

Binieliniowa teoria obliczania konstrukcji warstwowych

FRANCISZEK ROMANÓW

Uniwersytet Zielonogórski
fromanow@ibmp.uz.zgora.pl

W pracy wyprowadzono uogólnione równania różniczkowe opisujące małowyniosłe powłoki i płyty warstwowe. Przedstawiona analiza oparta jest na trójosiowym nieliniowym stanie przemieszczeń rdzenia (hiperboliczna hipoteza) oraz na geometrycznej nieliniowej teorii. Równania wyprowadzono na podstawie równań równowagi elementu warstwowego. W końcowej części artykułu przeprowadzono dyskusję i pokazano zastosowanie tej teorii dla prostych przypadków powłok i płyt.

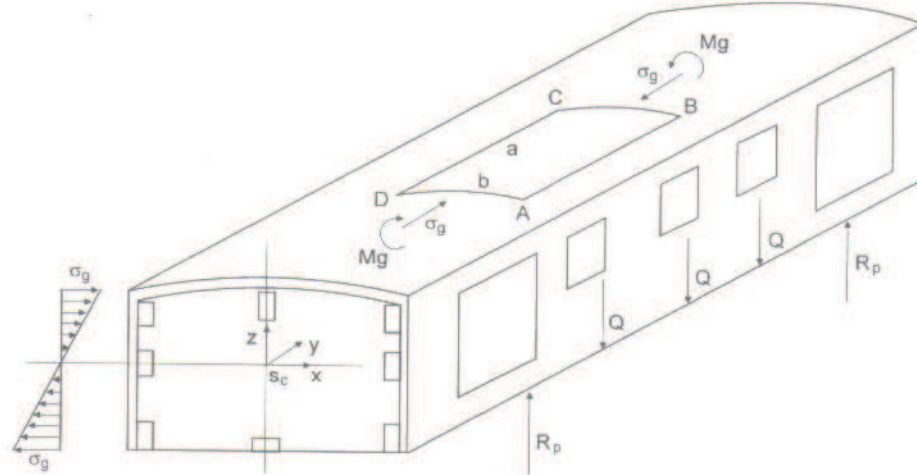
1. Wstęp

Konstrukcje warstwowe charakteryzują się wieloma istotnymi zaletami. Są przede wszystkim stosunkowo lekkie, wytrzymałe, sztywne, dobrze tłumią drgania mechaniczne i akustyczne. Z tych powodów inżynierowie coraz częściej wykorzystują je do budowy maszyn i urządzeń oraz w budownictwie. W ostatnich latach z tych konstrukcji tworzy się nadwozia samochodowe, kadłuby statków morskich i powietrznych.

Dotychczasowe metody obliczania takich konstrukcji oparte są na ogół na tzw. hipotezie linii łamanej [2]. Oznacza to, że przemieszczenia rdzenia w płaszczyźnie konstrukcji są liniowymi związkami zmiennej w kierunku grubości. Implikuje to liniową hipotezę Kirchhoffa-Love zarówno dla okładzin jak i do rdzenia. W kierunku prostopadłym do powierzchni przyjmuje się, że rdzeń jest nieskończenie sztywny $E_r = \infty$. Teoria obliczania konstrukcji oparta na tych założeniach może być stosowana tylko do tzw. cienkich konstrukcji.

Nadwozia samochodowe budowane są na ogół z powtarzalnych elementów typu tarcza płyta lub powłoka (np. dach wyoblony). Na rys.1 przedstawione jest nadwozie autobusu lub wagonu, którego np. fragment dachu można sprowadzić do płyty (płaski dach) lub powłoki (dach wyoblony).

Taki fragment dachu może być np. ściskany siłami pochodzącymi od zginania całego autobusu. Ten sam fragment może być obciążony również siłami stycznymi, będącymi efektem skręcania nadwozia podczas przejeżdżania po nierównościach drogi. Podobnie można wydzielić fragment podłogi lub ściany bocznej, które mogą być w różny sposób obciążone.

