $Ti(i = 1, 2, ..., 10)$, którymi są przedziały czasu poprawnej pracy zespołów funkcjonalnych jako elementów niezawodnościowych samochodu o dystrybuantach $Fi(t)$, są wzajemnie niezależne,
- w czasie postoju użytkowego, żaden z zespołów funkcjonalnych samochodu nie ulega uszkodzeniom,
- w czasie obsługi zarówno profilaktycznej jak również wymuszonej uszkodzeniem, wykonywanej w celu odnowy tego samochodu, zespoły funkcjonalne znajdujące się w stanie zdatności nie ulegają uszkodzeniom,
- uszkodzone zespoły funkcjonalne (elementy niezawodnościowe) tego samochodu nie są naprawiane, lecz wymieniane na nowe.

W praktyce, uszkodzone zespoły funkcjonalne i ich elementy konstrukcyjne, w przypadku każdego samochodu, są z reguły odnawiane (oczywiście, jeśli jest to opłacalne) poprzez wykonanie odpowiedniej obsługi. Oznacza to, że ostatnie założenie jest na ogół niesłuszne. Natomiast trzy pierwsze założenia mogą być uznane za uzasadnione. Dodatkowym ograniczeniem w zakresie stosowania struktury niezawodnościowej szeregowej do opisu niezawodności samochodu, jest konieczność przyjęcia, jak już wspomniano, jedynie dwuwartościowego podziału stanu niezawodnościowego (tj. zdatny – niezdatny) samochodu oraz poszczególnych jego zespołów funkcjonalnych.

Zastosowanie semimarkowskiego modelu procesu zmian stanów wspomnianego samochodu umożliwia uwzględnienie obsług profilaktycznych tego samochodu oraz rozpatrywanie więcej niż dwóch stanów niezawodnościowych samochodu, jak też jego zespołów funkcjonalnych. W trójstanowym modelu niezawodnościowym samochodu, podobnym do modelu niezawodnościowego silnika o zapłonie samoczynnym przedstawionym w publikacji [1], można wyróżnić stany: pełnej (całkowitej) zdatności, częściowej (niepełnej, niecałkowitej, ograniczonej) zdatności i niezdatności. Oczywiste jest, że stanów pośredniej zdatności (to jest stanów możliwych do wyróżnienia między stanami pełnej zdatności i niezdatności) może być tyle ile jest koniecznych do uzyskania przydatnego dla potrzeb praktycznych opisu niezawodnościowego samochodu i jego zespołów funkcjonalnych. Istotą tego modelu jest to, że został on opracowany jako model semimarkowski, w którym wyróżniono takie stany, jak stany zdatności pełnej (całkowitej) i niepełnej (częściowej, niecałkowitej) oraz stan niezdatności. W przypadku samochodu można podobnie rozpatrywać taki sam model trójstanowy. Jednak semimarkowski model procesu zmian stanów niezawodnościowych samochodu może być także rozpatrywany jako proces semimarkowski $\{W(t): t \geq 0\}$ o zbiorze stanów $S = s_i$; i = 0, 1, ... ,10. Interpretacja stanów $s_i \in S$(i = 0, 1, ... ,10) jest następująca: s_0 – stan pełnej zdatności samochodu, s_1 – stan niezdatności silnika z układami zasilania czynnikami energetycznymi, s_2 – stan niezdatności sprzęgła, s_3 – stan niezdatności skrzyni biegów, s_4 – stan niezdatności wału napędowego, s_5 – stan niezdatności mostu napędowego, s_6 – stan niezdatności zespołu kierowniczego z zawieszeniem, s_7 – stan niezdatności zespołu hamulcowego, s_8 – stan niezdatności zespołu urządzeń elektrycznych, s_9 – stan niezdatności nadwozia wraz z podwoziem, s_{10} – stan niezdatności zespołu urządzeń kontrolno-pomiarowych. Zmiany wymienionych stanów s_i (i = 0, 1, ..., 10) następują w kolejnych chwilach t_n ($n \in N$), przy czym w chwili t_0 = 0 samochód znajduje się w stanie s_0. Stan s_0 trwa do chwili uszkodzenia się jakiegokolwiek zespołu funkcjonalnego samochodu. Natomiast stany s_i(i = 1, ..., 10) trwają tak długo dopóki nie zostanie uszkodzony zespół funkcjonalny samochodu odnowiony, albo wymieniony na inny, gdy jego odnowa jest nieopłacalna.

