

Dr inż. Mirosław Bukowski  
Politechnika Warszawska

# WPŁYW PODKŁADEK WIBROIZOLACYJNYCH W PODKŁADACH BETONOWYCH NA WZAJEMNE ODDZIAŁYWANIE POJAZDU, NAWIERZCHNI I PODTORZA

## SPIS TREŚCI

1. Wstęp
2. Obciążenia i ugięcia dynamiczne nawierzchni od kół pojazdu
3. Skutki oddziaływań dynamicznych w podtorzu
4. Wnioski

## STRESZCZENIE

Artykuł dotyczy oceny składowej dynamicznej oddziaływania w styku koło – szyna, wynikającego z niejednorodnej sztywności pionowej nawierzchni. Składowa ta występuje najczęściej w układzie koło – nawierzchnia, a do jej identyfikacji opracowano metodę oceny częstotliwości własnej drgań nawierzchni z podtorzem. W artykule wykazano, że amplituda oddziaływań dynamicznych zależy od sztywności pionowej nawierzchni. Z tego względu zmniejszenie sztywności nawierzchni na podkładach betonowych przez zastosowanie specjalnych podkładek sprężystych na ich spodzie jest pożądanym, gdyż zwiększa to trwałość nawierzchni.

## 1. WSTĘP

Badania doświadczalne sztywności pionowej podłoża szynowego na podkładach [2, 5, 12, 13] wykazują jej oscylacje wokół wartości średniej. Wahania sztywności podłoża szynowego mają wpływ na redystrybucję obciążeń przekazywanych z szyny na podkłady, zarówno dla stanów statycznych jak i dynamicznych. Jeżeli  $U_i$  oznacza sztywność podłoża szynowego na  $i$ -tym podkładzie, to różnica sztywności wynosi:

$$\Delta U_i = |U_i - U_{i-1}|, \quad (1)$$

a druga różnica:

$$\Delta^2 U_i = |U_{i+1} - 2U_i + 2U_{i-1}|. \quad (2)$$

Amplitudy różnic oraz drugich różnic określono w układzie względnym:

$$V_r = \frac{\overline{\Delta U_i} + 2\delta(\Delta U_i)}{\bar{U}}, \quad (3a)$$

$$V_r^{(2)} = \frac{\overline{\Delta^2 U_i} + 2\delta(\Delta^2 U_i)}{\bar{U}}, \quad (3b)$$

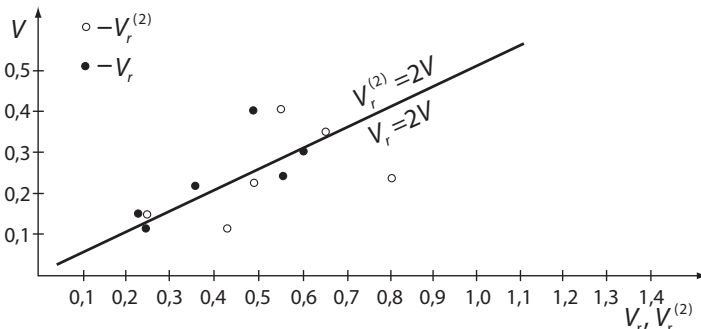
gdzie:

$\overline{\Delta U_i}, \overline{\Delta^2 U_i}$  – średnia wartość odpowiednio pierwszych i drugich różnic,  
 $\delta(\Delta U_i), \delta(\Delta^2 U_i)$  – odchylenie standardowe odpowiednio pierwszych i drugich różnic,  
 $\bar{U}$  – średnia wartość sztywności podłoża szynowego.

Amplitudy różnic sztywności skorelowano ze współczynnikiem zmienności sztywności podłoża szynowego

$$V = \frac{\delta U}{\bar{U}}. \quad (4)$$

W celu ustalenia zależności empirycznej pomiędzy  $V, V_r$  i  $V_r^{(2)}$  wykorzystano wyniki badań Wasiułyńskiego [13] i Friszmana [5]. Uzyskaną zależność ilustruje rysunek 1.

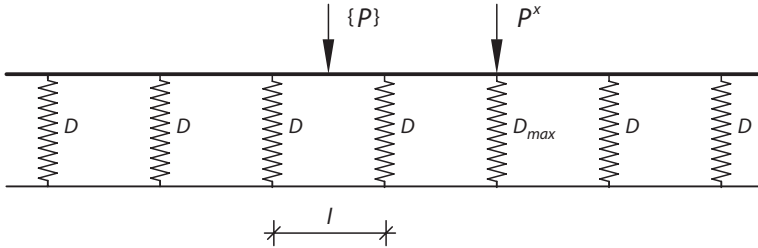


Rys. 1. Zależność współczynnika zmienności sztywności podparcia  $U$  od względnej amplitudy różnic i drugich różnic sztywności  $U$  na sąsiednich podkładach

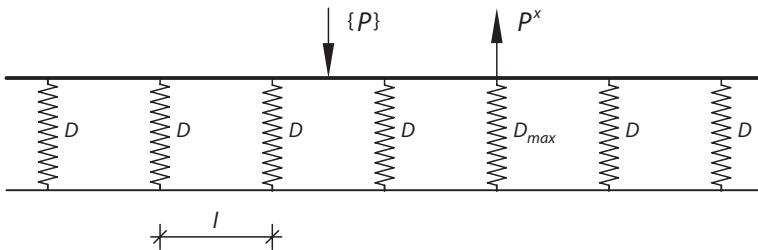
Uzyskane dane potwierdzają zależność

$$V_r = V_r^{(2)} \approx 2V. \quad (4a)$$

Graniczną wartość  $V$  dla nawierzchni obciążonych taborem towarowym przyjmuje się około 0,30 [4]. Z zależności (4a) wynika, że względna sztywność podłoża na podkładach sąsiednich odchyła się od średniej nie więcej niż o  $V$ . Statyczne obciążenia podkładów przy niejednorodnej sztywności podłoża  $U$  można określić na podstawie schematu obliczeniowego szyny opartej na ciągłym, jednorodnym podłożu Winklera. Na rysunkach 2 i 3 podano ideowe schematy obliczenia szyny opartej punktowo na podłożach niejednorodnych.



Rys. 2. Szyna oparta na podporach; na jednej podporze sztywność jest mniejsza od średniej



Rys. 3. Szyna oparta na podporach; na jednej podporze sztywność jest większa od średniej

Dopełniające obciążenia  $P^x$  przyjmują wartości (– przy  $D_{min}$ , + przy  $D_{max}$ ):

$$P^x = \frac{\Delta D y}{1 \mp \frac{\Delta D}{2UL}}, \quad (5)$$

gdzie:

$$D = D_{min} + \Delta D \text{ lub } D = D_{max} - \Delta D,$$

$D$  – punktowa, średnia sztywność podłoża szynowego równa  $Ul$ ,  $l$  – według rysunków 2 i 3,

$y$  – ugięcie na podporze o sztywności  $D_{min}$  lub  $D_{max}$  od zbioru sił  $\{P\}$  przy jednorodnym, ciągłym podłożu,

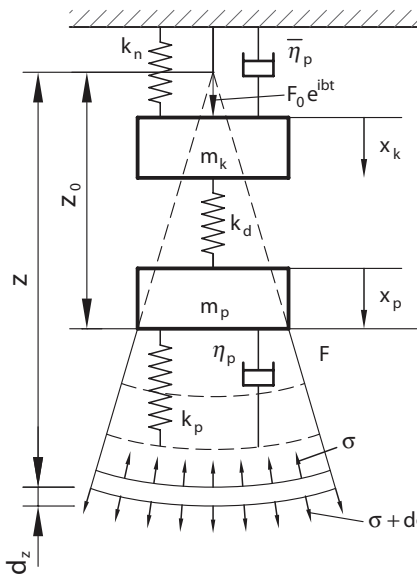
$L$  – względna sztywność szyny według Winklera.

Obliczenia potwierdziły, że względne zróżnicowanie sztywności podkładów w stosunku do średniej wywołuje analogiczne zróżnicowanie obciążeń podłoża szynowego,

zgodne z modelem ciągłego, jednorodnego podłoża Winklera. Atestację metody pogłę-  
biono obliczeniami porównawczymi MES, uzyskując zgodność wyników. Na tej podstawie  
można oszacować amplitudę wymuszenia kinematycznego zestawu kołowego. W ana-  
lizie dynamicznej nawiązano do historycznej interpretacji modelu Winklera w kolejnic-  
twie według Wasiułyńskiego [13]. Podłoże szynowe traktuje się jako winklerowskie,  
natomiast podłoże podkładów jako półprzestrzeń gruntową.

## 2. OBCIĄŻENIA I UGIĘCIA DYNAMICZNE NAWIERZCHNI OD KÓŁ POJAZDU

Uwzględniając historyczną interpretację modelu Winklera, do obliczeń parametrów  
dynamicznych nawierzchni przyjęto model Ehlersa [2] stosowany w fundamentowaniu  
maszyn. Przyjęty w obliczeniach schemat podano na rysunku 4. Masę połowy zestawu  
kołowego  $m_k$  oraz sztywność  $\bar{k}_n$  i tłumienie nadwozia  $\bar{\eta}_p$  obliczono według zasady  
Rayleigha [2].



Rys. 4. Model do obliczeń parametrów dynamicznych toru:  
 $\bar{k}_n, \eta_n$  – sztywność i tłumienie nadwozia,  $m_k$  – masa  
zestawu i szyny,  $k_d$  – sztywność przekładki i podkładu,  
 $m_p$  – masa połowy podkładu,  $k_p, \eta_p$  – zastępcza  
sztywność i tłumienie podłoża podkładu

Przykładowo, składową masy  $m_k$  wynikającą z masy zestawu  $\bar{m}_z$  określono na pod-  
stawie równości energii kinetycznej masy i jednostkowej masy  $\bar{m}$  przęsla toru odpow-  
iadającej odległości miejsc zerowych ugięcia belki Winklera:

$$0,5m_z y_{t\max}^2 = \int_0^d \bar{m} y_t^2 dx, \quad (6)$$

a więc:  $\bar{m} = m_z / 1,5L$ ,

gdzie:

$m_z$  – masa połowy zestawu kołowego,

$y_t = y \sin \omega t$ ,  $\omega$  – częstość drgań własnych tłumionych,

$d = 3/4 \pi L$ ,  $L$  – względna sztywność szyny według Winklera.

Całkowita masa:

$$m_k = \left( \frac{m_z}{1,5L} + m_s \right) l, \quad (7)$$

gdzie:  $m_s$  masa jednostkowa szyny,  $l$  – rozstaw osiowy podkładów.

