

Modelowanie matematyczne siłowników hamulcowych przyczep rolniczych

ZBIGNIEW KAMIŃSKI

Politechnika Białostocka

W artykule opisano model matematyczny siłownika hamulcowego jako ostatniego elementu pneumatycznego w obwodzie przenoszącym układ hamulcowy przyczepy. W opisie matematycznym procesu napełniania komory roboczej siłownika uwzględniono wymianę ciepła z otoczeniem. W równaniu ruchu obciążenia zewnętrzne, pochodzące od mechanizmu hamulcowego i mechanizmu uruchamiania, zredukowano do tłoka siłownika. Model matematyczny siłownika może być wykorzystany w modelowaniu i symulacji cyfrowej dynamiki pneumatycznych układów hamulcowych pojazdów rolniczych i samochodowych.

1. Wprowadzenie

Ostatnimi elementami zespołu przenoszącego w powietrznych układach hamulcowych przyczep rolniczych są siłowniki pneumatyczne (najczęściej przeponowe). Oddziałują one poprzez mechanizmy uruchamiania typu korbowego na kołowe mechanizmy hamujące. Matematyczne ujęcie zjawisk towarzyszących procesowi napełniania i opróżniania komór siłowników pozwala określić zależności pomiędzy ciśnieniem, objętością i czasem trwania procesu. Dokładne określenie czasu napełniania lub opróżniania zmiennej objętości komory elementu wykonawczego ma ważne znaczenie, gdyż jest ściśle związane z dynamicznymi właściwościami mechanizmu hamującego jako obiektu sterowania.

Reakcja (obciążenie) obiektu sterowania na siłownik przejawia się w postaci siły zewnętrznej oporu użytecznego, przyłożonej do tłoczyska siłownika. Charakterystyka obiektu sterowania ma znaczący wpływ na procesy dynamiczne, zachodzące w pneumatycznych układach hamulcowych. W ogólnym przypadku siła zewnętrzna może być funkcją kilku parametrów: przemieszczenia, prędkości, częstotliwości, amplitudy zmiany ciśnienia itd.

Zależnie od stopnia złożoności zadania badawczego stosuje się różne modele matematyczne charakterystyk dla tych samych obiektów sterowania. W badaniu

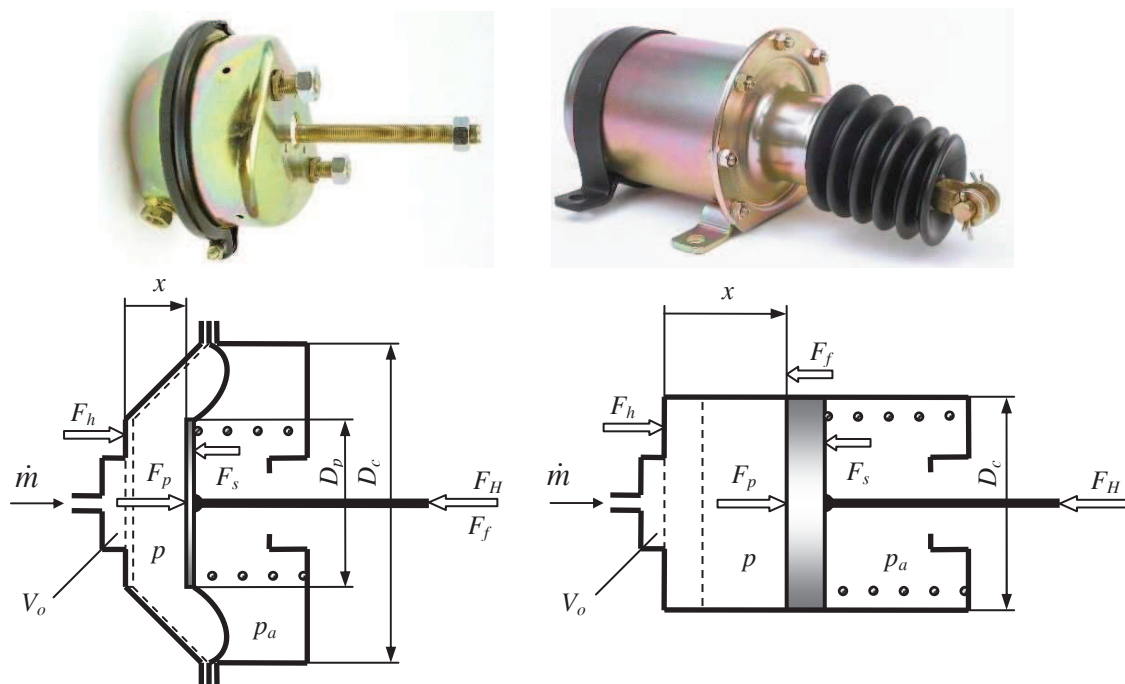
procesów dynamicznych, zachodzących w układach hamulcowych, w celu określenia szybkości i synchronii działania, dostatecznie dobre rezultaty otrzymuje się przy wykorzystaniu charakterystyk jednoparametrycznych, to jest takich, w których siła zewnętrzna F_H jest funkcją jednego parametru, najczęściej przemieszczenia x [2].