Stan s_0, nazywany stanem zdatności samochodu, zachodzi (ma miejsce) wtedy, gdy wszystkie jego zespoły funkcjonalne są nowe, bądź tak niewiele zużyte, że ich zużycie umożliwia ich obciążenie w całym zakresie, do którego zostały przysposobione w fazie projektowania i wytwarzania. Oznacza to, że wtedy użytkownik samochodu może wykonać wszystkie zadania, jakie zostały przewidziane przez projektanta. Natomiast stany s_i (i = 1, 2, 3, ..., 10) zachodzą wtedy, gdy wspomniane zespoły funkcjonalne samochodu są zużyte w takim stopniu, że samochód nie może być użytkowany zgodnie z przeznaczeniem według zasad racjonalnej jego eksploatacji. Takie stany są ujawniane przez odpowiednie systemy diagnozujące (SDG) w okresie między kolejnymi obsługami profilaktycznymi samochodu. Taka możliwość istnieje, jeżeli SDG są przysposobione do identyfikacji stanu technicznego poszczególnych zespołów samochodu. W przypadku, gdy wspomniane systemy SDG nie są odpowiednio przysposobione do identyfikacji stanu technicznego tych zespołów samochodu, bądź zostały uszkodzone, nie rozpoznają odpowiednio wcześniej nadmiernego zużycia samochodu. To zaś prowadzi do jego uszkodzeń podczas wykonywania zadań przez użytkownika. Uwzględnienie tej sytuacji w fazie eksploatacji samochodów wymaga probabilistycznego opisu procesu eksploatacji samochodów z uwzględnieniem prawdopodobieństw pojawiania się możliwych do zajścia wymienionych stanów $s_i (i$ = 0, 1, 2, 3, ..., 10) w poszczególnych chwilach t_0, t_1, ..., t_{n-1}, tn czasu eksploatacji samochodu.

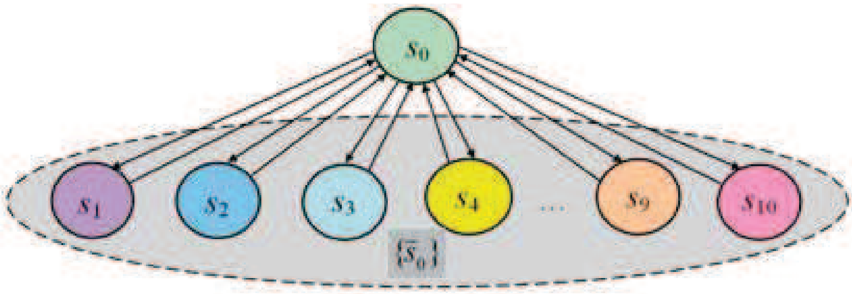
Można przyjąć, że stan samochodu w chwili t_{n+1} oraz przedział czasu trwania stanu osiągniętego w chwili t_n nie zależy od stanów, które zaszły w chwilach t_0, t_1, ..., t_{n-1} oraz przedziałów czasu ich trwania. Zatem proces $\{W(t)\colon t \geq 0\}$ jest procesem semimarkowskim [2, 4]. Graf zmian stanów tego procesu został przedstawiony na rys. 3.