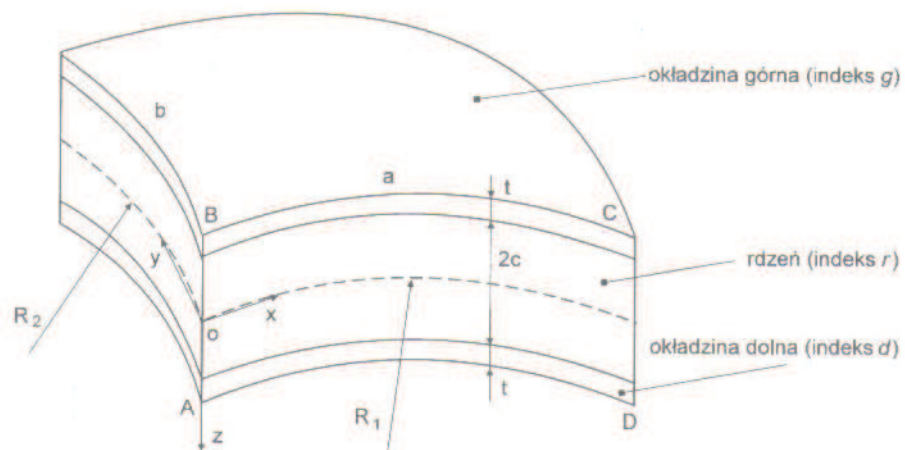


Rys. 1. Autobus, którego fragment dachu może być sprowadzony do otwartej powłoki cylindrycznej
Fig. 1. A bus in which part of the roof can be reduced to an open cylindrical shell

Przedstawiona w niniejszej pracy teoria obliczania konstrukcji warstwowych oparta jest nie na hipotezie linii łamanej, lecz na nieliniowym stanie przemieszczeń rdzenia oraz na geometrycznie nieliniowej teorii, czyli na nieliniowych związkach między odkształceniem i przemieszczeniem. Stąd, dla scharakteryzowania tej uogólnionej teorii w temacie wyeksponowano określenie binieliniowa (podwójnie nieliniowa) teoria.

2. Nieliniowy stan przemieszczeń rdzenia

W celu uogólnienia rozważań, oparte one będą na fragmencie konstrukcji typu małowyniosłej powłoki o promieniach R_1 i R_2 . Taki fragment wraz z odnośnymi oznaczeniami przedstawia rys. 2.



Rys. 2. Małowyniosła powłoka wraz z podstawowymi oznaczeniami
Fig. 2. A shallow shell with basic notations

Powłoka wykonana jest z dwóch okładzin zewnętrznych metalowych, zaś rdzeń z miękkich pianek, które są traktowane jako jednorodne i izotropowe. Podstawowe oznaczenia to E, G, ν , czyli moduł Younga, moduł Kirchhoffa i współczynnik Poissona. Indeks r odnosić się będzie do rdzenia. Odształconą powłokę w płaszczyźnie $x-z$ w sposób uproszczony przedstawia rys 3.

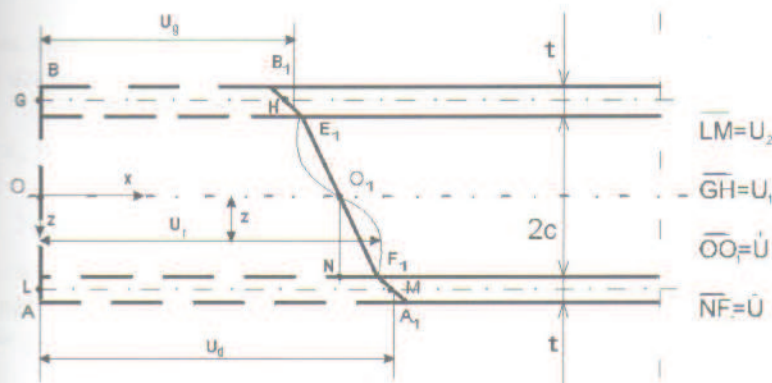


Fig. 3. Ilustracja hipotezy linii łamanej (proste odcinki $B_1 E_1, E_1 O_1, O_1 F_1$ i $F_1 A_1$) oraz hipotezy hiperbolicznej (linia krzywa)
 Fig. 3. Illustration of the broken line hypothesis (straight segments B_1, E_1, O_1, F_1, A_1) and the hyperbolic hypothesis – the curved line

Linia przerywaną przedstawiono przekrój powłoki w płaszczyźnie $x-z$ przed odkształceniem, zaś linią ciągłą po odkształceniu.

