

# Przepusty

## w infrastrukturze komunikacyjnej – cz. 10



■ **prof. UZ dr hab. inż. Adam Wysokowski**, kierownik Zakładu Dróg i Mostów, Uniwersytet Zielonogórski

■ **mgr inż. Jerzy Howis**, konstruktor, Infrastruktura Komunikacyjna Sp. z o.o., Żmigród

Jak już wspomniano w poprzednich artykułach dotyczących tematyki obliczeń przedmiotowych obiektów, większość obecnie wykonywanych przepustów to konstrukcje podatne, w pełni współpracujące z ośrodkiem gruntowym. Szybki rozwój technologii numerycznych oraz coraz lepsze poznanie istoty zachowania się tych konstrukcji, a także badania prowadzone w skali rzeczywistej pozwalają obecnie odpowiednio zamodelować i wykonać obliczenia obiektów. Uzyskiwane w ten sposób rezultaty obliczeń są bardziej zbliżone do rzeczywistości.

### 1. Wprowadzenie

Zakres niniejszego artykułu dotyczy coraz szerzej stosowanej, najnowszej metody obliczeniowej, bazującej na metodzie elementów skończonych (MES).

Dla przypomnienia oraz dla nowych czytelników poniżej przytoczono spis wszystkich artykułów na temat przepustów, które sukcesywnie od prawie dwóch lat ukazują się w kolejnych numerach „Nowoczesnego Budownictwa Inżynierskiego” [15]:

1. ARTYKUŁ WPROWADZAJĄCY
2. ASPEKTY PRAWNE PROJEKTOWANIA, BUDOWY I UTRZYMANIA PRZEPUSTÓW
3. PRZEPUSTY TRADYCYJNE
4. PRZEPUSTY NOWOCZESNE
5. PRZEPUSTY JAKO PRZEJŚCIA DLA ZWIERZĄT
6. MATERIAŁY DO BUDOWY PRZEPUSTÓW – CZ. I, CZ. II
7. METODY OBLICZEŃ KONSTRUKCJI PRZEPUSTÓW – CZ. I. OGÓLNE ZASADY OBLICZEŃ
8. METODY OBLICZEŃ KONSTRUKCJI PRZEPUSTÓW – CZ. II. TRADYCYJNE METODY OBLICZEŃ
9. METODY OBLICZEŃ KONSTRUKCJI PRZEPUSTÓW – CZ. III. NOWE METODY OBLICZEŃ

### 2. Istota metody elementów skończonych (MES) i krótka jej historia w praktyce inżynierskiej

Istotą, a zarazem zasadniczą różnicą metody elementów skończonych od stosowanych metod analitycznych projektowania konstrukcji jest to, że pozwala ona na zbudowanie bliższego rzeczywistości modelu obiektu.

Dzięki temu zjawiska zachodzące w analizowanych ośrodkach zamodelowane są w sposób odzwierciedlający rzeczywisty rozkład naprężeń. Dlatego też metoda elementów skończonych, zwana MES, jest jedną z najszerzej stosowanych nowych metod do rozwiązywania zagadnień inżynierskich. W związku z tym została dogłębnie opisana w literaturze, w książkach technicznych i podręcznikach akademickich.

Pierwsze wzmianki o tej metodzie znajdują się w publikacji niemieckiego matematyka Richarda Couranta *Methoden der mathematischen Physik* z 1924 r. Za drugiego prekursora tej metody uważa się M.J. Tunera, który w 1956 r. opublikował obszerną pracę poświęconą metodzie elementów skończonych.

Momentem przełomowym we wprowadzaniu tego sposobu obliczeń były lata 60. XX w. Stało się to za sprawą prof. Janusza S. Przemienieckiego i prof. Olgierda Zienkiewicza, którzy dostrzegli potencjał tej metody w rozwiązywaniu problemów wykraczających poza tradycyjną sferę mechaniki konstrukcji.

Profesor Zienkiewicz wraz ze swoim zespołem włożył wielki wkład w rozwinięcie i opracowanie MES, która dzięki jego badaniam i osiągnięciom znajduje dzisiaj szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach mechaniki i inżynierii.