Określenie charakterystyki $F_H(x)$ w bezpośrednim pomiarze siły na tłoczysku lub dźwigni rozpieraka wymaga zamontowania siłomierza, co oznacza ingerencję w konstrukcję mechanizmu uruchamiania. Mając na uwadze niedogodności z wyznaczeniem reakcji obiektu sterowania oraz sumarycznej siły sprężyny powrotnej i membrany siłownika, przyjęto w niniejszej pracy, że siły te będą reprezentowane w modelu matematycznym za pomocą wypadkowej charakterystyki mechanizmu hamującego wraz z mechanizmem uruchamiania, określanej doświadczalnie na podstawie pomiaru ciśnienia w komorze siłownika i przemieszczenia tłoczyska. Zredukowana do sztywnika membrany charakterystyka obciążenia obejmuje również siłę potrzebną do przewijania membrany, zaś w przypadku siłowników tłokowych – siłę tarcia statyczno-kinetycznego tłoka o cylinder.

2. Model matematyczny

W tworzeniu uogólnionego modelu matematycznego siłownika hamulcowego (rys. 1) przyjęto następujące założenia upraszczające:

1. Połączenia przewodów z siłownikiem, jak i komora siłownika są doskonale szczelne.
2. Obciążenie masowe trzpienia siłownika pochodzące od mechanizmu uruchamiania i mechanizmu hamującego jest wyrażone za pomocą pewnej skupionej masy zredukowanej.
3. Siła obciążająca trzpień siłownika działa tylko w osi trzpienia, a odchylenie trzpienia od osi jest pomijalne.
4. Siły tarcia w mechanizmie uruchamiania (w tym tarcie w siłowniku) i mechanizmie hamującym są zredukowane do tłoka siłownika.
5. Powierzchnia efektywna siłownika, w tym i membranowego, ma wartość stałą w całym zakresie skoku.
6. Całkowite, zredukowane do tłoka, obciążenie $F_C(x)$ od mechanizmu hamulcowego wraz z mechanizmem uruchamiania jest wyznaczane doświadczalnie na podstawie pomiaru ciśnienia w komorze siłownika w funkcji przemieszczenia.
7. W bilansie sił działających na tłok pomija się siłę oddziaływania obudowy F_h (podczas hamowania tłok nie osiąga skoku maksymalnego, zaś oddziaływanie obudowy w końcowej fazie odhamowania jest mało istotne ze względu na cel symulacji); natychmiastowe zatrzymanie tłoka (hard stopping) dla $x \leq 0$ uzyskuje się poprzez zastosowanie logiki sterowania wartością przyspieszenia tłoka w skrajnych położeniach.



Rys. 1. Pneumatyczne siłowniki hamulcowe.

Fig. 1. Pneumatic brake actuators.

Zgodnie z zasadą zachowania materii zmiana masy w komorze roboczej V siłownika hamulcowego jest opisana równaniem:

$$\frac{dm_v}{dt} = \pm \dot{m} \quad (1)$$

gdzie: \dot{m} - strumień masowy dopływający (+) do komory V lub z niej wypływający (-) [kg/s].