Parametry  $\bar{k}_n$ ,  $\bar{\eta}_n$  określono w analogiczny sposób, wykorzystując odpowiednio energię potencjalną i tłumienie dla zawieszenia wagonu. W dalszej analizie założono, że masa  $m_k$  jest obciążona harmoniczną siłą o amplitudzie  $F_0$ . Równania równowagi modelu dyskretnego (rys. 4) można zapisać następująco:

$$x_p'' m_p + x_p' \eta_p + x_p (k_p + k_d) - x_p k_d = 0,$$

$$x_k'' m_k + x_k' \bar{\eta}_n + x_k (k_d + \bar{k}_n) - x_p k_d = F_0 e^{ibt}, \quad (8)$$

gdzie: „prim” oznacza rząd pochodnej względem czasu.

Rozwiązania równań (szczególne) przyjęto

$$x_k = A_k e^{ibt}, \quad x_p = A_p e^{ibt}.$$

Względna amplituda masy  $m_k$  wynosi

$$\bar{A}_k = J_m(\bar{A}_k) = k_z \sqrt{\frac{E_1^2 + F_1^2}{A_1^2 + B_1^2}}, \quad (9)$$

gdzie:

$$k_z = \frac{\bar{k}_n (k_p + k_d) + k_p k_d}{k_p + k_d},$$

$$A_1 = k_p (k_d + \bar{k}_n) + k_d \bar{k}_n + b^2 \left[ -m_p (\bar{k}_n + k_d) - \bar{\eta}_n \eta_p - m_k (k_p + k_d) \right] + b^2 m_p m_k,$$

$$B_1 = b \left[ \eta_p (k_d + \bar{k}_n - b^2 m_k) + \bar{\eta}_n (-b^2 m_p + k_p + k_d) \right],$$

$$E_1 = k_p + k_d - b^2 m_p,$$

$$F_1 = b \eta_p.$$

Podstawową częstotliwość własną układu  $f$  obliczono z warunku maksimum amplitudy  $\bar{A}_k$ . Wartość względnego tłumienia  $\chi_t$  w modelu (rys. 4) określono z równości względnych amplitud  $\bar{A}_k$  i układu jednomasowego (koło oparte na szynie) w strefie rezonansu. Ten warunek można zapisać następująco:

$$\bar{A}_{k\max} = \frac{1}{2\chi_t\sqrt{1-\chi_t^2}}, \quad (10)$$

gdzie:  $\chi_t$  jest względnym tłumieniem mas  $m_z + m_t$ ,  $m_t$  – masa zastępcza nawierzchni z podtorzem.

Rozwiązując równanie (10) względem  $\chi_t$ , uzyskuje się:

$$\chi_t = 0,70 \sqrt{1 \pm \frac{1}{A_{k\max}} \sqrt{\bar{A}_{k\max} - 1}}. \quad (11)$$

Miarodajna jest wartość mniejsza z obliczonych.

Następnym krokiem jest obliczenie masy:

$$m_z + m_t = \frac{(k_o + k_n)(1 - \chi_t^2)}{(2\pi f)^2}, \quad (12)$$

gdzie  $k_o$  i  $k_n$  oznaczają odpowiednio sztywność toru i zawieszenia (na jedno koło).

W zagadnieniach dynamicznych masa  $m_t$  nie występuje bezpośrednio i dlatego istotny jest stosunek:

$$a_t = m_z / (m_z + m_t), \quad (13)$$

Parametry podłoża podkładu  $k_p$  i  $\eta_p$  określono z równania ruchu podłoża gruntowego obciążonego zastępczą powierzchnią kołową [2]. Przyjmując przemieszczenie  $w$  (na kierunku osi  $z$ , rys. 4) równanie można zapisać następująco:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - V_p^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{z} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0, \quad (14)$$

gdzie:  $V_p$  – prędkość fali podłużnej,  $t$  – współrzędna czasu.

Rozwiązanie opisujące ruch zaburzenia w kierunku dodatniej osi  $z$  określa funkcja:

$$w = \frac{1}{z} g \left( t - \frac{z}{V_p} \right). \quad (15)$$

Warunek brzegowy przy  $z = z_o$  (rys. 4)

$$E F_p \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=z_o} = m_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{z=z_o}, \quad (16)$$

gdzie:

$E$  – moduł sprężystości,

$F_p$  – powierzchnia podszywna oparcia podkładu, pozostałe oznaczenia podano na rysunku 4.

Warunek (16) można zapisać:

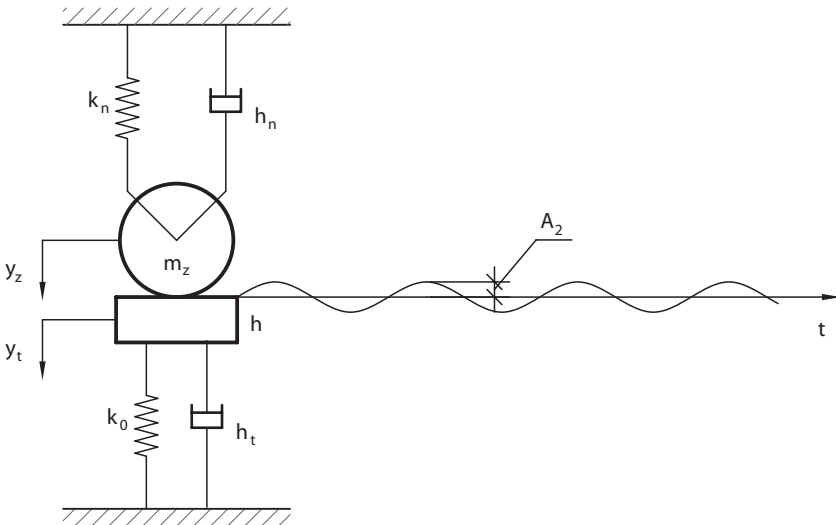
$$m_p g'' + \frac{EF_p}{V_p} g' + \frac{EF_p}{z_o} g = 0. \quad (17)$$

Porównując równanie (17) z rozwiązaniem dla ciała Kelvina-Voigta w modelu dyskretnym, można wykazać, że sztywność i tłumienie wyrażają się wzorami:

$$k_p = \frac{EF_p}{z_o}, \quad \eta_p = \frac{EF_p}{V_p}. \quad (18)$$

Dla gruntów przyjmuje się  $z_o = 1,13\sqrt{F_p}$ .

Do oceny ugięć dynamicznych szyny i oddziaływań w styku koło – szyna przy ruchu po nawierzchni o zróżnicowanej sztywności przyjęto schemat obliczeń według rysunku 5. Schematy według rysunków 4 i 5 w obliczeniach stanowią układ sprzężony.



Rys. 5. Układ dynamiczny pojazd – tor:  $k_n$  – sztywność usprężynowania,  $\eta_n$  – lepkość zawieszenia pudła wagonu,  $m_z$  – połowa masy zestawu kołowego,  $m_t$  – zastępcza masa nawierzchni z podtorzem,  $k_o$  – sztywność toru,  $\eta_t$  – lepkość zastępcza toru

Przyjęto wmuszenie kinematyczne  $\eta_2$  harmoniczne według wzoru:

$$\eta_2 = A_2 \sin b_2 t = A_2 \sin 2\pi p_2 t, \quad (19)$$

gdzie:

$A_2$  – amplituda wymuszeń,

$b_2, p_2$  – odpowiednio częstość i częstotliwość wymuszeń,  $p_2 = V/2l$ ,

$t$  – czas.

Z warunków kinematycznych (rys. 5) wynika, że przemieszczenie masy zestawu wynosi  $y_z = y_t + \eta_2$ . Równanie równowagi dynamicznej po przekształceniach można zapisać następująco:

$$y_t'' + y_t' \frac{(\eta_t + \eta_n)}{m_z + m_t} + y_t \frac{(k_o + k_n)}{m_z + m_t} = \frac{-m_z}{m_z + m_t} \left( \eta_2'' + \eta_2' \frac{\eta_n}{m_z} + \eta_2 \frac{k_n}{m_z} \right). \quad (20)$$

W celu uproszczenia przekształceń wprowadzono oznaczenia

$$\frac{m_z}{m_z + m_t} = \alpha_t,$$

$$\frac{(k_o + k_n)}{m_z + m_t} = \omega_o^2,$$

$$\frac{\eta_t + \eta_n}{m_z + m_t} = 2\chi_t \omega_o,$$

$$\beta = \frac{b_2}{\omega_o}, \quad (21)$$

gdzie  $\chi_t$  jest bezwymiarowym współczynnikiem względnego tłumienia masy  $m_z + m_t$ .

W celu ułatwienia rozwiązania równania (20), funkcje  $\eta_2$  i  $y_t$  zapisano jako zmienne zespolone

$$\eta_2 = A_2 e^{ib_2 t}, \quad y_2 = B_2 e^{ib_2 t}, \quad (22)$$

Podstawiając do równania (20), uzyskano:

$$y_t = A_2 \left[ \frac{C_2 E_2 + D_2 F_2}{E_2^2 + F_2^2} + \frac{i(D_2 E_2 - C_2 F_2)}{E_2^2 + F_2^2} \right] e^{ib_2 t}, \quad (23)$$

gdzie:

$$C_2 = \alpha_t \beta^2 - \frac{\alpha_t k_n}{\omega_o^2 m_z}, \quad D_2 = -\frac{\alpha_t \beta \eta_n}{m_z \omega_o}, \quad E_2 = 1 - \beta^2, \quad F_2 = 2\chi_t \beta. \quad (24)$$

Uwzględniając to, że rozwiązanie odpowiada części zespolonej  $y_t$ , można napisać:

$$y_2 = A_2 \left[ \sqrt{H_2^2 + G_2^2} \sin(b_2 t + \varphi_2) \right], \quad (25)$$

gdzie:

$$\frac{C_2 E_2 + D_2 F_2}{E_2^2 + F_2^2} = G_2, \quad \frac{D_2 E_2 - C_2 F_2}{E_2^2 + F_2^2} = H_2, \quad \text{tg} \varphi_2 = \frac{D_2 E_2 - C_2 F_2}{C_2 E_2 + D_2 F_2}.$$



Oddziaływanie dynamiczne  $F_d$  na tor, zgodnie z modelem według rysunku 5, jest równe:

$$F_d = A_2 \sqrt{(H_2^2 + G_2^2)(k_o^2 + \eta_t^2 b_2^2)} \sin(b_2 t + \varphi_2 + \psi_2), \quad (26)$$

gdzie:  $\operatorname{tg} \psi_2 = \eta_t b_2 / k_o$ .