Bardzo szybki rozwój MES nastąpił wraz z rozwojem komputeryzacji. Pierwszym, stworzonym przez Katonę i Smith'a w 1976 r. programem wykorzystywanym do przeprowadzania tego typu analiz było oprogramowanie CANDE (*Culvert Analysis and Design Program*) [3].

Początkowo obliczenia przeprowadzane za pomocą metody elementów skończonych dotyczyły obiektów o bardzo prostych geometriach (najczęściej modelowanych jako jednowymiarowe) i stałych własnościach materiałowych oraz zjawisk opisanych liniowymi równaniami różniczkowymi. Od lat 70. metodę zaczęto stopniowo stosować do rozwiązywania problemów nieliniowych, ale dalej dla obiektów o stosunkowo prostych geometriach, modelowanych jako 1D lub 2D. Gwałtowny rozwój techniki komputerowej w latach 80., związany z coraz większą mocą obliczeniową komputerów oraz możliwością operowania i przechowywania bardzo dużych zbiorów informacji, ułatwił zastosowanie metody elementów skończonych do obliczeń problemów nieliniowych dla obiektów o dowolnie złożonych geometriach, szczególnie 3D [4]. Obecnie wykorzystywanymi programami do analizy konstrukcji podatnych, opartymi na MES, są m.in.: Robot, CandeCad, COSMOS, SPIDA, NLSSIP, ABAQUS, PLAXIS czy Z-SOIL.

Uniwersalność metody polega na łatwości schematyzacji różnych obszarów o skomplikowanej geometrii, także niejednorodnych i anizotropowych, co kwalifikuje ją jako dobre narzędzie do modelowania problemów fizycznych.

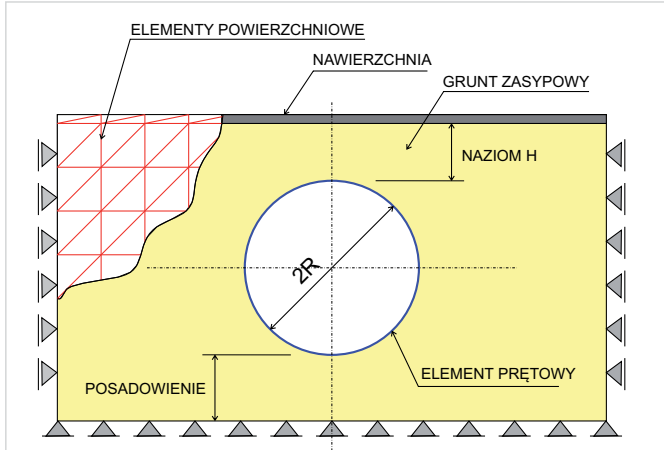
W przypadku gruntowo-powłokowych konstrukcji przepustów i przejść dla zwierząt zaletami metody MES może być uwzględnianie specyficznych cech tych konstrukcji, takich jak: nieliniowe właściwości gruntu, indywidualna geometria konstrukcji, zmienne obciążenia, etapowy charakter budowy.

### 3. Ogólne zasady obliczeń MES w zastosowaniu do konstrukcji przepustów

Rzeczywisty rozwój metod komputerowej analizy konstrukcji, opartej na metodzie elementów skończonych MES, został wdrożony w ostatnich latach również do obliczeń konstrukcji gruntowo-powłokowych przepustów, a ostatnio także do przejść dla zwierząt.

Obiekty gruntowo-powłokowe jako konstrukcje podatne mają złożony charakter pracy, co dodatkowo komplikuje zagadnienia obliczeniowe. Z tego względu najczęściej projektowany obiekt sprowadza się do zagadnienia dwuwymiarowego (2D), opierając się na założeniach płaskiego stanu odkształcenia.

Na rycinie 1 przedstawiono przykładowy, dwuwymiarowy model MES konstrukcji gruntowo-powłokowej [8].