Rozkład początkowy tego procesu jest następujący:

$$P\{W(0) = s_i\} = \begin{cases} 1 \quad dla \quad i = 0 \\ 0 \quad dla \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ 10 \end{cases} \tag{6}$$

natomiast macierz funkcyjna ma postać:

$$\mathbf{Q(t)} = \begin{bmatrix} 0 & Q_{01}(t) & Q_{02}(t) & Q_{03}(t) & \cdot & \cdot & \cdot & Q_{07}(t) & Q_{08}(t) & Q_{09}(t) & Q_{0,10}(t) \\ Q_{10}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{20}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{30}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{40}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{50}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{60}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{70}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{80}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{90}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{10,0}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$



Rys. 3. Graf zmian stanów procesu $\{Y(t)\colon t \in T\}$: s_0 – stan zdatności samochodu, $\{\bar{s}_0\}$ – zbiór stanów niezdatności samochodu: $\{\bar{s}_0\} = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{10}\}$, $s_i \in S(i = 1, \ldots, 10)$ – stany o następującej interpretacji: s_1 – stan niezdatności silnika z układami zasilania czynnikami energetycznymi, s_2 – stan niezdatności sprzęgła, s_3 – stan niezdatności skrzyni biegów, s_4 – stan niezdatności wału napędowego, s_5 – stan niezdatności mostu napędowego, s_6 – stan niezdatności zespołu kierowniczego z zawieszeniem, s_7 – stan niezdatności zespołu hamulcowego, s_8 – stan niezdatności zespołu urządzeń elektrycznych, s_9 – stan niezdatności nadwozia wraz z podwoziem, s_{10} – stan niezdatności zespołu urządzeń kontrolno-pomiarowych

Macierz funkcyjna $\mathbf{Q}(t)$ stanowi model zmian stanów niezawodnościowych samochodu. Niezerowe elementy $Q_{ij}(t)$ macierzy $\mathbf{Q}(t)$ zależą od rozkładów zmiennych losowych, którymi są przedziały czasu przebywania procesu $\{W(t)\colon t \geq 0\}$ w stanach s_i $S(i = 0, 1, \ldots, 10)$. Elementy macierzy funkcyjnej $\mathbf{Q}(t)$ są prawdopodobieństwami przejścia wspomnianego procesu ze stanu si do stanu s_j $(s_i, s_j \in S)$ w czasie nie większym niż t, określonymi następująco:

$$Q_{ij}(t) = P\{W(\tau_{n+1}) = s_j,\ \tau_{n+1} - \tau_n < t | W(\tau_n) = s_i\} = p_{ij} F_{ij}(t) \tag{8}$$

gdzie:

p_{ij} – prawdopodobieństwo przejścia w jednym kroku jednorodnego łańcucha Markowa;

$$p_{ij} = P\{Y(\tau_{n+1}) = s_j | Y(\tau_n) = s_i = \lim_{t \to \infty} Q_{ij}(t);$$

$F_{ij}(t)$ – dystrybuanta zmiennej losowej T_{ij} oznaczającej czas trwania stanu s_i procesu $\{W(t)\colon t \geq 0\}$ pod warunkiem, że następnym stanem tego procesu będzie stan s_j.

Wobec tego macierz $\mathbf{P}$ prawdopodobieństw przejść w łańcuchu Markowa przyjętym dla tego procesu, jak wynika z macierzy funkcyjnej $\mathbf{Q(t)}$ (8), jest następująca [1, 3, 4]:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} & p_{05} & p_{06} & p_{07} & p_{08} & p_{09} & p_{0,10} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Proces $\{W(t): t \geq 0\}$ jest nieprzywiedlny [1, 3, 4], a zmienne losowe T_{ij} mają skończone, dodatnie wartości oczekiwane. Wobec tego jego rozkład graniczny

$$P_j = \lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \lim_{t\to\infty} P\{W(t) = s_j\},\ s_j \in S(j = 0, 1, ...,10) \tag{10}$$

ma następującą postać:

$$P_j = \frac{\pi_j \mathrm{E}(T_j)}{\sum_{k=0}^{10} \pi_k \mathrm{E}(T_k)} \tag{11}$$

Prawdopodobieństwa $\pi_j (j = 0, 1,..., 10)$ we wzorze (11) są granicznymi prawdopodobieństwami włożonego łańcucha Markowa w proces $\{W(t): t \geq 0\}$. Natomiast $\mathrm{E}(T_j)$ i $\mathrm{E}(T_k)$ są wartościami oczekiwanymi zmiennych losowych odpowiednio T_j i T_k, które oznaczają czas przebywania samochodu w stanie odpowiednio s_j i s_k niezależnie od tego, jaki będzie jego stan później.