Na podstawie zasady zachowania energii dla układów otwartych otrzymuje się, pomijając energię kinetyczną i potencjalną, równania zmiany energii wewnętrznej powietrza w objętości V w postaci:

$$\frac{dU}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} \pm \dot{H} \quad (2)$$

gdzie: U - energia wewnętrzna powietrza w komorze [J], H - entalpia strumienia dopływającego lub wypływającego z komory [J], W - praca zewnętrzna wykonana przez powietrze w komorze [J]:

$$U = m \cdot c_v T \quad \dot{H} = \dot{m} (c_p T + w^2 / 2) \quad W = -p \cdot dV \quad (3)$$

Po rozpisaniu różniczki energii wewnętrznej:

$$dU = c_v (dm \cdot T + m \cdot dT) \quad (4)$$

oraz wykorzystania równanie stanu gazu zapisanego w postaci różniczkowej:

$$R \left(\frac{dm}{dt} T + m \frac{dT}{dt} \right) = p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt} \quad (5)$$

uzyskuje się różniczkowe równania zmian ciśnienia i temperatury w komorze V :

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{V} \left[(\kappa - 1)(\dot{Q} \pm \dot{H}) - \kappa \cdot p \frac{dV}{dt} \right] \quad \dot{Q} = \alpha \cdot A_w (T_w - T) \quad (6)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T}{p \cdot V} \left(p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt} \mp RT \cdot \dot{m} \right) \quad (7)$$

gdzie: α - współczynnik przejmowania ciepła [W/m²K], A_w - powierzchnia przejmowania ciepła [m²].

Powierzchnia wymiany ciepła i objętość komory roboczej zmieniają się wraz z przemieszczeniem tłoka (sztywnika):

$$A_w = A_{wo} + a_w x \quad V = V_o + A_e x \quad (8)$$

gdzie: A_{wo} - początkowa powierzchnia wewnętrzna komory wyjściowej [m²], V_o - początkowa objętość komory wyjściowej [m³], a_w - współczynnik proporcjonalności, dla siłowników tłokowych $a_w = \pi D_c$, dla membranowych $a_w = 0$.

Objętość komory przeponowej zależy od podatności materiału przepony. Jej tworząca może w procesie odkształcenia być albo odcinkiem linii prostej, albo łukiem krzywej wybiegającej poza płaszczyznę sztywnika. W membranowych siłownikach hamulcowych zmiana objętości komory ma charakter liniowy, a więc wartości V_o i A_e można wyznaczyć na podstawie wykresów $V(x)$ podawanych przez producentów.

Dla wyznaczenia czasowych zmian objętości komory niezbędne jest równanie dynamiki ruchu elementu przesuwnego siłownika - tłoka lub sztywnika:

$$m_z \frac{d^2 x}{dt^2} = F_p - F_s + F_f + F_h - F_H \quad (9)$$

gdzie: m_z - masa ruchomych części siłownika, mechanizmu uruchamiania i mechanizmu hamującego zredukowana do tłoka [kg], F_s - siła napięcia sprężyny (dla siłownika przeponowego - sprężyny i przepony) [N], F_f - sumaryczna siła tarcia siłownika, mechanizmu uruchamiania i mechanizmu hamującego [N], F_H - siła oporu wyznaczana doświadczalnie na podstawie charakterystyki siłowej mechanizmu hamulcowego [N], F_h - siła oddziaływania obudowy w skrajnych położeniach tłoka [N].

W założeniach upraszczających przyjęto, że sumaryczna siła F_C obciążająca tłok (sztywnik membrany), a w zasadzie charakterystyka $F_C(x)$, będzie wyznaczana doświadczalnie na podstawie pomiaru ciśnienia w komorze siłownika oraz pomiaru przemieszczenia. Wówczas równanie (9) można sprowadzić do postaci:

$$m_z \frac{d^2 x}{dt^2} = F_p + F_v - F_C \quad (10)$$

gdzie: F_v - sumaryczna siła tarcia wiskotycznego siłownika, mechanizmu uruchamiania i mechanizmu hamującego [N].

Siłę ciśnienia działającego na tłok wylicza się z zależności:

$$F_p = A_e (p - p_a) \quad (11)$$

gdzie: A_e – pole powierzchni efektywnej siłownika [m^2], p – ciśnienie absolutne w komorze roboczej siłownika [Pa], p_a – ciśnienie atmosferyczne [Pa].

Sumaryczną siłę tarcia wiskotycznego można opisać zależnością liniową:

$$F_v = -k_v \frac{dx}{dt} \quad (12)$$

gdzie: k_v – zastępczy współczynnik proporcjonalności [Ns/m].