Ryc. 1. Przykładowy, podstawowy model konstrukcji przepustu wykorzystywany do obliczeń MES [8]

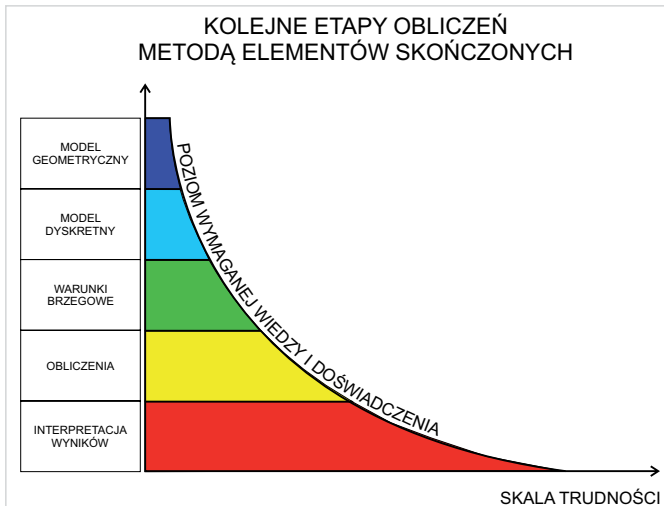
**3.1. Dane wejściowe do obliczeń MES**

Jednym z najbardziej pracochłonnych etapów w trakcie analizy obiektu współpracującego z gruntem jest modelowanie strefy kontaktu pomiędzy rurą a zasypką. Do tego celu stosowane są specjalne elementy MES o złożonych parametrach fizycznych.

Parametry te uwzględniają najważniejsze właściwości, by wymienić chociażby moduł ścinania czy ścisłość gruntu o nieliniowych zależnościach pomiędzy obciążeniami i przemieszczeniami. Warstwy kontaktowe powstające na styku dwóch ośrodków, nazywane potocznie *interface*, dostosowane są do określonych warunków, a więc właściwości ośrodka gruntowego (np. wilgotność, kohezja), sztywności ścianek przepustu, stanu powierzchni styku, a także czasu trwania obciążeń zmiennych [8].

Posiadając wymieniony zakres danych i charakterystyk materiałów wprowadzanych do programu obliczeniowego, możemy uzyskać wyniki, których poprawność można jedynie zweryfikować przez badania na modelach rzeczywistych w skali naturalnej [8].

Skalę trudności procedury obliczeniowej konstrukcji gruntowo-powłokowych za pomocą metody elementów skończonych graficznie przedstawia wykres zamieszczony na rycinie 2 [11].



Ryc. 2. Skala trudności procedury obliczeniowej konstrukcji gruntowo-powłokowych za pomocą MES [11]

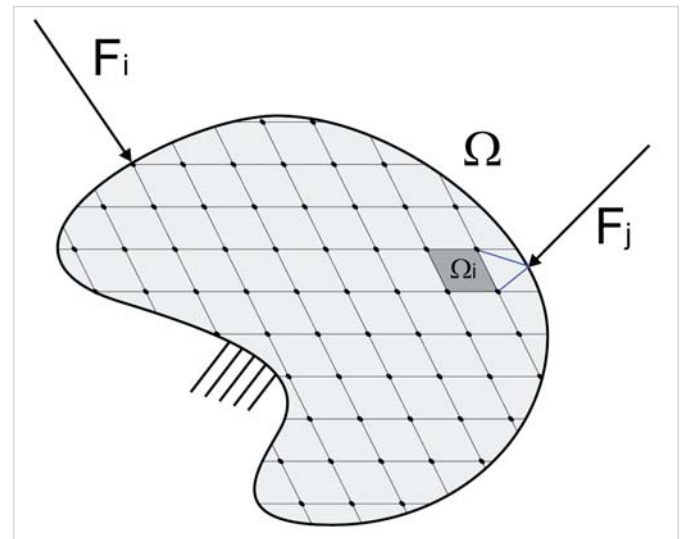
**3.2. Procedura obliczeniowa MES**

Metoda elementów skończonych wykorzystywana jest do analizy różnego rodzaju ośrodków ciągłych, przy jednoczesnej dyskretyzacji ich na elementy o prostych kształtach połączonych ze sobą w węzły.

Dyskretyzacji dokonujemy, począwszy od podziału rozważanego obszaru na podobszary (elementy). Wewnątrz elementów określamy funkcje bazowe, zapewniające ciągłość poszukiwanej funkcji (będącej rozwiązaniem zadania) na granicy elementów. Stosowane funkcje bazowe są najczęściej wielomianami, natomiast elementy prostymi bryłami (czworościany, sześciiany) przy dyskretyzacji przestrzeni lub prostymi figurami (trójkąty, czworokąty) przy dyskretyzacji powierzchni.