Wyznaczenie rozkładu granicznego (11) wymaga rozwiązania układu równań, które zawierają wspomniane graniczne prawdopodobieństwa $\pi_j (j = 0, 1,..., 10)$ włożonego łańcucha Markowa oraz macierz $\mathbf{P}$ prawdopodobieństw przejścia ze stanu s_i do stanu s_j określoną wzorem (9). Układ taki jest układem o następującej postaci:

$$\left.\begin{aligned} &[\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9\ \pi_{10}] = [\pi_0\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}]\cdot\mathbf{P} \\ &\sum_{k=1}^{10} \pi_k = 1 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

W wyniku rozwiązania układu równań (12) można korzystając ze wzoru (11) uzyskać następujące zależności:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = \dfrac{E(T_0)}{E(T_0) + \sum\limits_{k=0}^{10} p_{0k} E(T_k)}, P_1 = \dfrac{p_{01} E(T_1)}{E(T_0) + \sum\limits_{k=0}^{10} p_{0k} E(T_k)}, \\ P_2 = \dfrac{p_{02} E(T_2)}{E(T_0) + \sum\limits_{k=0}^{10} p_{0k} E(T_k)}, \\ P_3 = \dfrac{p_{03} E(T_3)}{E(T_0) + \sum\limits_{k=0}^{10} p_{0k} E(T_k)}, \ldots, P_{10} = \dfrac{p_{10} E(T_{10})}{E(T_0) + \sum\limits_{k=0}^{10} p_{0k} E(T_k)} \end{array}\right\} \quad (13)$$

Prawdopodobieństwo P_0 jest granicznym prawdopodobieństwem, że w dłuższym okresie (przedziale czasu) eksploatacji (teoretycznie przy $t \to \infty$) samochód przebywa w stanie s_0. Zatem prawdopodobieństwo to określa współczynnik gotowości technicznej samochodu. Natomiast prawdopodobieństwa $P_j (j = 1, 2,..., 10)$ są prawdopodobieństwami granicznymi istnienia stanów $s_j \in S$ wspomnianego samochodu przy $t \to \infty$, a więc prawdopodobieństwami znajdowania się jego zespołów funkcjonalnych (i tym samym samochodu z uwagi na jego szeregową strukturę niezawodnościową) w stanach niezdatności.

Przykładowa realizacja procesu $\{W(t)\colon t \geq 0\}$, obrazująca pojawianie się w czasie eksploatacji stanów niezawodnościowych samochodu, została przedstawiona na rys. 4.

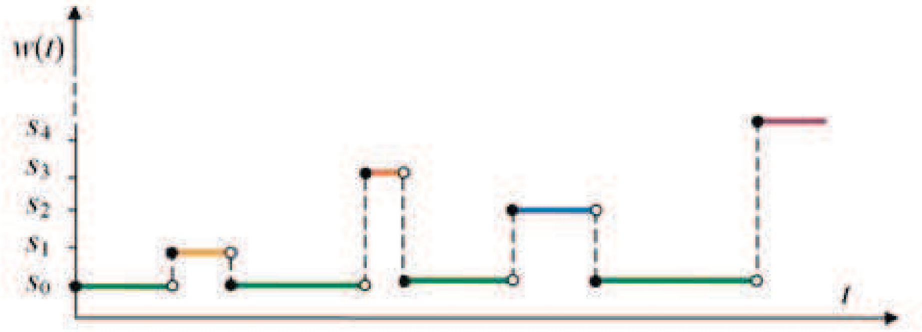
Uzyskanie (oczywiście przybliżonych) wartości prawdopodobieństw $P_j (j = 1, 2, 3, \ldots, 10)$ wymaga oszacowania p_{ij} oraz $\mathrm{E}(T_j)$.