2. Doświadczalne wyznaczanie charakterystyki $F_C(x)$

Modyfikując model matematyczny charakterystyki $F_C(x)$, opisany w pracy [1], otrzymano jego postać rozbudowaną, w której początkowy wycinek charakterystyki jest aproksymowany linią prostą, a pozostała część – krzywą wykładniczą. Dla hamowania:

$$F_C(x) = \begin{cases} A_e \left[\frac{p_{hgr} - p_h}{x_{gr} - x_h} (x - x_h) + p_h \right] & \text{dla } x \leq x_{gr} \\ A_e \left[(p_{max} - p_{hgr}) \left(\frac{x - x_{gr}}{x_{max} - x_{gr}} \right)^{n_1} + p_{grh} \right] & \text{dla } x > x_{gr} \end{cases} \quad (13)$$

Dla odhamowania:

$$F_C(x) = \begin{cases} A_e \left[\frac{p_{ogr} - p_o}{x_{gr} - x_o} (x - x_o) + p_o \right] & \text{dla } x \leq x_{gr} \\ A_e \left[(p_c - p_{ogr}) \left(\frac{x - x_{gr}}{x_c - x_{gr}} \right)^{n_2} + p_{ogr} \right] & \text{dla } x > x_{gr} \end{cases} \quad (14)$$

gdzie: A_e – efektywna powierzchnia siłownika [m^2], n_1, n_2 – współczynniki doświadczalne dla hamowania i odhamowania, p_{max} – ciśnienie odpowiadające maksymalnemu przemieszczeniu x_{max} tłoka, p_{hgr}, p_h – ciśnienie odpowiadające współrzędnej x_{gr} końca i początku x_h liniowego wycinka krzywej hamowania, p_{ogr}, p_o – ciśnienie odpowiadające współrzędnej x_{gr} końca i początku x_o liniowego wycinka, p_c – ciśnienie odpowiadające współrzędnej tłoka x_c po hamowaniu częściowym; dla pełnego hamowania $p_c = p_{max}$, zaś $x_c = x_{max}$.

Ponieważ modelowanie obciążenia tłoka podczas hamowania i odhamowania, w tym częściowego, według zależności (13), (14) wymaga śledzenia i zapamiętywania wartości przemieszczenia x_c tłoka na końcu fazy hamowania, opracowano uproszczony wariant charakterystyki, wykorzystujący średnią wartość ciśnienia $p_{sr}(x)$ dla cyklu hamowanie-odhamowanie:

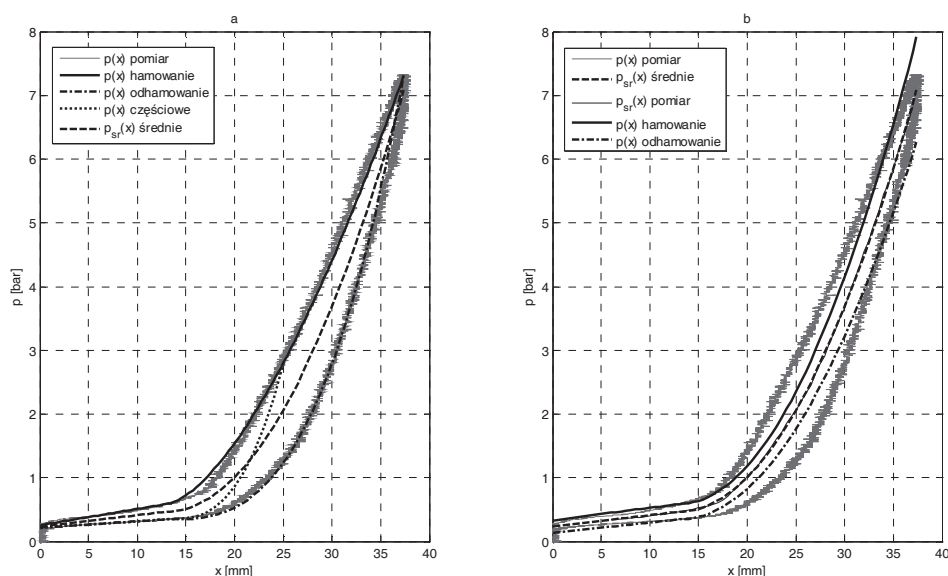
$$F_C(x) = A_e \{p_{sr}(x) \pm [m_0 + m_1 p_{sr}(x)]\} \quad (15)$$

Pętlę histerezy charakterystyki $p(x)$ uzyskano dodając (hamowanie) lub odejmując (odhamowanie) od średniej wartości ciśnienia $p_{sr}(x)$ wartość stałą m_0 i wartość iloczynu $m_1 \cdot p_{sr}(x)$ zależną od ciśnienia (obciążenia). Szerokość pętli histerezy wynika z sumarycznego tarcia w mechanizmie hamulcowym, mechanizmie uruchamiania i w samym siłowniku.