Przemieszczenia węzłów opisywane są za pomocą układu równań różniczkowych (w zagadnieniach dynamicznych) lub algebraicznych (w przypadku warunków statycznych). Wybrane wielkości węzłowe opisuje się dla wnętrza elementów przy pomocy funkcji interpolujących, dobranych tak, aby zachować ciągłość na granicach poszczególnych elementów.

Postępowanie numeryczne sprowadza się zatem do rozwiązania odpowiedniego układu równań utworzonych dla przyjętej sieci elementów skończonych (ryc. 3), a następnie wykorzystaniu funkcji interpolujących dla uzyskania poszukiwanych parametrów wewnątrz elementów [3].



Ryc. 3. Przykładowa sieć elementów skończonych [3]

Procedury metody polegają na przedstawieniu układu ciągłego za pomocą idealizacji dyskretniej. Model dyskretny jest modelem fizycznym, dla którego wystarczy podać skończoną liczbę współrzędnych, uogólnionych w celu jednoznacznego określenia jego położenia w przestrzeni, czyli układ o skończonej liczbie stopni swobody. Bardzo ważnym zagadnieniem jest przejście z modelu fizycznego do dyskretnego tak, aby model dyskretny w sposób dokładny odzwierciedlał procesy zachodzące w modelu fizycznym [7].

Poszukiwaną wielkość fizyczną opisaną za pomocą funkcji ciągłej w rozpatrywanym obszarze modelu fizycznego aproksymuje się modelem dyskretnym, składającym się z określonej liczby elementów opisanych funkcją ciągłą, zapisaną za pomocą wzoru:

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i$$

Przejście z modelu fizycznego na model dyskretny przebiega etapowo [3]:

1. W pierwszym etapie następuje podział wnętrza i brzegu obszaru rozwiązania na skończoną liczbę podobszarów, zwanych elementami skończonymi. Jest to tzw. proces idealizacji geometrii układu. Na tym etapie upraszcza się kształt rozważanego obszaru.

2. Kolejnym krokiem jest analiza poszczególnych elementów, na podstawie której uzyskuje się związek między oddziaływaniami w węzłach a parametrami tych węzłów. W wyniku tego procesu tworzy się macierz, zwana macierzą sztywności elementu skończonego, której składnikami są oddziaływania w węzłach od parametrów jednostkowych kolejnych węzłów.

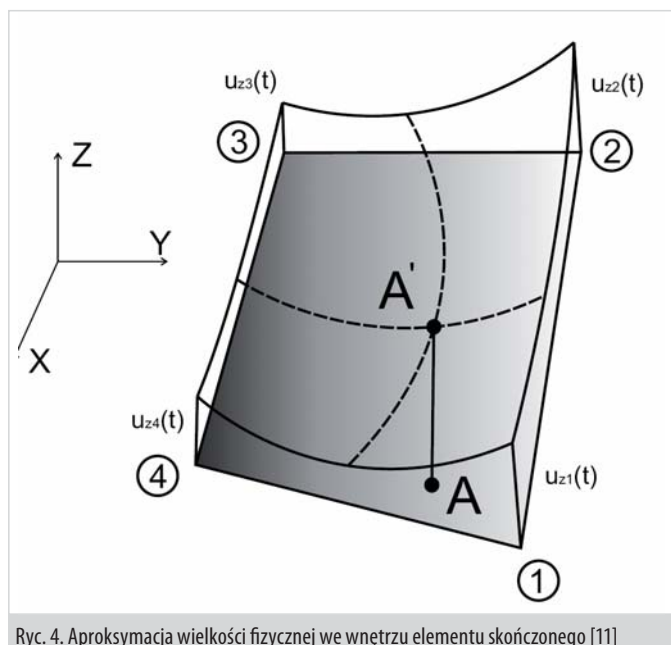
3. Następnym etapem jest dobór odpowiednich funkcji aproksymujących, określonych w węzłach wielkości fizycznych, w taki sposób, aby zachować dobrą ciągłość pomiędzy poszczególnymi funkcjami na brzegach elementu.