Oszacowanie prawdopodobieństw p_{ij} oraz wartości oczekiwanych $\mathrm{E}(T_j)$ jest możliwe po uzyskaniu realizacji $w(t)$ procesu $\{W(t)\colon t \geq 0\}$ w odpowiednio długim przedziale czasu badań, a więc dla $t \in [0, t_b]$, przy czym czas badań tego procesu: $tb >> 0$. Można wtedy ustalić liczby $n_{ij}(i,j = 0, 1, ..,10; i \neq j)$, przejść procesu $\{W(t)\colon t \geq 0\}$ ze stanu s_i do s_j w odpowiednio długim czasie.

Estymatorem największej wiarygodności prawdopodobieństwa przejścia p_{ij} jest statystyka [4]

$$\hat{P}_{ij} = \frac{N_{ij}}{\sum\limits_j N_{ij}}, \quad i \neq j; \;\; i,j = 0,\ 1,\ ...,10, \tag{14}$$

której wartość $\hat{p}_{ij} = \dfrac{n_{ij}}{\sum\limits_j n_{ij}}$ jest oszacowaniem nieznanego prawdopodobieństwa przejścia p_{ij}.



Rys. 4. Przykładowa realizacja procesu $\{W(t): t \geq 0\}$ samochodu: s_0 – stan zdatności samochodu, s_1 – stan niezdatności silnika z układami zasilania czynnikami energetycznymi, s_2 – stan niezdatności sprzęgła, s_3 – stan niezdatności skrzyni biegów, s_4 – stan niezdatności wału napędowego, s_5 – stan niezdatności mostu napędowego, s_6 – stan niezdatności zespołu kierowniczego z zawieszeniem, s_7 – stan niezdatności zespołu hamulcowego, s_8 – stan niezdatności zespołu urządzeń elektrycznych, s_9 – stan niezdatności nadwozia wraz z podwoziem, s_{10} – stan niezdatności zespołu urządzeń kontrolno-pomiarowych

Ze wspomnianego przebiegu $w(t)$ procesu $W(t)$ można także uzyskać realizacje $t_j^{(m)}$, $m. = 1, 2, ..., n_{ij}$ zmiennych losowych T_j. Zastosowanie estymacji punktowej pozwala na łatwe oszacowanie $E(T_j)$ jako wartości średniej arytmetycznej realizacji $tj(m)$.

Uzyskanie niezbędnych informacji do oszacowania wspomnianych prawdopodobieństw wymaga zastosowania odpowiednich do tego systemów diagnozujących (DGS) samochodów, które w tym przypadku są systemami diagnozowanymi (DNS).

Dla praktyki eksploatacyjnej samochodów istotny jest także jednowymiarowy rozkład procesu $\{W(t): t \geq 0\}$ zmian stanów samochodów, którego elementami są funkcje $P_k(t)$ oznaczające prawdopodobieństwo tego, że w chwili t (dowolnej) proces ten będzie znajdował się w stanie $sk \in S(k = 0, 1, ...,10)$. Ten rozkład chwilowy można obliczyć wykorzystując rozkład początkowy procesu $\{W(t): t \geq 0\}$ oraz funkcje $P_{ij}(t)$ oznaczające prawdopodobieństwa przejścia tego procesu ze stanu si do stanu s_j ($s_i \in S$, $sj \in S$, $i \neq j$; $i, j = 0, 1, ..., 10$). Obliczenie tych prawdopodobieństw przejścia wymaga znajomości funkcji $F_{ij}(t)$, to jest dystrybuant zmiennych losowych T_{ij} ($i \neq j$; $i, j = 0, 1, ..., 10$). Potrzebne są więc odpowiednie badania niezawodnościowe samochodów i tym samym ich zespołów funkcjonalnych.