Przyjmijmy, że środkowa płaszczyzna górnej okładziny przemieściła się wzdłuż osi x o wielkość $\overline{GH} = U_1 = U_1(x, y)$, zaś dolna odpowiednio o $\overline{LM} = U_2 = U_2(x, y)$. Obie okładziny ugięły się (przemieszczenie wzdłuż osi z) odpowiednio o $W_1 = W_1(x, y); W_2 = W_2(x, y)$ (na rys. nie zaznaczono).

Hipoteza liniowa (linia łamana $B_1 E_1 O_1 F_1 A_1$) oznacza, że przemieszczenia punktów leżących początkowo na prostej BA przemieszczają się w kierunku osi x zgodnie z prostą łamaną $B_1 E_1 O_1 F_1 A_1$.

Jeżeli uwzględni się, iż rdzeń w kierunku osi z jest odkształcalny, to jego przemieszczenie w kierunku osi x opisane będzie nieliniową funkcją, której geometryczny obraz przedstawia linia krzywa $E_1 O_1 F_1$ [1,3].

Stan przemieszczenia konstrukcji warstwowej opisuje się funkcjami [1]:

a) w kierunku osi x (g – górna okładzina, d – dolna okładzina)

$$U_g = U_1 - \left(z + c + \frac{t}{2} \right) \dot{W}_1; \quad (-c-t) \leq z \leq c \quad *)$$

$$U_d = U_2 - \left(z - c - \frac{t}{2} \right) \dot{W}_2; \quad c \leq z \leq c+t \quad (1)$$

*) kropki oznaczają pochodną względem x ; przecinki – względem y oraz daszek względem z

$$U_r = \dot{U} - \frac{z}{c} \left(\bar{U} - \frac{t}{2} \dot{W}_{1,2} \right) F(z); \quad -c \leq z \leq 0; \quad 0 \leq z \leq c$$

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial x}; \quad W' = \frac{\partial W}{\partial y}; \quad \hat{W} = \frac{\partial W}{\partial z}$$

b) w kierunku osi y

$$V_g = V_1 - \left(z + c + \frac{t}{2} \right) W'_1;$$

$$V_d = V_2 - \left(z - c - \frac{t}{2} \right) W'_2;$$

$$V_r = \dot{V} - \frac{z}{c} \left(\bar{V} - \frac{t}{2} W'_{1,2} \right) S(z) \quad (2)$$

c) przemieszczenie rdzenia w kierunku osi z

$$W_{r,z} = W_{1,2} \cdot T(z) \quad \text{dla} \quad -c \leq z \leq 0; \quad 0 \leq z \leq c \quad (3)$$

gdzie

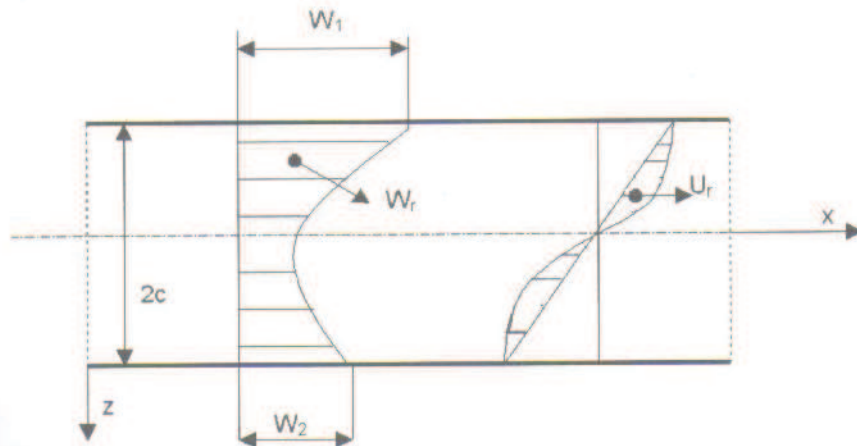
$$\dot{U} = \frac{U_1 + U_2}{2}; \quad \bar{U} = \frac{U_1 - U_2}{2}; \quad \dot{V} = \frac{V_1 + V_2}{2}; \quad \bar{V} = \frac{V_1 - V_2}{2}$$