W przypadku, gdy w elemencie skończonym poszukiwana jest tylko jedna wielkość fizyczna, np. przemieszczenie w kierunku osi „z”  $u_z(x, y, z, t)$ , to określa się ją poprzez wielkości węzłowe przedstawione na rycinie 4 [11] za pomocą związku [7]:

$$u_{zA}(t) = \sum_{n=1}^{IE} N_n(x, y, z) u_{zn}(t)$$

gdzie:

- $N_n(x, y, z)$  – funkcje kształtu danego elementu
- $u_{zn}(t)$  – poszukiwana wielkość węzłowa, np. przemieszczenie
- IE – liczba węzłów w elemencie skończonym.



Ryc. 4. Aproksymacja wielkości fizycznej we wnętrzu elementu skończonego [11]

Aby uzyskać odpowiednią dokładność w metodzie elementów skończonych, przyjmując funkcję kształtu, należy dążyć do spełnienia następujących warunków:

- funkcje opisujące pole funkcji rozwiązującej powinny gwarantować ich ciągłość wewnątrz elementu oraz zgodność na granicy podziału w elementach sąsiednich;
- funkcje muszą zapewniać możliwość realizacji stałej wartości funkcji rozwiązującej wewnątrz elementu, co uwzględnia

fakt, że wraz ze zmniejszeniem się wymiarów elementu wartość funkcji rozwiązującej zmierza do pewnej stałej wartości.

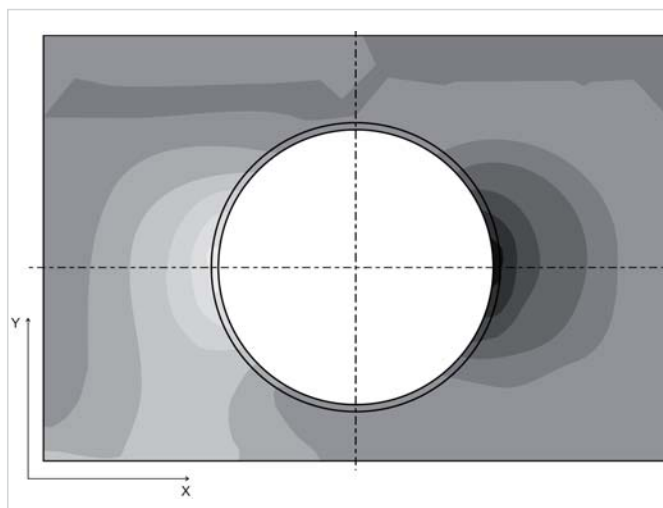
Spełnienie powyższych warunków zapewnia zbieżność poszukiwanego rozwiązania do rozwiązania dokładnego w miarę zwiększenia liczby elementów przy jednoczesnym zmniejszaniu ich objętości. Właściwy dobór funkcji kształtu jest zagadnieniem o podstawowym znaczeniu w analizie elementu.

### 3.3. Sposób przedstawiania wyników obliczeń MES

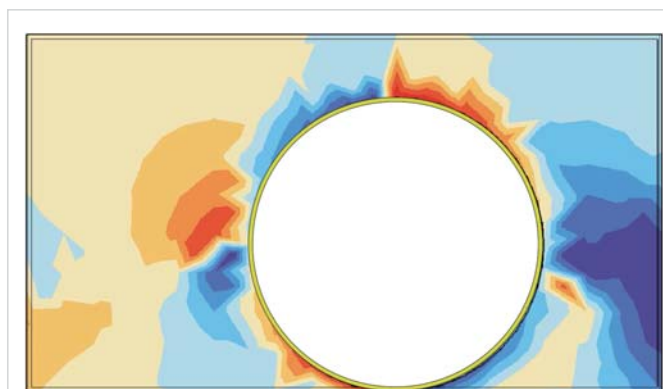
W ciągu lat stosowania metody elementów skończonych w obliczeniach dopracowano się w miarę ujednoczonego sposobu przedstawiania wyników obliczeń z użyciem MES. Więcej informacji na ten temat można znaleźć w szerokiej, dostępnej literaturze przedmiotu.

Podobnie dotyczy to przedstawiania wyników dla konstrukcji przepustów. Do najpopularniejszego graficznego sposobu przedstawiania obliczeń MES należy przedstawianie w postaci map wyników przemieszczeń i naprężeń.