Zależność $p_{sr}(x)$ opisano również krzywą liniowo-wykładniczą:

$$p_{sr}(x) = \begin{cases} \frac{p_{gr} - p_{osr}}{x_{gr} - x_o} (x - x_o) + p_o & \text{dla } x \leq x_{gr} \\ (p_{\max} - p_{gr}) \left(\frac{x - x_{gr}}{x_{\max} - x_{gr}} \right)^n + p_{gr} & \text{dla } x > x_{gr} \end{cases} \quad (16)$$

gdzie: p_{gr} , p_{osr} – średnie ciśnienie odpowiadające współrzędnej x_{gr} końca i początku x_o liniowego wycinka krzywej cyklu hamowanie-odhamowanie.



Rys. 2. Charakterystyka obciążeniowa $p(x)$ osi przyczepy rolniczej T-653 firmy Pronar (jeden siłownik membranowy na oś – typ 16): a – model liniowo-wykładniczy, b – model uproszczony.

Fig. 2. Pressure displacement diagram $p(x)$ for agricultural trailer T-653 made by Pronar (S-cam brake type 16 one per axle): a – linear-exponential model, b – simplified model.

Wartości współczynników modelu charakterystyki wyliczono metodą bezgradientową simplex Neldera-Meada w procesie minimalizacji wskaźnika jakości FPE (Final Prediction Error) – ważonej sumy kwadratów odchyłeń wartości empirycznych $p_d(x)$ od wartości modelowych $p(x)$:

$$FPE = \sum_{i=1}^m \left[\frac{p_d(x) - p(x)}{\sqrt{p_d(x)}} \right]^2 \quad (17)$$

aż do osiągnięcia żądanej dokładności obliczeń. Obliczenia wykonano w programie komputerowym Matlab. Przykładowe zależności empiryczne charakterystyki $p_d(x)$ dla hamowania i odhamowania oraz zależności modelowe $p(x)$ dla osi hamowanej przyczepy dwuosiowej T-653 firmy Pronar o ładowności 4000 kg pokazano na rysunku 2.

4. Podsumowanie

Opisany model matematyczny siłownika osi hamowanej może być wykorzystany do budowy podsystemu funkcjonalno-strukturalnego na potrzeby symulacji cyfrowej dynamiki powietrznych układach hamulcowych przyczep pojazdów rolniczych i samochodowych. W równaniach modelu siłownika uwzględniono wymianę ciepła z otoczeniem.

Badania istotności wskaźnika determinacji ($R^2 > 99\%$) za pomocą testu t-Studenta potwierdziły adekwatność modeli matematycznych liniowo-wykładniczej charakterystyki $p(x)$ dla hamowania (13) i odhamowania (14) oraz modelu uśrednionego (16). Podstawową zaletą zaproponowanej koncepcji wykorzystania charakterystyki $p(x)$ do oszacowania zredukowanych do tłka sił oporu $F_c(x)$ jest przede wszystkim łatwość jej doświadczalnego wyznaczenia nawet w warunkach przemysłowych. Ze wstępnych badań symulacyjnych wynika, że zastosowanie modelu (15), mimo jego mniejszej dokładności, znacząco przyspiesza obliczenia numeryczne.

Literatura

- [1] KAMIŃSKI Z.: *Modelowanie charakterystyki siłowej bębnowych mechanizmów hamujących przyczep rolniczych*. Archiwum motoryzacji 2008, nr 1, s. 45-50.
- [2] METLJUK M.F., AVTUŠKO V.P.: *Dinamika pnevmatičeskich i gidravličeskich privodov automobilej*. Mašinostroenije, Moskva 1980.

Mathematical modelling of the brake actuators in the agricultural trailers

S u m m a r y

The mathematical model of the brake actuator as the last pneumatic element in transmission device of the trailer brake system was described in this paper. The heat exchange in the actuator chamber was included into the model. Forces in the equation of motion from a drum brake and application mechanism were reduced to the piston. The mathematical model can be used for the numerical simulation of the dynamic of air brake systems in agricultural trailers and other vehicles.