$$F(z) = H_1 \cosh \lambda_1 z + H_2 \frac{\sinh \lambda_1 z}{z}$$

$$S(z) = H_3 \cosh \lambda_1 z + H_4 \frac{\sinh \lambda_1 z}{z} \quad (4)$$

$$T(z) = H_5 \cosh \lambda_1 z + H_6 \sinh \lambda_1 z$$

Stałe $H_1, \dots, H_6; \lambda_1$, można znaleźć w pracy [1].



Rys. 4. Ilustracja przemieszczenia rdzenia w zależności od zmiennej z : W_r – w kierunku poprzecznym (w kierunku osi z); U_r – w kierunku osi x .

Fig. 4. An illustration of the z -dependence of the core displacement: W_r – in the transversal direction (z -direction)

W ten sposób funkcje (1)₃; (2)₃; (3) oraz (4) opisują nieliniowy (hiperboliczny) stan przemieszczeń rdzenia, tak jak to przedstawiono na rys. 4.

3. Związki geometryczne, prawo Hooke'a i obciążenia wewnętrzne (obciążenia przekrojowe)

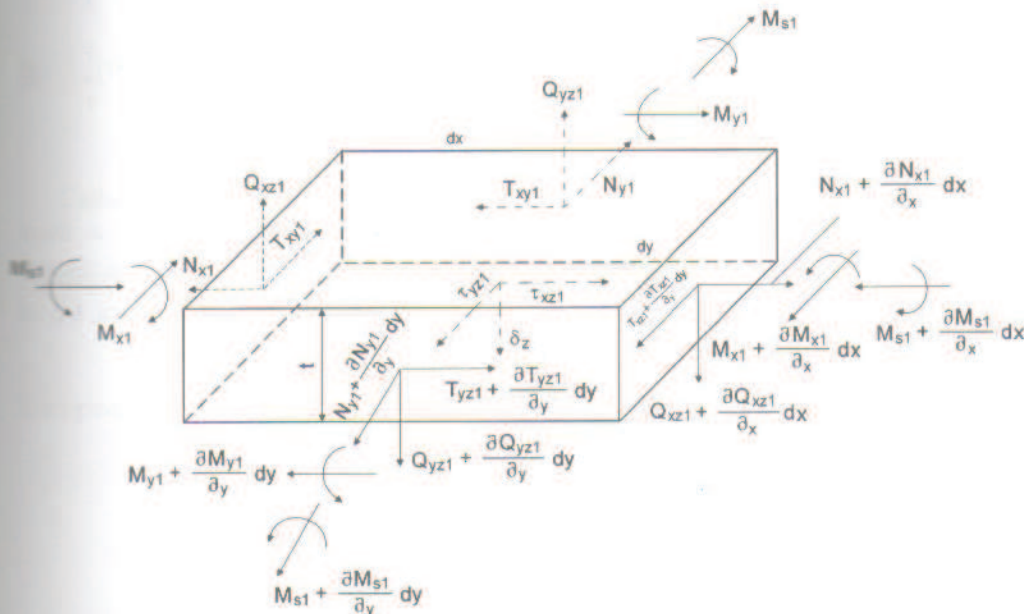
Związki geometryczne wiążące odkształcenia i przemieszczenia zarówno dla okładzin jak i dla rdzenia są nieliniowymi funkcjami i opisane są wzorami:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \dot{U} + \frac{1}{2}(\dot{W})^2 - \frac{W}{R_1}; & \varepsilon_y &= V' + \frac{1}{2}(W')^2 - \frac{W}{R_2}; & \varepsilon_z &= \hat{W} + \frac{1}{2}(\hat{W})^2; \\ \gamma_{yx} &= U' + \dot{V} + \dot{W}W'; & \gamma_{xz} &= \hat{U} + \hat{W} + \hat{W}\hat{W}'; & \gamma_{yz} &= \hat{V} + W' + W'\hat{W}. \end{aligned} \quad (5)$$