Jak już wspomniano, rozwiązania (25) i (26) nie są autonomiczne i wymagają wyznaczenia masy  $m_i$  i lepkości  $\eta_t$ . Wartości te są określone według modelu dyskretno-falowego (rys. 4). Na podstawie rozwiązania dla modelu według rysunku 4 określono:

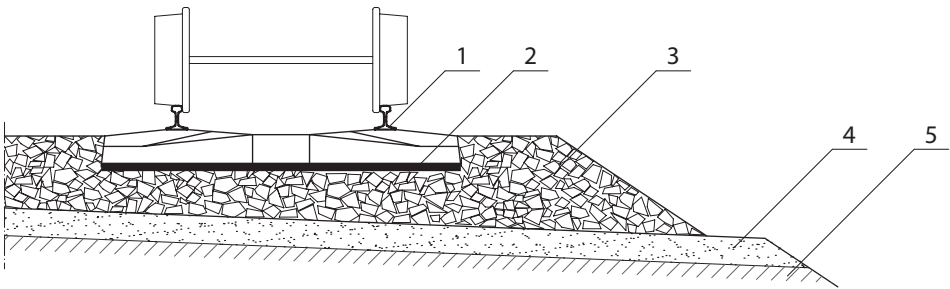
- współczynnik względnego tłumienia  $\chi_t$ ,
  - częstotliwość drgań własnych tłumionych  $f$  swobodnych  $f_o$ .
- Parametry układu według rysunku 5 określono z zależności:
- częstość drgań swobodnych:

$$\omega_o = \frac{2\pi f}{\sqrt{1 - \chi_t^2}}, \quad (27)$$

- względną masę toru:

$$\alpha_t = \frac{m_z \omega_o^2}{(k_n + k_t)}. \quad (28)$$

Wprowadzenie podkładów betonowych zwiększyło około dwukrotnie (w stosunku do podkładów drewnianych) sztywność podłoża szynowego. W celu zmniejszenia sztywności pionowej nawierzchni oraz ograniczenia rozkruszania i ścierania podsypki przez podkłady betonowe, zaleca się na spodzie podkładów umieszczać sprężyste podkładki [6, 7, 14]. Na rysunku 6 pokazano przykładową konstrukcję nawierzchni z podkładkami [14].



Rys. 6. Konstrukcja nawierzchni z podkładkami sprężystymi pod podkładami betonowymi [14]: 1) szyna, 2) podkładka sprężysta, 3) podsypka, 4) warstwa ochronna, 5) podłóże

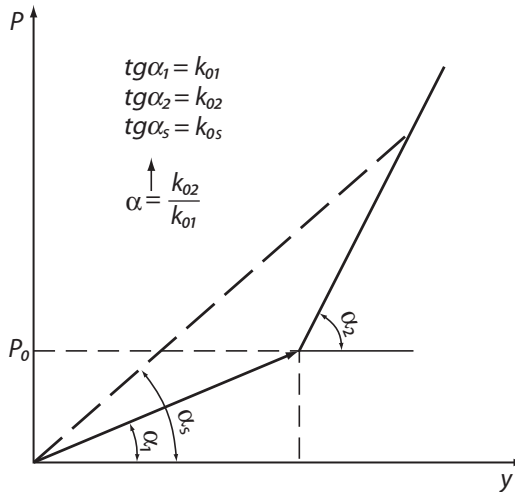
Sztywność podłoża szynowego w zależności od sztywności części składowych nawierzchni i podtorza można wyrazić następująco:

$$\frac{1}{C \cdot F_p} = \frac{1}{k_{pr}} + \frac{1}{k_{ps}} + \frac{1}{k_p}, \quad (29)$$

gdzie:

- $C$  – współczynnik sztywności podłoża szynowego,
- $F_p$  – powierzchnia podszykowej podstawy podkładki,
- $k_{pr}, k_{ps}$  – sztywność odpowiednio przekładek i podkładki,
- $k_p$  – sztywność podłoża podkładki, tj. sztywność podsypki, warstwy ochronnej i podłoża.

Sztywności podkładek wahają się w przedziale 0,1 – 0,45 N/mm<sup>3</sup>. W celu ilustracji wpływu podkładki na ugięcia i oddziaływania koła wagonu towarowego wykonano obliczenia porównawcze. Analiza dotyczyła nawierzchni z szynami UIC 60 na podkładkach betonowych z przekładką o sztywności  $k_{pr} = 120$  kN/mm [1]. Obliczenia wykonano w wersji bez podkładki i z podkładką o sztywności  $k_{ps} = 0,15$  N/mm<sup>3</sup>. Sztywność toru  $k_o$  ma charakterystykę biliniową [2, 3]. Jej zmiana następuje przy obciążeniu  $P_o \approx 40$  kN (rys. 7) i dlatego rozpatrywano obciążenie szyny kołem wagonu załadowanego i próżnego o naciskach odpowiednio  $P = 84$  kN i  $P = 40$  kN. W przyjętych wartościach uwzględniono przyrosty obciążeń wolnozmiennych od drgań nadwozia i sił bocznych, które w układzie dynamicznym zestaw kołowy – nawierzchnia z podtorzem są obciążeniami statycznymi.



Rys. 7. Zależność ugięcia szyny  $y$  od obciążenia  $P$

Ostatecznie obliczenia dotyczyły czterech serii:

- seria 1: nawierzchnia bez podkładki o  $P > P_o$ ,
- seria 2: nawierzchnia z podkładką o  $P > P_o$ ,
- seria 3: nawierzchnia bez podkładki o  $P < P_o$ ,
- seria 4: nawierzchnia z podkładką o  $P < P_o$ .

Wykorzystując wzór (29), ustalono sztywność podłoża szynowego dla poszczególnych serii:

seria 1:  $C = 0,150 \text{ N/mm}^3$ ,

seria 2:  $C = 0,075 \text{ N/mm}^3$ ,

seria 3:  $C = 0,060 \text{ N/mm}^3$ ,

seria 4:  $C = 0,037 \text{ N/mm}^3$ .

Wartości parametrów wchodzących do równań (8) dla poszczególnych serii podano w tabelcy 1. Wyniki obliczeń wykonanych według wzorów (9, 11, 12 i 13) podano w tabelcy 2.

Tabelca 1

## Wartości przyjęte w obliczeniach

Parametr \ Seria	1	2	3	4
$m_k \left[ \frac{\text{Ns}^2}{\text{mm}} \right]$	0,392	0,330	0,316	0,285
$m_p \left[ \frac{\text{Ns}^2}{\text{mm}} \right]$	120,20	0,125	0,125	0,125
$\bar{\eta}_n \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{mm}} \right]$	38,40	32,500	14,31	12,76
$\eta_p \left[ \frac{\text{Ns}}{\text{mm}} \right]$	120,20	48,00	36,83	25,17
$k_d \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$	120 000	120 000	120 000	120 000
$\bar{k}_n \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$	1019,0	857,44	800	800
$k_p \left[ \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$	61 130	24 360	18 730	12 800

Tabelca 2

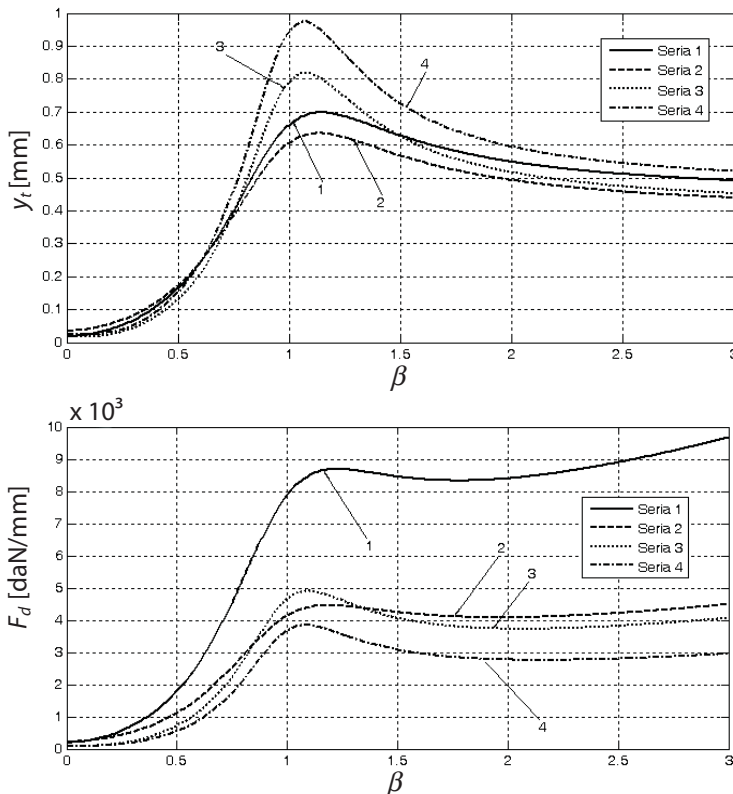
## Obliczone parametry dynamiczne nawierzchni z podtorzem

Parametr \ Seria	1	2	3	4
$f \text{ [Hz]}$	42	31	30	27
$f_o \text{ [Hz]}$	45	33	31	28
$\chi_t$	0,36	0,37	0,26	0,25
$\alpha_t$	0,45	0,40	0,41	0,47

Symbolem  $f_0$  oznaczono częstotliwość swobodnych drgań własnych nawierzchni z podtorzem.

Wykorzystując parametry dynamiczne podane w tabelicy 2, na podstawie wzorów (25) i (26) określono względne ugięcia dynamiczne i oddziaływania na milimetr amplitudy wymuszenia kinematycznego; wyniki ilustruje rysunek 8. Podane zależności wykazują, że zarówno ugięcia dynamiczne i oddziaływania zależą od współczynnika rezonansu  $\beta$ . Przy prędkości wagonu 80 km/h współczynnik  $\beta$  dla serii 1 wynosi  $\sim 0,40$ , natomiast dla pozostałych serii  $\sim 0,60$ . Z tych względów stosowanie podkładki nie musi zmniejszać samych oddziaływań dynamicznych w stosunku do stanu bez podkładki. Przykładowo dla prędkości 80 km/h i założeniu, że amplitudy oddziaływań dynamicznych na szynę dla serii 1 i 3 są równe 1,0, uzyskuje się niezależnie od wartości rozrzutu sztywności podłoża szynowego względne amplitudy oddziaływań dla serii 2 i 3 odpowiednio: 2,5 i  $\sim 1,24$ .

Biorąc pod uwagę wyłącznie oddziaływania statyczne (bez udziału sił bezwładności zestawu) analogiczne względne amplitudy obciążeń podkładków wynoszą: seria 2 – 0,84; seria 4 – 0,90.