W celu zilustrowania sposobu przedstawiania wyników obliczeń na rycinach 5, 6 i 7 pokazano ogólne przyjęte zasady przedstawiania przedmiotowych wyników w postaci map.

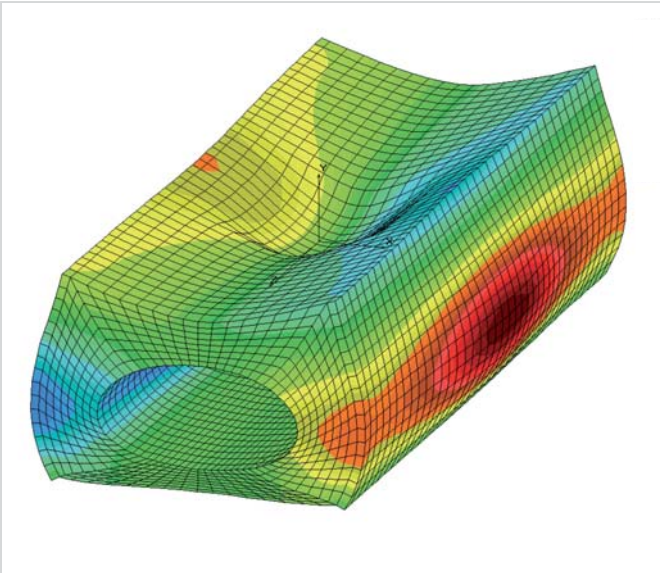


Ryc. 5. Przykładowa mapa przemieszczeń poziomych modelowej konstrukcji przepustu z ośrodkiem gruntowym, oprac. autorów



Ryc. 6. Przykładowa mapa naprężeń w strefie kontaktu konstrukcji rury osłonowej a ośrodkiem gruntowym, oprac. autorów

Inne przykłady form graficznych przedstawiania wyników obliczeń w metodzie elementów skończonych czytelnicy będą mogli znaleźć w kolejnym artykule w tej serii związanym z przykładami obliczeń.



Ryc. 7. Przykładowa deformacja modelu 3D konstrukcji gruntowo-powłokowej [7]

#### 4. Podsumowanie

Przedstawiona krótko w niniejszym artykule metoda elementów skończonych – z uwagi na szczupłość jego ramy – umożliwiła uwzględnienie szerokiej gamy istotnych parametrów, których nie ma możliwości wziąć pod uwagę w innych metodach, np. analitycznych. Z tego względu lepiej odwzorowuje ona rzeczywistość, co zostało potwierdzone wynikami przeprowadzonych wielu badań pod kierunkiem autora dla tego typu obiektów w skali naturalnej.

Z uwagi na powyższe, metoda MES będzie, zdaniem autorów, coraz szerzej stosowana w przypadku obliczeń konstrukcji przepustów, szczególnie projektowanych jako konstrukcje podatne, pomimo pewnych trudności i pracochłonności w jej zastosowaniu. Przyczyni się z pewnością do tego doskonalenie warsztatu obliczeniowego, jak też sukcesywne unowocześnianie sprzętu komputerowego.

Podobnie jak w przypadku przedstawionych wcześniej metod obliczeń w poprzednich artykułach, ich całościowe podsumowanie autorzy planują – tak jak już wspomniano – zamieścić po całościowym przedstawieniu tytułowego zagadnienia, czyli na zakończenie części V.

TRADYCYJNIE ZAPRASZAMY DO ZAPOZNANIA SIĘ Z NASTĘPNYM ARTYKUŁEM, KTÓRY ZOSTANIE ZAMIESZCZONY W KOLEJNYM NUMERZE „NOWOCZESNEGO BUDOWNICTWA INŻYNIERYJNEGO” I BĘDZIE STANOWIŁ KONTYNUACJĘ TEMATYKI PODJĘTEJ W NINIEJSZYM ARTYKULE.

ZAWIERAŁ ON BĘDZIE – JAK JUŻ WCZEŚNIEJ ZAPOWIEDZIANO – PRZYKŁADY OBLICZEŃ KONSTRUKCJI PRZEPUSTÓW Z WYKORZYSTANIEM PRZEDSTAWIONYCH W POPRZEDNICH ARTYKUŁACH METOD.