Podobne związki dla rdzenia opisuje się tak samo, tylko odpowiednie odkształcenia i przemieszczenia posiadają indeks r . Odpowiednim odkształceniom odpowiadają naprężenia w postaci związków fizycznych (prawo Hooke'a).

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); & \delta_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x); & \delta_z &= E\varepsilon_z \\ \tau_{x,y} &= G\gamma_{x,y}; & \tau_{y,z} &= G\gamma_{y,z}; & \tau_{x,z} &= G\gamma_{x,z} \end{aligned} \quad (6)$$

Na podstawie związków (5), (6) można policzyć wszystkie obciążenia wewnętrzne (siły i momenty) działające na nieskończenie mały element konstrukcji dx , dy , dz . Dla przykładu taki element górnej okładziny o grubości t został przedstawiony na rys. 5



Rys. 5. Obciążenia działające na górną okładzinę
Fig. 5. Loads acting upon the upper facing

Można wykazać [1], że siły normalne N oraz momenty M w rdzeniu są równe zeru. Ze względu na to, że własności mechaniczne (E_r , G_r , ν_r) dla rdzenia w stosunku do podobnych własności okładzin są bardzo małe, to można przyjąć *a priori*, że $N_r = M_r = 0$.

Siły jednostkowe w okładzinach działające wzdłuż osi x i y oraz siły styczne dla obu okładzin wyliczy się ze wzorów:

$$N_{x1,2} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \delta_{x1,2} dz; \quad N_{y1,2} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \delta_{y1,2} dz; \quad T_{xy1,2} = G \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \gamma_{xy} dz.$$

Uwzględniając wzory (6), (5) oraz (1)₁, uzyska się

$$\begin{aligned} N_{x1,2} &= B^* \left[U_{1,2}^* + \nu V_{1,2}' - \frac{W_{1,2}}{R_1} - \nu \frac{W_{1,2}}{R_2} + \frac{1}{2} (W_{1,2}^{*2} + \nu W_{1,2}'^2) \right]; \\ N_{y1,2} &= B^* \left[V_{1,2}' + \nu U_{1,2}^* - \frac{W_{1,2}}{R_2} - \nu \frac{W_{1,2}}{R_1} + \frac{1}{2} (W_{1,2}'^2 + \nu W_{1,2}^{*2}) \right]; \\ T_{xy1,2} &= \frac{B^*(1-\nu)}{2} (U_{1,2}^* + \dot{V}_{1,2}' + \dot{W}_{1,2}^* W_{1,2}'). \end{aligned} \quad (7)$$

Wypadkowe siły są sumą sił działających w obu okładzinach

$$\begin{aligned} N_x = N_{x1} + N_{x2} &= 2B^* \left[\dot{U}^* + \nu \dot{V}' - \frac{\dot{W}}{R_1} - \frac{\nu}{R_1} \dot{W} + \frac{1}{2} (\dot{W}^{*2} + \dot{W}^{\prime 2}) + \frac{\nu}{2} (\dot{W}'^2 + \dot{W}^{*2}) \right] \\ N_y = N_{y1} + N_{y2} &= 2B^* \left[\dot{V}' + \nu \dot{U}^* - \frac{\dot{W}}{R_1} - \frac{\nu}{R_1} \dot{W} + \frac{1}{2} (\dot{W}'^2 + \dot{W}^{\prime 2}) + \frac{\nu}{2} (\dot{W}^{*2} + \dot{W}^{*2}) \right] \\ T_{xy} = T_{xy1} + T_{xy2} &= B^*(1-\nu) [\dot{U}' + \dot{V}^* + (\dot{W}^* \dot{W}' + \dot{W}^{\prime} \dot{W}^*)] \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie: $B^* = \frac{Et}{1-\nu^2}$.