Rys. 8. Zależność amplitudy ugięcia dynamicznego toru  $y_t$  i siły  $F_d$  od współczynnika rezonansu  $\beta$  dla wagonów towarowych: 1) seria 1, 2) seria 2, 3) seria 3, 4) seria 4

Tak więc, podkładka redukuje obciążenia statyczne podkładów, co jest konsekwencją zmniejszenia sztywności podłoża szynowego. Względne amplitudy sumy obciążeń statycznych i dynamicznych podkładu  $\bar{R}_g$  przy określonych odchyleniach sztywności podłoża szynowego  $V$  podano w tablicy 3.

Tablica 3

### Względne amplitudy obciążeń podkładów

Seria	$\bar{R}_g$		
	$V = 0,1$	$V = 0,3$	$V = 0,6$
1	1,00	1,00	–
2	0,86	0,90	–
3	1,00	1,00	1,00
4	0,90	0,91	0,91

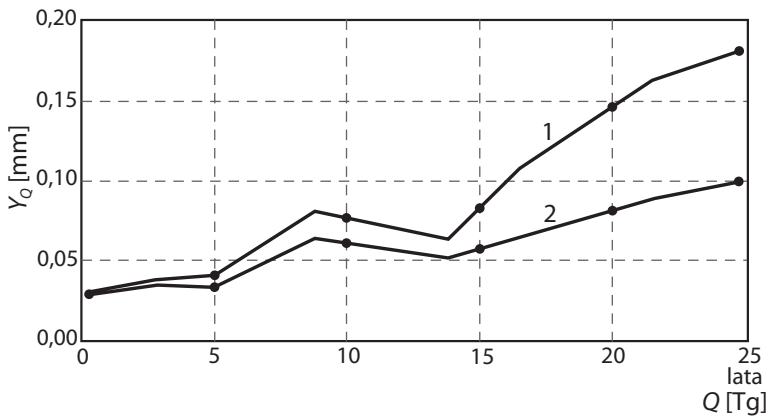
Dla obciążeń szyny  $P < P_0$  badania sztywności toru [9] wykazują zwiększone odchylenia sztywności, aż do współczynnika zmienności  $V = 0,6$ . W opracowaniu [7] przy analizie statycznej metodą MES, dla podkładki o sztywności  $0,15 \text{ N/mm}^3$  uzyskano współczynnik zmniejszenia nacisku na podkład  $\sim 0,60$ . Zwrócono uwagę, że wyniki obliczeń bardzo zależą od współczynnika Poissona podkładki. W zakresie  $\nu = 0,3 \div 0,475$  względna amplituda  $\bar{R}_g$  może wahać się w granicach  $0,60 \div 0,70$ . Najbardziej miarodajną analizę dynamiczną wpływu podkładek przedstawiono w opracowaniu [14]. Sztywność podłoża poszczególnych podkładów bez podkładek, była symulacją pomiarów sztywności toru rzeczywistego. Przytoczone wyniki pomiarów sztywności wzdłuż toru potwierdzają celowość uwzględnienia w obciążeniach toru nadwyżek dynamicznych, generowanych przez niejednorodność jego sztywności. Porównywać należy przypadki o zbliżonym stosunku sztywności podkładki  $k_{ps}$  do sztywności podłoża szynowego bez podkładki  $k_p$ . Analiza podana w tablicy 3 dotyczy  $k_{ps} / k_p = 1,0$ . Taka relacja występuje dla podkładki o średniej sztywności, analizowanej w opracowaniu [14]. Minimalne amplitudy  $\bar{R}_g$  uzyskano na poziomie  $0,81 \div 0,74$ , co potwierdza zbieżność z wynikami podanymi w tablicy 3.

Z zależności siły oddziaływania  $F_d$  od wskaźnika rezonansu  $\beta$  (rys. 8) wynika, że istotna redukcja oddziaływań koła na szynę wystąpi powyżej prędkości rezonansowej ( $\beta \geq 1,0$ ). Dla analizowanego wagonu prędkość rezonansowa wynosi  $200 \text{ km/h}$  dla nawierzchni bez podkładek. W przypadku zastosowania podkładek (seria 2 lub 4), prędkość rezonansowa obniża się i wynosi  $140 \text{ km/h}$ . Obniżenie częstotliwości rezonansowej może być realizowane przez zmniejszenie masy zestawu kołowego lub obniżenie sztywności podłoża szynowego. W drugim przypadku wzrastają momenty w szynie, co wymaga analizy wielokryterialnej.

Rysunek 8 wskazuje, że korzystny trend na redukcję oddziaływań rozpoczyna się dla  $\beta \geq 0,50$  (wzrastają różnice pomiędzy pierwszą serią i pozostałymi seriami). Podane zależności pozwalają na świadome sterowanie parametrami nawierzchni oraz pojazdu (częstość drgań własnych) w celu minimalizacji skutków oddziaływań. Problem, który

wymaga potwierdzenia doświadczalnego, dotyczy sztywności podkładek w warunkach szybkozmiennego obciążenia. Przy obciążeniach wolnozmiennych przekładki pracują w zakresie częstotliwości  $p_2 = 2\div 4$  Hz. W warunkach ruchu na częstotliwość wolnozmienną nakłada się częstotliwość wymuszeń od niejednorodnej sztywności rzędu  $p_2 = 18\div 30$  Hz. Powstaje pytanie, czy sztywność podkładek dla obydwu zakresów częstotliwości jest jednakowa.

Niezależnie od mechanicznych skutków obniżenia oddziaływań koła na szynę w wyniku stosowania podkładek wibroizolacyjnych, obecność ich jest korzystna z uwagi na rozkruszanie i ścieranie ziaren podsypki. Zwiększenie powierzchni kontaktu podkładka – tłuścioń sprzyja spowolnieniu procesu rozkruszania (zwłaszcza przy przechodzeniu temperatury przez zero), a więc zmniejsza tempo przyrostu niejednorodności sztywności podłoża szynowego.



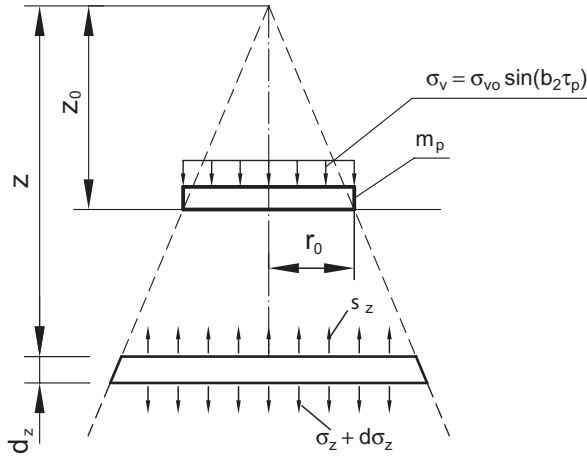
Rys. 9. Zależność średniej głębokości fali na szynie  $y_0$  od obciążenia linii  $Q$  [6]: 1) podkłady bez podkładek, 2) podkłady z podkładkami o współczynniku sztywności  $C = 0,15$  N/mm<sup>3</sup>

Na rysunku 9 przytoczono doświadczalne dane firmy Getzner [6]. Wynika z niego, że zmniejszenie tempa degradacji podsypki sprzyja obniżeniu przyrostu amplitudy ugięć nierówności krótkich (podkład – podkład). Wpływ podkładek na degradację podsypki przedstawia również opracowanie [14].

### 3. SKUTKI ODDZIAŁYWAŃ DYNAMICZNYCH W PODTORZU

#### 3.1. Naprężenia pionowe w podłożu podkładek od zróżnicowania sztywności podłoża szynowego

Określenie naprężeń w podłożu podkładek, wymaga przyjęcia modelu podłoża analogicznego do przyjętego przy określaniu parametrów dynamicznych toru (rys. 4). Z tych względów przyjęto schemat obliczeń według rysunku 10.



Rys. 10. Schemat obliczeń dla obciążeń podłoża podkładów

Warunek równowagi (17) dla  $z = z_0$  można zapisać,

$$m_{pz} g'' + \frac{EF_p}{V_p} g' + \frac{EF_p}{z_0} g = R_d z_0, \tag{30}$$

gdzie:

$R_d$  – obciążenie dynamiczne podkładu,

$m_{pz}$  – zastępcza masa połowy podkładu z uwzględnieniem mas zestawu i szyny.

Pozostałe oznaczenia są zgodne z poprzednimi.

Do celów obliczeniowych wygodniej jest w równaniu (30) przyjąć współczynniki odniesione do jednostki powierzchni podkładu, co można zapisać:

$$\bar{m}_{pz} g'' + \bar{\eta}_p g' + \bar{k}_p \sigma_v z_0, \tag{31}$$

gdzie  $\sigma_v$  jest umownym naciskiem szyny na podkład. Zachowanie zgodności dynamicznej z modelem według rysunku 4 wymaga przyjęcia:  $\bar{m}_{pz} = \bar{k}_p / \omega_0^2$ ,  $\bar{\eta}_p = 2\chi_t \omega_0 \bar{m}_{pz}$ , gdzie  $\omega_0$  jest podstawową częstością własnych drgań swobodnych nawierzchni z podtorzem. Wartość amplitudy (rys. 10):  $\sigma_{v_0} = \frac{F_{dt} l}{2L} / F_p$ , gdzie oznaczenia są zgodne z poprzednimi przy częstości wymuszenia  $b_2 = \pi V / l$ .

Obciążenie lub odciążenie naciskiem  $\sigma_v$  zastąpiono impulsem prostokątnym o czasie trwania  $\tau_0$

$$\int_0^{0,5\tau_0} \sigma_v dt = \sigma_{v_0} \tau_0 \tag{32}$$

gdzie  $T_2 = \frac{2l}{V}$ , uzyskując  $\frac{2l}{\pi V} = \frac{T_2}{\pi}$ . (33)

Rozwiązanie równania (31) przy wymuszeniu impulsem według wzoru 32 przy zerowych warunkach początkowych stanowi funkcja:

$$g(\tau_p) = \frac{z_o \sigma_{vo}}{\bar{k}_p} \left[ 1 - \frac{\exp(-\chi_t \omega_o \tau_p)}{\sqrt{1 - \chi_t^2}} \sin(\omega \tau_p + \varphi) \right], \quad (34)$$

gdzie:

$$\tau_p = t - \frac{z_o}{V_p}, \quad \text{tg} \varphi = \frac{\sqrt{1 - \chi_t^2}}{\chi_t}, \quad \omega_o = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \chi_t^2}}.$$

Rozwiązanie równania (31) przybiera zatem postać:

$$w = \frac{z_o \sigma_{vo}}{z k_p} \left\{ 1 - \frac{\exp \left[ -\chi_t \omega_o \left( t - \frac{z}{V_p} \right) \right]}{\sqrt{1 - \chi_t^2}} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{V_p} \right) + \varphi \right] \right\}. \quad (35)$$

Naprężenia pionowe w podłożu podkładu:

$$\sigma_z = \sigma_{vo} z_o^2 \left[ \frac{1}{z^2} + \exp(-\chi_t \omega_o \tau_z) A_z \sin(\omega \tau_z + \varphi + \varphi_1) \right], \quad (36)$$

gdzie:

$$\tau_z = t - \frac{z}{V_p},$$

$$A_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \chi_t^2}} \sqrt{\left( \frac{1}{z^2} - \frac{\chi_t \omega_o}{z V_p} \right)^2 + \frac{\omega^2}{z^2 V_p^2}},$$

$$\text{tg} \varphi_1 = \frac{\omega}{\frac{V_p}{z} - \chi_t \omega_o}.$$



Istotna jest amplituda naprężenia  $\sigma_z$  na danej głębokości  $z$ . Z warunku:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial \tau_z} = 0, \quad (37)$$

można określić najmniejszą, dodatnią wartość współrzędnej czasu

$$\tau_z^* = \frac{n\pi - \varphi_1}{\omega}, \quad n = 1, 2, 3 \quad (38)$$

przy której  $\sigma_z = \sigma_{z\max}$  ( $n=1$ ).