Przedstawiony opis niezawodnościowy dowolnego samochodu można oczywiście rozwinąć, wyszczególniając tyle stanów pośredniej (częściowej) zdatności ile potrzebnych będzie użytkownikowi danego samochodu do zapewnienia racjonalnej jego eksploatacji.

Ponadto w badaniach niezawodności samochodów istotne znaczenie praktyczne mogą mieć następujące charakterystyki procesów semimarkowskich [1, 2, 4]:

- asymptotyczny rozkład procesu odnowy $\{V_{ij}(t): t \geq 0\}$ generowany przez odstępy czasu powrotu procesu semimarkowskiego (do stanu s_j osiągalnego ze stanu s_i), który przyjmuje w chwili t wartość równą liczbie „wejść" tego procesu do stanu s_j,

- przybliżony rozkład sumarycznego czasu przebywania procesu $W(t)$ w stanie s_j pod warunkiem, że stanem poprzedzającym był stan s_i,
- wartość oczekiwana $E(T_i)$ czasu T_i trwania stanu s_i procesu $W(t)$ niezależnie do jakiego stanu następuje przejście w chwili τ_n+1,
- wariancja $D^2(T_i)$ czasu T_i trwania stanu s_i,
- wartość oczekiwana $E(T_{ij})$ czasu T_{ij} trwania stanu *si* procesu $W(t)$ pod warunkiem, że następnym stanem będzie stan s_j,
- wariancja $D^2(T_{ij})$ czasu T_{ij} trwania i-tego stanu procesu $W(t)$ pod warunkiem, że następnym stanem będzie stan s_j.

3. Uwagi końcowe i wnioski

Procesy semimarkowskie są coraz częściej stosowane przy rozwiązywania różnych problemów, dotyczących niezawodności, obsługi masowej oraz diagnostyki urządzeń, np. samochodów.

Zastosowanie tych procesów w praktyce wymaga spełnienia dwóch następujących warunków:
- zgromadzenia odpowiednich statystyk matematycznych;
- opracowania semimarkowskiego modelu zmian stanów niezawodnościowych urządzenia o niewielkiej liczbie jego stanów i nieskomplikowanej przy tym (w sensie matematycznym) macierzy funkcyjnej.

Warunek drugi jest istotny w przypadku obliczania rozkładu chwilowego $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2, ..., 10$, stanów procesu $\{W(t): t \geq 0\}$ samochodu. Rozkład ten można, jak wiadomo, obliczyć znając rozkład początkowy procesu oraz funkcje $P_{ij}(t)$. Obliczenie prawdopodobieństw $P_{ij}(t)$ polega na rozwiązaniu układu równań Voltery drugiego rodzaju (układ równań typu splotu) [4], w których znanymi wielkościami są funkcje $Q_{ij}(t)$ będące elementami macierzy funkcyjnej $Q(t)$ procesu (7). W przypadku, gdy liczba stanów procesu jest niewielka, zaś macierz funkcyjna tego procesu – nieskomplikowana, to układ ten można rozwiązać operatorowo przez zastosowanie transformacji Laplace'a-Stieltjesa. Natomiast, gdy liczba stanów procesu jest duża albo, jeżeli jego macierz funkcyjna (jądro procesu) jest bardzo złożona, można uzyskać jedynie przybliżone rozwiązanie tego układu równań. Rozwiązanie to (numeryczne) nie daje możliwości ustalenia wartości prawdopodobieństw pojawiania się poszczególnych stanów procesu, gdy t ma dużą wartość (teoretycznie dla $t \rightarrow \infty$). Numeryczne rozwiązanie nie daje więc odpowiedzi na bardzo ważne dla praktyki eksploatacyjnej samochodów pytanie: jak zmieniają się prawdopodobieństwa stanów procesu semimarkowskiego, gdy t jest duże? Z teorii procesów semimarkowskich wynika, że prawdopodobieństwa te, w przypadku ergodycznych procesów semimarkowskich, dążą wraz z upływem czasu do ściśle określonych, stałych liczb. Liczby te nazywane są granicznymi prawdopodobieństwami stanów a ciąg tych liczb tworzy rozkład graniczny procesu. Rozkład ten umożliwia zdefiniowanie współczynnika gotowości technicznej samochodu oraz dochód lub koszt przypadający na jednostkę czasu jego eksploatacji. Wielkości te są funkcjami kryterialnymi przy rozwiązywaniu problemów optymalizacji procesu eksploatacji samochodów. Rozkład ten można znacznie łatwiej obliczyć niż rozkład chwilowy.