Podobnie można policzyć momenty gnące i momenty skręcające okładzin względem osi własnych. Moment gnący dolnej okładziny względem osi własnej wylicza się ze wzoru:

$$M_{xd} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \delta_{xd} z dz;$$

a po uwzględnieniu (6) oraz (1)₂ uzyska się

$$M_{xd} = -D(W_2^{**} + \nu W_2'').$$

Podobnie obliczając momenty gnące i momenty skręcające dla górnej okładziny i po zsumowaniu otrzyma się:

$$\mathbf{M}_{x1} = -2D(\dot{W}'' + \nu \dot{W}'''); \quad \mathbf{M}_{y1} = -2D(\dot{W}'' + \nu \dot{W}'''); \quad \mathbf{M}_{s1} = -2D(1-\nu)\dot{W}'' \quad (9)$$

Dla pełnego stanu obciążeń wewnętrznych elementu powłoki warstwowej potrzebne są jeszcze siły poprzeczne w rdzeniu \mathbf{Q}_{x1r} oraz \mathbf{Q}_{y1r} . Odształcenie postaciowe γ_{x1r} zgodnie z (5) po uwzględnieniu (1)₃; (4) oraz (3) zapisuje się wzorem

$$\gamma_{x1r} = -\frac{1}{c} \left(\bar{U} - \frac{1}{2} t \dot{W} \right) [F(z) + z \hat{F}(z)] + \dot{W} \mathbf{T}(z) + W \dot{W} \mathbf{T}(z) \hat{T}(z).$$

Siła poprzeczna określona jest całką

$$\mathbf{Q}_{x1r} = G_r \int_{-c}^c \gamma_{x1r} dz.$$

Postępując podobnie z γ_{y1r} i \mathbf{Q}_{y1r} i po scałkowaniu uzyskamy następujące wyrażenia na:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{x1r} &= -2G_r(\bar{U}F_c - K_x \dot{W}), \\ \mathbf{Q}_{y1r} &= -2G_r(\bar{V}S_c - K_y W'), \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} K_x &= K_{x1} + \frac{1}{2} t F_c; \quad K_y = K_{y1} + \frac{1}{2} t S_c \\ K_{x1} &= \frac{H_5}{\lambda_1} \text{sh} \lambda_1 c + \frac{H_6}{\lambda_1} \left(\text{cch} \lambda_1 c - \frac{\text{sh} \lambda_1 c}{\lambda_1} \right) \\ F_c &= H_1 \text{ch} \lambda_1 c + \frac{H_2}{c} \text{sh} \lambda_1 c \\ S_c &= H_3 \text{ch} \lambda_1 c + \frac{H_4}{c} \text{sh} \lambda_1 c. \end{aligned}$$

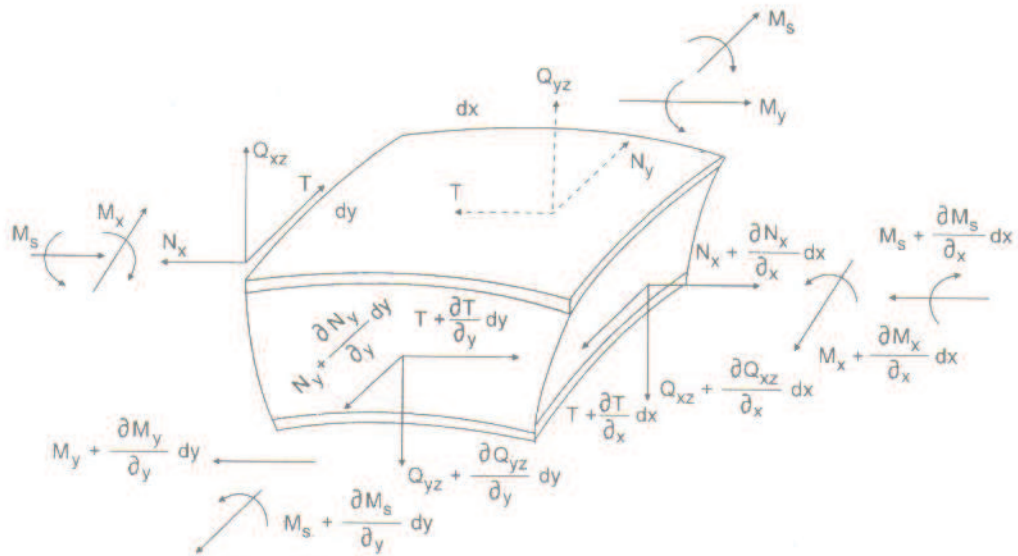
Całkowita siła poprzeczna w elemencie warstwowym jest równa sumie sił poprzecznych w poszczególnych warstwach. Na przykład, dla płaszczyzny xz siła poprzeczna opisuje się wzorem:

$$\mathbf{Q}_{xz} = \dot{\mathbf{M}}_{x1} + \mathbf{M}'_{s1} - \frac{t}{2} [(\dot{\mathbf{N}}_{x1} - \dot{\mathbf{N}}_{x2}) + (\mathbf{T}'_{xy1} - \mathbf{T}'_{xy2})] - \mathbf{Q}_{x1r}.$$

Uwzględniając wzory (7) oraz (9) uzyska się:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{xz} &= -2G_r(\bar{U}F_c - K_x \dot{W}) - 2D(\dot{W}'''' + \dot{W}''''') + \\ &\quad - t \mathbf{B}' \left(\bar{U}'' + \frac{1-\nu}{2} \bar{U}'' + \frac{1+\nu}{2} \bar{V}'' \right) \\ \mathbf{Q}_{yz} &= -2G_r(\bar{V}S_c - K_y W') - 2D(\dot{W}'''' + \dot{W}''''') + \\ &\quad - t \mathbf{B}' \left(\bar{V}'' + \frac{1-\nu}{2} \bar{V}'' + \frac{1+\nu}{2} \bar{U}'' \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Tak określany stan przemieszczeń obciążeń wewnętrznych działających na nieskończenie mały element powłoki przedstawiony został na rys 6.



Rys 6. Obciążenia wewnętrzne działające na element powłoki
Fig. 6. Internal loads in the shell element

4. Różniczkowe równania równowagi elementu powłoki

Na podstawie rys. 6 można wyprowadzić różniczkowe równania równowagi. Z sumy rzutów wszystkich sił na osie x i y uzyska się:

$$\dot{N}_x + T'_{xy} = 0; \quad N'_y + \dot{T}_{xy} = 0. \quad (12)$$

Z równania równowagi momentów względem osi x i y wynika, że

$$\dot{M}_x + M'_s = Q_{xz}; \quad M'_y + \dot{M}_s = Q_{yz} \quad (13)$$

Aby element powłoki był w równowadze, oprócz warunków (12) i (13), suma rzutów wszystkich sił na oś z ma być również równa zero.

$$\frac{N_x}{R_1} + \frac{N_y}{R_2} + \dot{Q}_{xz} + Q'_{yz} = -N_x^* \ddot{W}^{**} - N_y^* \dot{W}'' - 2T^* \dot{W}^{**} - q \quad (14)$$

Podstawiając do równań (12) zależności określone przez (8), uzyska się równania (12), które wyrażone będą przez przemieszczenia:

$$\begin{aligned} & 2\ddot{U}^{**} + (1-\nu)\ddot{U}'' + (1+\nu)\dot{V}^{**} - 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)\dot{W}^* + \\ & + (1+\nu)(\dot{W}'\dot{W}^{**} + \dot{W}'\dot{W}^{**}) + \\ & + 2\dot{W}^*\dot{W}^{**} + 2\dot{W}^*\dot{W}^{**} + (1-\nu)(\dot{W}^*\dot{W}'' + \dot{W}^*\dot{W}''') = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
& 2\dot{V}'' + (1-\nu)\dot{V}'' + (1+\nu)\dot{U}'' - 2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1}\right)\dot{W}' + \\
& + (1+\nu)(\dot{W}'\dot{W}'' + \bar{W}'\bar{W}'') + \\
& + 2(\dot{W}'\dot{W}'' + \bar{W}'\bar{W}'') + (1-\nu)(\dot{W}'\dot{W}'' + \bar{W}'\bar{W}'') = 0
\end{aligned} \quad (16)$$