Bezwymiarową amplitudę naprężeń po przekształceniach można wyrazić:

$$\frac{\sigma_{z\max}}{\sigma_{v_0}} = \eta_z = \frac{z_0^2}{z^2} \left( 1 + \bar{A}_z e^{-\chi_t \omega_0 \tau_z^*} \right), \quad (39)$$

gdzie: 
$$\bar{A}_z = \sqrt{1 + \left( \frac{\omega_0 z}{V_p} - \chi_t \right)^2} - \chi_t^2,$$

$z = mz_0$ ,  $m \geq 1$  – liczba dodatnia, rzeczywista.

Równanie (39), niezależnie od prędkości pojazdu, obowiązuje przy warunku granicznym  $\tau_0 \geq 0,5T$ , gdzie  $T$  jest okresem tłumionych drgań własnych nawierzchni z podtorzem.

Dla prędkości spełniających warunek  $\tau_0 < 0,5T$  rozwiązanie równania (31) można zapisać:

$$w = \frac{z_0 \sigma_{v_0} \exp \left[ -\chi_t \omega_0 \left( t - \frac{z}{V_p} \right) \right] F(\tau_0)}{z \bar{k}_p \sqrt{1 - \chi_t^2}} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{z}{V_p} \right) - \varphi_3 \right], \quad (40)$$

gdzie:

$$F(\tau_0) = \sqrt{1 + \exp(2\chi_t \omega_0 \tau_0) - 2 \exp(\chi_t \omega_0 \tau_0) \cos \omega \tau_0},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\exp(\chi_t \omega_0 \tau_0) \left( \cos \omega \tau_0 - \frac{\chi_t}{\sqrt{1 - \chi_t^2}} \sin \omega \tau_0 \right) - 1}{\exp(\chi_t \omega_0 \tau_0) \left( \sin \omega \tau_0 + \frac{\chi_t}{\sqrt{1 - \chi_t^2}} \cos \omega \tau_0 \right) - \frac{\chi_t}{\sqrt{1 - \chi_t^2}}}.$$

Naprężenia pionowe w podłożu podkładu:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_{v_0} z_0^2 F(\tau_0) \bar{A}_z}{z^2 \sqrt{1 - \chi_t}} \exp(-\chi_t \omega_0 \tau_z) \sin(\omega \tau_z + \varphi_1 - \varphi_3). \quad (41)$$

Bezwymiarową amplitudę naprężeń określono z warunku (37) przy najmniejszej, dodatniej współrzędnej czasu

$$\tau_z^{**} = \frac{n\pi + \varphi - \varphi_1 + \varphi_3}{\omega}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

oraz

$$\frac{\sigma_{z \max}}{\sigma_{v_0}} = \eta_z = \frac{z_0^2}{z^2} F(\tau_0) \bar{A}_z e^{-\chi_t \omega_0 \tau_z^{**}}, \quad (42)$$

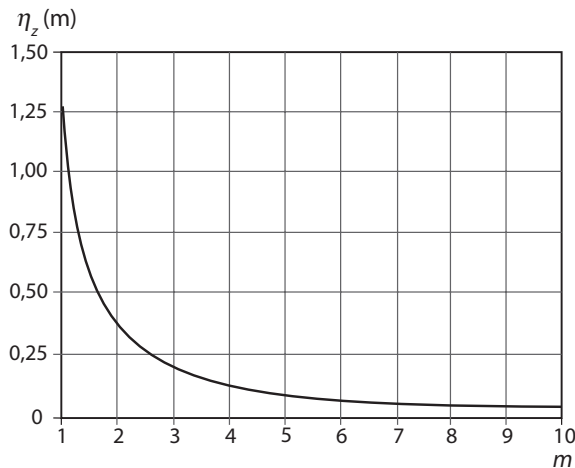
przy  $n = 0$ .

Wprowadzając bezwymiarowy czas dla parametrów zawartych w wyrażeniach  $F(\tau_0)$  i  $\text{tg} \varphi_3$  przyjęto oznaczenia:

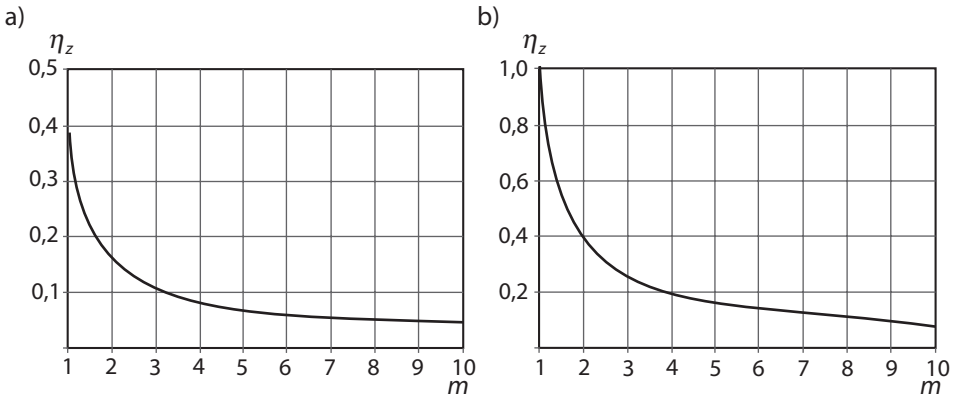
$$\omega \tau_0 = \frac{2\pi \tau_0}{T} = 2\pi \bar{\tau}_0, \quad \omega_0 \tau_0 = \frac{2\pi \tau_0}{T \sqrt{1 - \chi_t^2}} = \frac{2\pi \bar{\tau}_0}{\sqrt{1 - \chi_t^2}},$$

gdzie  $T$  jest okresem tłumionych drgań własnych nawierzchni z podtorzem.

Przykładowe wykresy zaniku bezwymiarowych amplitud  $\eta_z$  według wzorów (39) i (42) podano na rysunkach 11 i 12, sporządzonych dla danych:  $r_0 = 0,30$  m,  $z_0 = 0,60$  m,  $f = 40$  Hz ( $T = 0,025$  s),  $V_p = 300$  m/s,  $\chi_t = 0,40$ .



Rys. 11. Przykładowa zależność amplitudy naprężeń pionowych od współrzędnej  $m = z/z_0$ , przy  $\bar{\tau}_0 > 0,50$

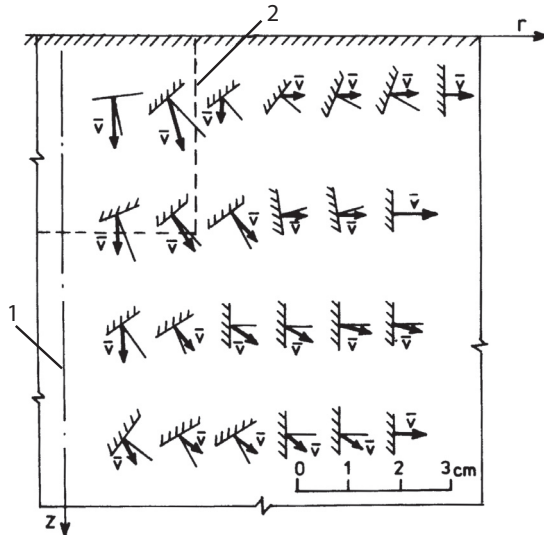


Rys. 12. Przykładowa zależność amplitudy naprężeń pionowych od współrzędnej  $m = z/z_0$ , dla  $\bar{\tau}_0 < 0,50$ :  
 a) przy prędkości 130 km/h dla  $\bar{\tau}_0 = 0,423$ , b) przy prędkości 160 km/h dla  $\bar{\tau}_0 = 0,344$

### 3.2. Poziome naprężenia w podłożu podkładek od zróżnicowania sztywności podłoża szynowego

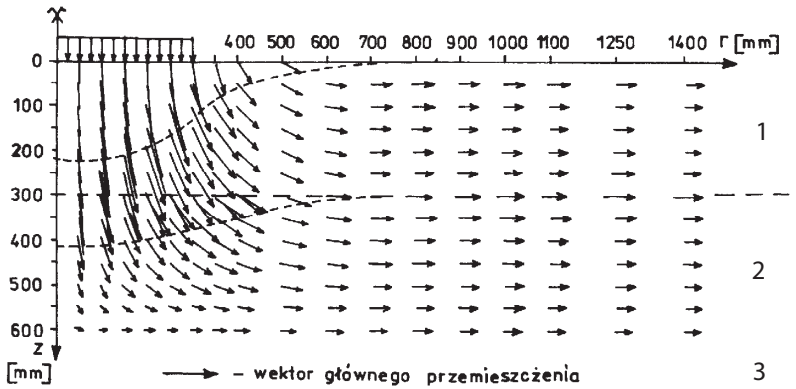
Pionowe obciążenia impulsowe w podłożu podkładek wywołują również poziome fale naprężeń, na co zwrócili uwagę autorzy prac np. [11, 15].

Do oceny pola przemieszczeń w ośrodku gruntowym wykorzystano między innymi wyniki doświadczeń zawarte w [10, 14]. Na rysunku 13 zamieszczono wyniki pomiaru wypadkowego wektora przemieszczeń przy obciążeniu impulsowym [15]. Dane wskazują, że strefa zgniotu w podłożu jest źródłem radialnej fali naprężeń. Tak więc, poza obszarem objętym zgniotem warunki odkształceń można zapisać:  $\varepsilon_r > 0$ ,  $\varepsilon_z \approx 0,0$ ,  $\varepsilon_{rz} \approx 0,0$ .