#### Literatura

1. Bąk R., Burczyński T.: *Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego*. Warszawa 2001.
2. Bęben D., Mańko Z.: *Problemy projektowe i wykonawcze związane z gruntowo-stalowymi obiektami mostowymi*. „Geoinżynieria. Drogi, Mosty, Tunele” 2009, nr 1.
3. Frydrychowska K., Kozińska K.: *Metody wzmacniania przepustów komunikacyjnych*. Praca magisterska w specjalności drogowo-mostowej wykonana pod kierunkiem prof. UZ

- A. Wysokowskiego. Uniwersytet Zielonogórski. Zielona Góra 2009.
4. Gierszewska M.: *Metoda elementu skończonego. Wprowadzenie*. Materiały dydaktyczne Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie. Kraków 2005.
5. Janusz L., Madaj A.: *Obiekty inżynierskie z blach falistych. Projektowanie i wykonawstwo*. Wrocław 2007.
6. *Katalog konstrukcji przepustów i przejść dla zwierząt w infrastrukturze komunikacyjnej firmy Hobas*. Raport nr R/01708/W. Infrastruktura Komunikacyjna Sp. z o.o. Żmigród, czerwiec 2008.
7. Kunecki B.: *Zachowanie się ortotropowych powłok walcowych w ośrodku gruntowym pod statycznym i dynamicznym obciążeniem zewnętrznym*. Rozprawa doktorska, Instytut Budownictwa, Politechnika Wrocławska, Raport serii PRE nr 14/2006. Wrocław 2006.
8. Machelski C.: *Modelowanie mostowych konstrukcji gruntowo-powłokowych*. Wrocław 2008.
9. Rakowski G.: *Metoda elementów skończonych. Wybrane problemy*. Warszawa 2006.
10. Rowińska W., Wysokowski A., Pryga A.: *Zalecenia projektowe i technologiczne dla podatnych konstrukcji inżynierskich z blach falistych*. GDDKiA – IBDiM. Żmigród 2004.
11. Rusiński E., Czmochocki J., Smolnicki T.: *Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych*. Wrocław 2000.
12. PN-EN 1997-1:2008 Eurokod 7: *Projektowanie geotechniczne. Część 1: Zasady ogólne*.
13. Sawicki W.: *Wyznaczenie sił wewnętrznych w stalowej konstrukcji podatnej nowoczesnego przepustu z blach falistych*. Praca magisterska w specjalności drogowo-mostowej wykonana pod kierunkiem prof. UZ A. Wysokowskiego. Uniwersytet Zielonogórski. Zielona Góra 2006.
14. Vaslestad J.: *Soil Structure Interaction of Buried Culverts*. Rozprawa doktorska, Institutt for Geoteknikk, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet. Trondheim 1990.
15. Wysokowski A., Howis J.: *Przepusty w infrastrukturze komunikacyjnej – cz. I. Artykuł wprowadzający*. „Nowoczesne Budownictwo Inżynierskie” 2008, nr 2 (17), s. 52–56; cz. 2. *Aspekty prawne projektowania, budowy i utrzymania przepustów*, nr 3 (18), s. 68–73; cz. 3. *Przepusty tradycyjne*, nr 4 (19), s. 54–59; cz. 4. *Przepusty nowoczesne*, nr 5 (21), s. 84–88; cz. 5. *Przepusty jako przejścia dla zwierząt*, 2009, nr 1 (22), s. 70–75; cz. 6. *Materiały do budowy przepustów – cz. I*, nr 3 (24), s. 99–104; cz. II, nr 5 (26), s. 36–43; cz. 7. *Metody obliczeń konstrukcji przepustów – cz. I. Ogólne zasady obliczeń*, 2010, nr 2 (29), s. 88–95; cz. II *Tradycyjne metody obliczeń*, 2010 nr 3 (30), s. 96–103; cz. III *Nowe metody obliczeń*, 2010, nr 5 (32), s. 72–81.
16. Zagrajek T., Krzesiński G., Marek P.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji, ćwiczenia z wykorzystaniem ANSYS*. Warszawa 2005.

AUTORZY WYRAŻAJĄ SERDECZNE PODZIĘKOWANIE PANI MGR INŻ. DANUCIE DĄBSKIEJ ZA POMOC PRZY PISANIU NINIEJSZEGO ARTYKUŁU.