Zastosowanie procesu semimarkowskiego (semi-Markowa) jako modelu zmian wymienionych stanów niezawodnościowych samochodu w określonym czasie (w danej chwili), zamiast procesu Markowa wynika stąd, iż należy się spodziewać, że zmienna losowa T_{ij} oznaczająca czas trwania stanu si pod warunkiem, że następnym stanem będzie stan s_j oraz zmienna losowa T_i oznaczająca czas trwania stanu s_i samochodu niezależnie od tego jaki będzie jego stan następny, mają rozkłady dowolne skoncentrowane w zbiorze $R_+ = [0, +\infty)$. Zastosowanie procesu Markowa w tym przypadku byłoby uzasadnione wtedy, gdyby można było przyjąć, że zmienne losowe T_{ij} oraz T_i mają rozkłady wykładnicze.

Przedstawiony model może mieć istotne znaczenie praktyczne ze względu na łatwość określania estymatorów prawdopodobieństw przejścia p_{ij} będących elementami macierzy $\mathbf{P}$ (9) oraz łatwość oszacowywania wartości oczekiwanych $\mathrm{E}(T_j)$. Należy przy tym uwzględnić fakt, że estymacja punktowa wartości oczekiwanej $\mathrm{E}(T_j)$ nie umożliwia określenia dokładności jej oszacowania. Dokładność taką umożliwia estymacja przedziałowa, w której wyznaczany jest przedział ufności $[t_{dj}, t_{gj}]$ o losowych końcach, który z określonym prawdopodobieństwem (poziomem ufności) β zawiera nieznaną wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(T_j)$.

Literatura

[1] GIRTLER J.: *Sterowanie procesem eksploatacji okrętowych silników spalinowych na podstawie diagnostycznego modelu decyzyjnego.* Zeszyty Naukowe AMW, nr 100A, Gdynia 1989.

[2] GIRTLER J.: *Możliwości zastosowania i przydatność procesów semimarkowskich jako modeli procesów eksploatacji maszyn. Zagadnienia Eksploatacji Maszyn,* Warszawa 1996, z.3(107) s. 419-428.

[3] GIRTLER J.: *Reliability model of two-shaft turbine combustion engine with heat regenerator.* Journal of KONES Powertrain and Transport, Vol. 132, No. 4, 2006, pp.15-22.

[4] GRABSKI F.: *Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych*. Zeszyty Naukowe AMW, nr 75A, Gdynia 1982.

[5] GIRTLER J.: *Statistic and probabilistic measures of diagnosis likelihood on the state of self-ignition combustion engines.* Journal of Polish CIMAC, Diagnosis, Reliability and Safety, Vol. 2 No. 2(2007) pp. 57-63.

[6] TRZECIAK K.: *Diagnostyka samochodów osobowych.* WKiŁ, Warszawa 1991.

[7] GIRTLER J.: *Physical aspects of application and usefulness of semi-Markov processes for modeling the processes occurring in operational phase of technical objects.* Polish Maritime Research, Vol. 11, No 3, September 2004.

[8] KOROLUK V.S., TURBIN A.F.: *Semi-Markov Processes and Their Application*. Naukova Dumka, kiev 1976.

[9] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability*. Boston, Birkhauser 2001.

[10] PYKE R.: *Markov reneval processes with finitely many states.* Ann. Math. Statist. 1961, 32, nr 4, p. 1243-1259.

[11] СИЛЬВЕСТРОВ Д. С.: Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. Издательство „Советское Радио". Москва, 1980.