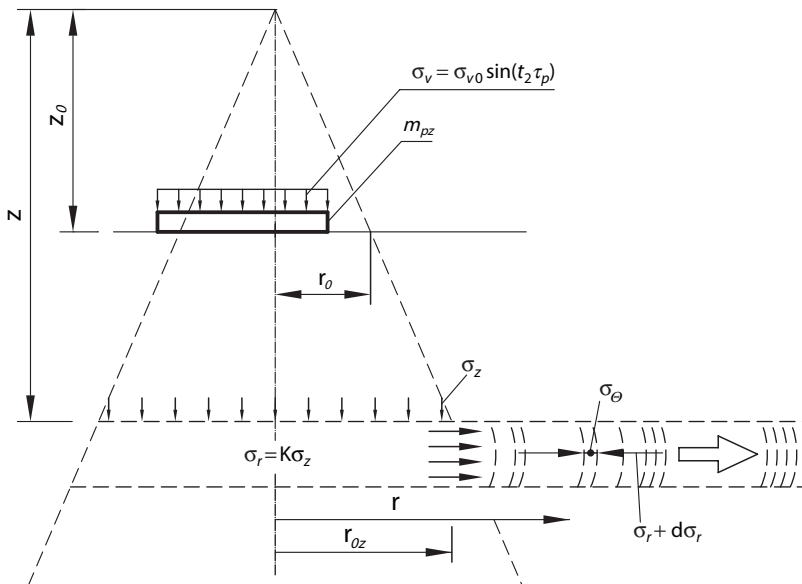
Rys. 13. Kierunki głównego wektora przemieszczeń przy obciążeniu impulsowym powierzchni gruntu:  
 → wektor głównego przemieszczenia, 1) oś impulsu, 2) kontur krateru

Na rysunku 14 podano wektory wypadkowego przemieszczenia w podłożu okrągłej płyty symulującej obciążenie podkładem kolejowym [11]; aparaturę wywołującą obciążenia wzorowano na rozwiązaniu japońskim.



Rys. 14. Główne wektory przemieszczeń pod płytą sztywną modelującą obciążenie podkładu:  
 → wektor głównego przemieszczenia, 1) podsypka  $E_1 = 150 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu_1 = 0,35$ ,  
 2) piasek  $E_2 = 90 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu_2 = 0,35$ , 3) płyta stalowa  $E = 2,1 \times 10 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu_3 = 0,33$

Wyniki podane na rysunku 14 potwierdzają wnioski wyciągnięte na podstawie rysunku 13. Na tej podstawie przyjęto rozwiązanie techniczne według schematu obliczeniowego podanego na rysunku 15. W zagadnieniach dynamicznych mechaniki gruntów wykorzystuje się współczynnik rozporu bocznego.



Rys. 15. Schemat obliczeniowy dla radialnej fali naprężeń

Problem określania współczynnika rozporu boczno opisano teoretycznie w [10]. Dla zadania osiowosymetrycznego współczynnik  $K$  określa się ze wzoru:

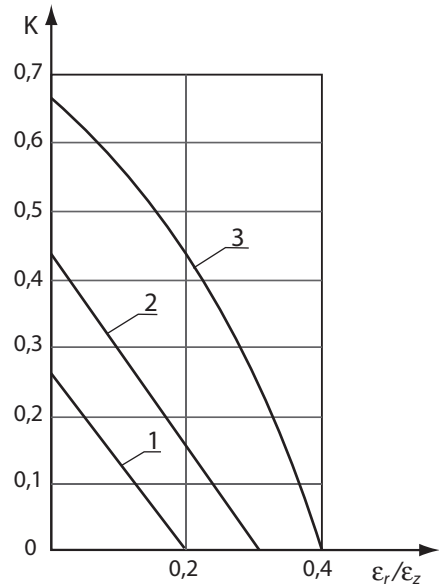
$$K = \frac{\frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_z} + \nu \right)}{1 + \frac{2\varepsilon_r}{1-\nu\varepsilon_z}} \quad (43)$$

gdzie:

$\nu$  – współczynnik Poissona gruntu,

$\varepsilon_r, \varepsilon_z$  – odkształcenie odpowiednio w kierunku radialnym i pionowym (rys. 15).

Na rysunku 16 podano ilustrację zależności (43) przy różnych wartościach współczynnika Poissona  $\nu$ .

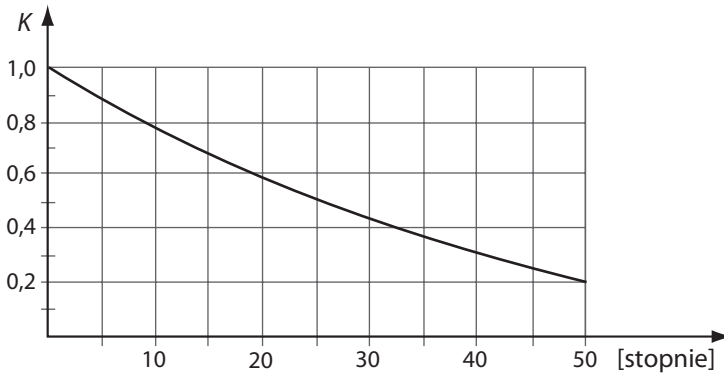


Rys. 16. Zależność współczynnika rozporu boczno  $K$  od stosunku odkształceń  $\varepsilon_r/\varepsilon_z$ :  
1)  $\nu = 0,20$ , 2)  $\nu = 0,30$ , 3)  $\nu = 0,40$

Do warunków pracy podtorza pracującego przy częściowym uplastycznieniu należy odnieść analizę Jaky'ego [8], rozpatrując obciążenie sprężystego klina w otoczeniu obszaru gruntu, w którym panuje rankinowski stan naprężeń. Współczynnik rozporu boczno określa wzór:

$$K = (1 + 0,66 \sin \varphi_u) \operatorname{tg}^2 (45^\circ - \varphi_u / 2), \quad (44)$$

gdzie  $\varphi_u$  jest kątem tarcia wewnętrzno w naprężeniach całkowitych. Ilustrację zależności wynikającej ze wzoru (44) podano na rysunku 17.



Rys. 17. Zależność współczynnika rozporu bocznego  $K$  od kąta tarcia wewnętrznego  $\phi_u$

Przedstawiona zależność wskazuje jak istotny wpływ na poziom oddziaływań dynamicznych ma odwodnienie podtorza ( $P_u$ ) oraz rodzaj występujących gruntów (spójne, niespoiste).

Związki fizyczne dla osiowosymetrycznego stanu naprężenia (rys. 15) w płaskim stanie odkształceń można zapisać:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \left[ \frac{\nu u}{r} + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} \right], \quad (45)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\nu) \frac{u}{r} \right],$$

gdzie:

$\sigma_r, \sigma_\theta$  – odpowiednio naprężenia radialne i obwodowe,  
 $u$  – radialne przemieszczenie,  
 $E$  – moduł sprężystości gruntu.

Równanie równowagi dynamicznej:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (46)$$

gdzie:

$\rho$  – gęstość gruntu.

Podstawiając związki (45) do równania równowagi (46) i dokonując separacji zmiennych dla przemieszczeń  $u$ , uzyskuje się równanie

$$\frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} - \frac{1}{r^2} = \frac{T''}{V_p^2 T} = k^2, \quad (47)$$

gdzie:

$R$  – nieznaną funkcją zmiennej  $r$ ,

$T$  – nieznaną funkcją zmiennej czasu  $\tau_z$ ,

$V_p$  – prędkość fali podłużnej,

$k$  – nieznaną stałą.

Lewą stronę można przekształcić w równanie:

$$R'' + \frac{R'}{rR} - \left( k^2 + \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (48)$$

którego rozwiązaniem jest funkcja

$$R = A I_1(kr) + B K_1(kr),$$

gdzie:

$I_1(kr)$  – funkcja Bessela drugiego rodzaju rzędu pierwszego,

$K_1(kr)$  – funkcja MacDonalda rzędu pierwszego,

$A, B$  – stałe.

Z warunków fizycznych odrzucono pierwszy człon rozwiązania (dla  $r \rightarrow \infty, I_1 \rightarrow \infty$ ).

Zgodnie z (47), funkcja  $T$  spełnia równanie

$$T'' - V_p^2 k^2 T = 0,$$

którego rozwiązanie ma postać:

$$T = C_T e^{-kV_p \tau_z} \quad (49)$$

po odrzuceniu członu z wykładnikiem dodatnim.

Ostatecznie przemieszczenie  $u$  wynosi

$$u = AK_1(kr) e^{-kV_p \tau_z}, \quad (50)$$

gdzie  $A$  jest parametrem.

Wykorzystując związek fizyczny (45), ogólne rozwiązanie dla naprężeń  $\sigma_r$  można wyrazić:

$$\sigma_r = AE_1 \left[ (1-2\nu) \frac{K_1(kr)}{r} + k(1-\nu) K_0(kr) \right] e^{-kV_p \tau_z} + B \frac{r_{oz}^2}{r^2}, \quad (51)$$

gdzie:  $E_1 = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$

$K_0(kr)$  – funkcja MacDonalda zerowego rzędu.

Parametry  $A, B$  i  $k$  określono z warunku ciągłości amplitudy naprężenia  $r = r_{oz}$  (rys. 15) według (39) i (51):

$$k = \frac{\chi_i \omega_o}{V_p},$$

$$A = \frac{-\frac{K\sigma_{v_0}z_0^2\bar{A}_z}{E_1z^2}}{\frac{(1-2\nu)K_1(kr_{oz})}{r_{oz}} + (1-\nu)kK_0(kr_{oz})},$$

$$B = -\frac{K\sigma_{v_0}z_0^2}{z^2}.$$

Uwzględniając uzyskane parametry we wzorze (51), można funkcję zaniku bezwymiarowej amplitudy naprężeń  $\sigma_r$  zapisać w postaci:

$$\frac{\sigma_{r\max}}{\rho_{rz}} = \eta_r = \left[ \left( \frac{r_{oz}}{r} \right)^2 + \bar{A}_z \eta_{r-} e^{-\chi_i \omega_0 \tau_z^*} \right], \quad (52)$$

gdzie:

$$\eta_{r-} = \frac{(1-2\nu)\frac{K_1(kr)}{r} + (1-\nu)kK_0(kr)}{(1-2\nu)\frac{K_1(kr_{oz})}{r_{oz}} + (1-\nu)kK_0(kr_{oz})},$$

$$\rho_{rz} = \frac{K\sigma_{v_0}}{m^2},$$

$r = r_0 n_2$ ,  $r_{oz} = r_0 m, n_2$  – dodatnia liczba rzeczywista ( $n_2 \geq m$ ), znak naprężenia  $\rho_{rz}$  według teorii sprężystości (+ rozciąganie, – ściskanie).

Wykorzystując związki (45), współczynnik zaniku bezwymiarowej amplitudy naprężeń obwodowych wyniesie:

$$\frac{\sigma_{\theta\max}}{\rho_{rz}} = \eta_\theta = - \left[ \left( \frac{r_{oz}}{r} \right)^2 + \bar{A}_z \eta_{\theta-} e^{-\chi_i \omega_0 \tau_z^*} \right], \quad (53)$$

gdzie:

$$\eta_{\theta-} = \frac{(1-2\nu)\frac{K_1(kr)}{r} - \nu kK_0(kr)}{(1-2\nu)\frac{K_1(kr_{oz})}{r_{oz}} + (1-\nu)kK_0(kr_{oz})}.$$

Dla przypadku  $\bar{\tau}_o \leq 0,5$  według wzoru (42) uzyskuje się następujące funkcje zaniku amplitud naprężeń:

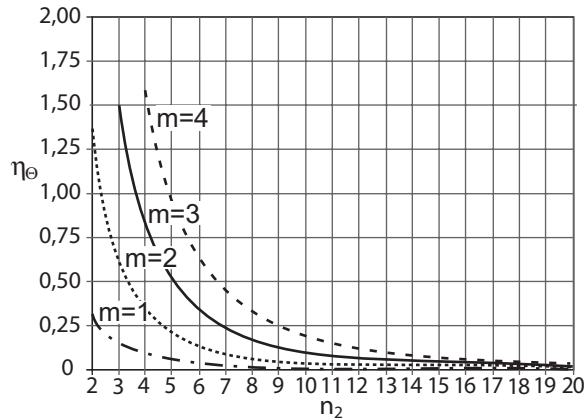
$$\eta_r = \bar{A}_z \eta_{r-} F(\bar{\tau}_o) e^{-\chi_i \omega_0 \tau_z^{**}}, \quad (54)$$



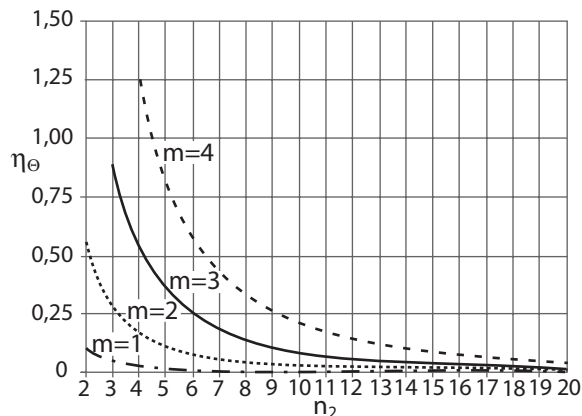
$$\eta_{\theta} = -\bar{A}_z \eta_{\theta\_} F(\bar{\tau}_o) e^{-\chi_t \omega_o \bar{\tau}_z^{**}} \quad (55)$$

Przykładowe zależności bezwymiarowych amplitud  $\eta_r$  i  $\eta_{\theta}$  od współrzędnej dla  $r/r_o = n_2$  dla  $\bar{\tau}_o \geq 0,50$  podano na rysunku 18, analogiczne zależności dla  $\bar{\tau}_o \leq 0,50$  ilustrują rysunki 19 i 20. Wykresy sporządzono dla parametrów dynamicznych toru:  $r_o = 0,30$  m,  $z_o = 0,60$  m,  $f = 40$  Hz ( $T = 0,025$  s),  $V_p = 300$  m/s,  $\chi_t = 0,40$ .

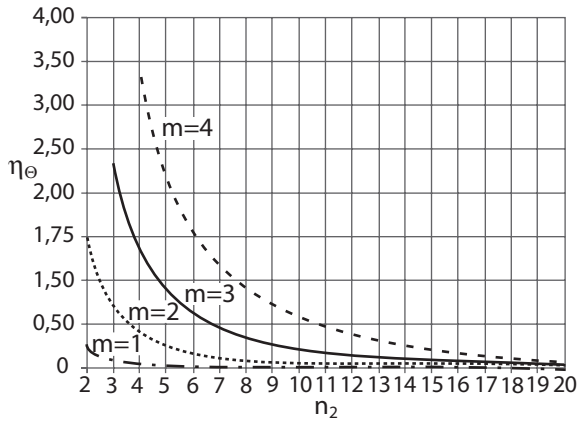
Dla podtorza istotne znaczenie mają rozciągające naprężenia obwodowe  $\sigma_{\theta}$  w strefach peryferyjnych ( $r \geq r_{oz}$ , por. rys. 15), gdzie zanika oddziaływanie pionowych naprężeń dynamicznych oraz statycznych wolnozmiennych. Wymienione strefy obejmują zwykle warstwy ochronne, gdzie obwodowe naprężenia ściskające wynikają tylko z ciężaru własnego nawierzchni i podtorza.



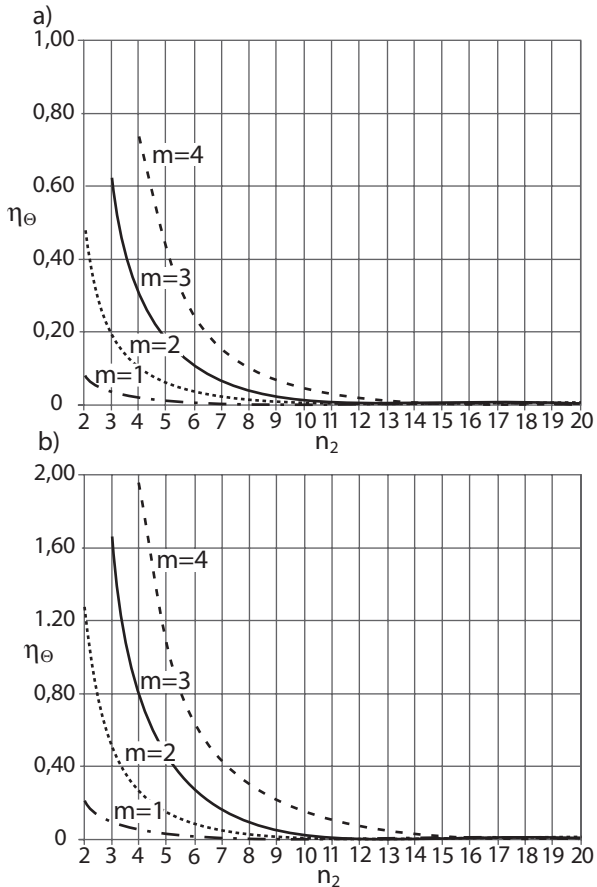
Rys. 18 Zależność amplitudy  $\eta_r$  i  $\eta_{\theta}$  od współrzędnej  $n_2 = r/r_o$  dla  $\bar{\tau}_o > 0,50$



Rys. 19a. Przykładowe zależności amplitudy  $\eta_r$  od współrzędnej  $n_2 = r/r_o$  dla  $\bar{\tau}_o < 0,50$  przy prędkości 130 km/h dla  $\bar{\tau}_o = 0,423$

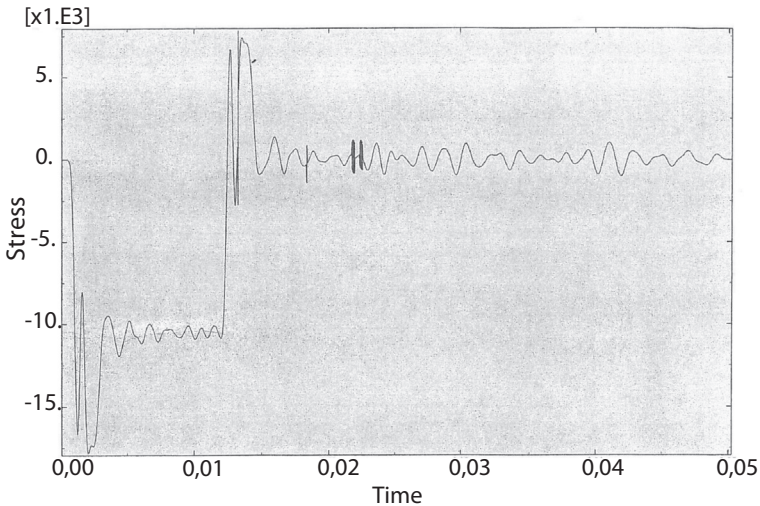


Rys. 19b. Przykładowe zależności amplitudy  $\eta_e$  od współrzędnej  $n_2 = r/r_0$  dla  $\bar{\tau}_o < 0,50$  przy prędkości 160 km/h dla  $\bar{\tau}_o = 0,344$



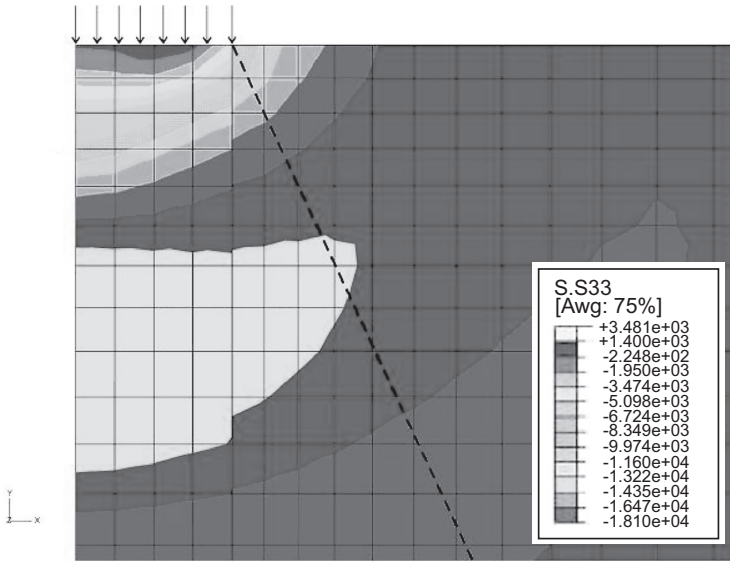
Rys. 20. Przykładowe zależności amplitudy  $\eta_\theta$  od współrzędnej  $n_2 = r/r_0$  dla  $\bar{\tau}_o < 0,50$ : a) przy prędkości 130 km/h dla  $\bar{\tau}_o = 0,423$ , b) przy prędkości 160 km/h dla  $\bar{\tau}_o = 0,344$

Strefa zgniotu w gruntach rozprzestrzenia się w graniastosłupie o nachyleniu powierzchni bocznych około 1:2. Optymalne warunki uplastycznienia (zerowanie naprężeń rozciągających) od dynamicznych naprężeń rozciągających wystąpią na głębokości  $0,45 \div 0,60$  m od spodu podkładu. W celu ilustracji problemu rozprzestrzeniania się naprężeń dynamicznych w podłożu podkładu posłużono się analizą numeryczną. Wykorzystano metodę elementów skończonych (MES) ABAQUS/Explicit w ujęciu dynamicznym. W wykorzystanym programie równania ruchu są całkowane według jawnego algorytmu opartego na metodzie różnic centralnych. Do obliczeń przyjęto model półprzestrzeni sprężystej liniowej, obciążonej równomiernym impulsem ciśnienia (por. wzór 32). Wartość impulsu przyjęto  $\sigma_{v_0} = -23$  kPa, co odpowiada przyrostowi obciążeń dynamicznych od wagonu towarowego przy prędkości 120 km/h w wyniku zróżnicowania sztywności podłoża szynowego ( $V = 0,3$ ). Czas działania impulsu wynosił  $\tau_0 = 0,01146$  s. W modelu uwzględniono warunki kołowej symetrii zadania. Siatka MES składała się z 2700 czterowęzłowych elementów obrotowo-symetrycznych typu CAX4. Przyjęte parametry do obliczeń (rys. 15): moduł sprężystości podłoża podkładu  $E = 254$  MPa, co odpowiada współczynnikowi sztywności podłoża  $C = 0,20$  N/mm<sup>3</sup>,  $\nu = 0,30$ ,  $r_0 = 0,3$  m, gęstość  $\rho = 1\,900$  kg/m<sup>3</sup>. Na rysunku 21 przedstawiono przebieg zmian naprężenia pionowego  $\sigma_z$  w punkcie położonym na osi symetrii na głębokości  $z = 1,05$  m.

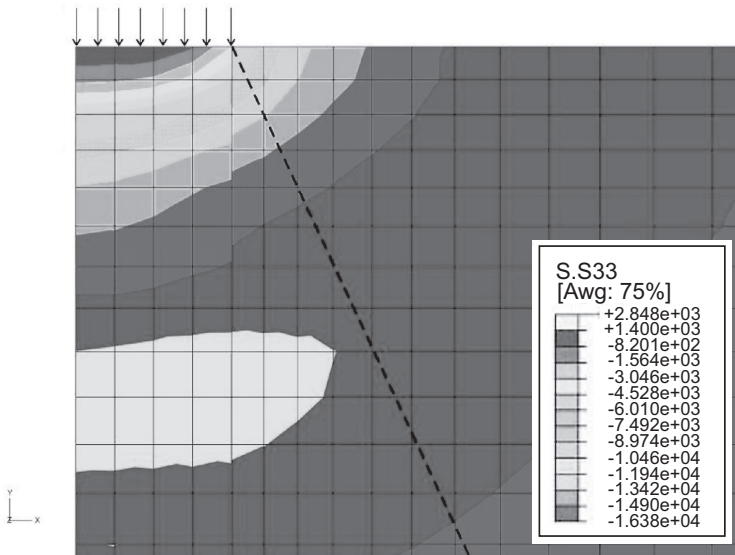


Rys. 21. Przebieg zmian naprężenia pionowego po przyłożeniu ciśnienia

Można tu wyróżnić dwie fazy: faza wymuszeń dla  $t < \tau_0$  oraz faza drgań własnych dla  $t > \tau_0$ . Wartość naprężenia średniego w fazie wymuszeń wynosi  $\sigma_z \approx 10,43$  kPa. Naprężenia obliczone wzorem (39) wynoszą  $\sigma_z \sim 11,5$  kPa. Naprężenia pionowe według teorii sprężystości są z reguły mniejsze w stosunku do półprzestrzeni gruntowej (większa koncentracja zgniotu wokół osi symetrii).



Rys. 22. Warstwie naprężeń obwodowych  $\sigma_\theta$  w chwili  $t = 2,65 \cdot 10^{-3}$  [s]



Rys. 23. Warstwie naprężeń obwodowych  $\sigma_\theta$  w chwili  $t = 3,31 \cdot 10^{-3}$  [s]

Rysunki 22 i 23 ilustrują przemieszczanie się strefy maksymalnych (rozciągających) naprężeń obwodowych  $\sigma_\theta$  w fazie drgań wymuszonych przy prędkości wagonu towarowego 120 km/h. Szare tło na omawianych rysunkach dotyczy stref, gdzie naprężenia przekraczają wartości 1,4 kPa. Taki poziom naprężeń określono na podstawie wzoru (53)

dla prędkości wagonu 120 km/h. Strefa maksymalnych naprężeń  $\sigma_\theta$  przesuwa się w dół, jednocześnie zmniejszając szerokość oddziaływania. Linią przerywaną zaznaczono strefę peryferyjną rozprzestrzeniania się dynamicznych i statycznych naprężeń zgniotu. Naprężenia rozciągające  $\sigma_\theta$  w strefie zgniotu zostaną zneutralizowane przez ściskające naprężenia statyczne. Naprężenia rozciągające  $\sigma_\theta$  w strefach peryferyjnych (poza strefą zgniotu) mogą być neutralizowane najwyżej naprężeniami poziomymi ściskającymi od ciężaru własnego nawierzchni i podtorza. Z tego względu obszary peryferyjne warstw ochronnych są potencjalnymi strefami uplastycznień. Tak więc podłoże podkładów w warunkach dynamicznych pracuje w stanie częściowego uplastycznienia, co potwierdza przydatność modelu Winklera w kolejnictwie. Zastosowana analiza numeryczna nie opisuje rzeczywistych naprężeń rozciągających z uwagi, że ścieżka ich osiągnięcia jest związana ze zmianą modułu sprężystości (proces fizycznie nieliniowy). Przytoczone wyniki rosyjskich i niemieckich badań (rys. 13, 14), potwierdzają kierunek rozwiązania tego problemu. Schemat obliczeniowy podłoża podkładu według rysunku 4 uwzględnia powyższe uwarunkowania tym bardziej, że był poddany weryfikacji doświadczalnej przy fundamentowaniu maszyn. Należy dodać, że w zakresie obciążeń statycznych również model Winklera dobrze opisuje zachowanie się podłoża podkładów w stosunku do modelu przestrzeni sprężystej. Podkłady są fundamentami małych rozmiarów, w podłożu których występują zjawiska „palowe”. W fundamentowaniu przyjmuje się, że według teorii sprężystości można analizować fundamenty o szerokości  $B > 0,7 \div 0,8$  m z uwagi na jego częściowe uplastycznienie. Tak więc sens fizyczny stosowania modelu Winklera w kolejnictwie jest historycznie dobrze uwarunkowany.

## 4. WNIOSKI

1. Wpływ stosowania podkładek wibroizolacyjnych pod podstawą podkładu betonowego realizuje się w dwóch wzajemnie sprzężonych obszarach: zmniejsza się rozkruszanie i ścieralność podsypki, następuje redukcja obciążenia podkładów.
2. W zakresie prędkości eksploatacyjnych pociągów towarowych przy współczynniku rezonansu  $\beta$  wahającym się wokół wartości 0,50, efekty rozkruszania przeważają nad redukcją obciążeń.
3. Wzrost efektów redukcji oddziaływań dynamicznych na tor występuje przy prędkościach o współczynniku rezonansu  $\beta \geq 0,50$ .
4. Dla pociągów pasażerskich efekty redukcji obciążeń będą większe w stosunku do rozkruszania, gdyż przy prędkościach eksploatacyjnych współczynnik rezonansu  $\beta \geq 0,50$ .
5. Podkładki obniżają częstotliwości własne drgań nawierzchni z podtorzem, co sprawia, że obciążenia globalne podkładów przy prędkościach progowych stają się impulsami dynamicznymi wzbudzającymi naprężenia rozciągające  $\sigma_\theta$ . Z tych względów korzystniejsze są pojazdy z wózkami o rozstawie osi umożliwiającym uwzględnienie ich wza-

- jemnego wpływu na ugięcia szyn. Prędkości progowe takich pojazdów są większe w stosunku do pojazdów dwuosiowych lub lokomotyw o większym rozstawie osi.
6. Model Winklera dobrze charakteryzuje podłoże podkładów, pracujące w stanie częściowego uplastycznienia przy obciążeniach dynamicznych.

## BIBLIOGRAFIA

1. Bałuch H.: *Wpływ przekładek podszytowych na trwałość przytwierdzeń szyn do podkładów*, „Problemy Kolejnictwa”, Warszawa, WKiŁ, 1984, z. 98;
2. Bukowski M.: *Interpretacja modelu Winklera i dynamiczne parametry toru kolejowego*, „Archiwum Inżynierii Lądowej”, 1990, z. 4.
3. Bukowski M.: *Problemy współpracy nawierzchni i podtorza*, „Problemy Kolejnictwa”, Warszawa, WKiŁ, 1987, z. 102.
4. Eisenmann J. (red.): *Forschungsarbeiten auf Gebiet des Eisenbahn – und Strassenoberbaus*, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf 1974.
5. Frišman M. A.: *Tor kolejowy i jego współpraca z pojazdami* [tłumaczenie z rosyjskiego], WKiŁ, Warszawa, 1983.
6. *Sleeper pads for ballasted track*, Getzner Werkstoffe GmbH, wrzesień, 2008.
7. Hružíkova M.: *The contribution of under sleeper pads to improvement of track geometry parameters*, I International Interdisciplinary Technical Conference of Young Scientists, April 2008, Poznań.
8. Kezdi A.: *Erddrucktheorien*, Springer-Verlag, Berlin, 1962.
9. Lysjuk W.S.: *Verojatosnnyje issledowanija žestkosti puti*, Viestnik VNIIZT, 6/1981.
10. Małyšev M. W.: *Pročnost gruntov i ustoičivost osnovanii soruženii*, Stroizdat, Moskwa, 1944.
11. Mattner L.: *Analyse von Versuchen mit Eisenbahnschotter und Simulationsberechnung der Gleislageverschlechterung unter einem oftmals oberrollenden Rad* [Praca doktorska], Technische Universität München, 1986.
12. Towpik K.: *Ocena oparcia toru kolejowego na podstawie tłumienia wymuszonych drgań podkładów*, „Archiwum Inżynierii Lądowej”, 1980, z. 3.
13. Wasiutyński A.: *Badania nad odkształceniami sprężystymi nawierzchni kolejowej i naprężeniami w szynach na posterunku doświadczalnym Włochy PKP*, Ministerstwo Komunikacji, Warszawa, 1937.
14. Witt S.: *The influence of under sleeper pads on railway track dynamics*, Linköping University, Institute of Technology. SE-581 83, Linköping, Sweden, 2008-06-16;
15. Zareckij M. J., Garičelov M. J.: *Głubinnoje uplotnienie gruntov*, Energoatomizdat, Moskwa, 1989.