Ażeby równania (13) wyrazić podobnie jak (12) przez przemieszczenia, należy określić momenty gnące \mathbf{M}_x i \mathbf{M}_y oraz moment skręcający M_z względem osi przechodzącej przez środek elementu warstwowego. Moment gnący dolnej okładziny względem środkowej osi rdzenia wylicza się ze wzoru.

$$\mathbf{M}_{xd} = \int_c^{c+t} \delta_{xd} z dz \quad (17)$$

Uwzględniając (6) i (5) oraz (2), uzyskuje się:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{xd} = \frac{E}{1-\nu^2} \int_c^{c+t} \left[(\dot{U}_2 z - \left(z^2 - cz - \frac{t}{2}z\right) W_2'' + \frac{1}{2} \dot{W}_2^2 z - \frac{W_2}{R_1} z + \nu V_2' z + \right. \\
\left. - \nu \left(z^2 - cz - \frac{t}{2}z\right) W_2'' + \frac{1}{2} \nu W_2^2 z - \nu \frac{W_2}{R_2} z \right] dz.
\end{aligned}$$

Po scałkowaniu i po obliczeniu podobnej całki dla górnej okładziny i po ich zsumowaniu uzyskuje się moment gnący względem osi x . Licząc tak samo moment gnący względem osi y oraz moment skręcający, uzyskuje się:

$$\mathbf{M}_x = -2B^* \lambda (\bar{U}'' + \nu \bar{V}'') - 2D (\dot{W}'' + \nu \dot{W}'') + \quad (18)$$

$$-2B^* \lambda (\dot{W}'\bar{W}'' + \nu \dot{W}'\bar{W}'') + 2B^* \lambda \left(\frac{\bar{W}}{R_1} + \nu \frac{\bar{W}}{R_2} \right);$$

$$\mathbf{M}_y = -2B^* \lambda (\bar{V}' + \nu \bar{U}'') - 2D (\dot{W}'' + \nu \dot{W}'') + \quad (19)$$

$$-2B^* \lambda (\dot{W}'\bar{W}'' + \nu \dot{W}'\bar{W}'') + 2B^* \lambda \left(\frac{\bar{W}}{R_2} + \nu \frac{\bar{W}}{R_1} \right);$$

$$\mathbf{M}_z = -2D(1-\nu)\dot{W}'' - B^*(1-\nu)\lambda(\bar{U}' + \bar{V}'') + \quad (20)$$

$$-\lambda B^*(1-\nu)(\dot{W}'\bar{W}'' + \bar{W}'\dot{W}'')$$

gdzie: $D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$ $\lambda = c + \frac{t}{2}$.

Podstawiając (18); (19); (20) do równań (13) otrzymamy dwa następujące różniczkowe równania równowagi elementu. Równania te wyrażone są przez przemieszczenia:

$$\begin{aligned}
& B^* c \left(\bar{U}'' + \frac{1-\nu}{2} \bar{U}'' + \frac{1+\nu}{2} \bar{V}'' \right) + G_r (-\bar{U} F_c + K_x \dot{W}'') + B^* \lambda \left\{ -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) \bar{W}'' + \right. \\
& + [\dot{W}''\bar{W}'' + \dot{W}'\bar{W}'' + \nu(\dot{W}'\bar{W}'' + \bar{W}'\dot{W}'') + (1-\nu)(\dot{W}''\bar{W}'' + \dot{W}'\bar{W}'' + \\
& \left. + \bar{W}''\dot{W}' + \bar{W}'\dot{W}'') \right\} = 0
\end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& B^*c \left(\bar{V}'' + \frac{1-\nu}{2} \bar{V}'' + \frac{1+\nu}{2} \bar{U}'' \right) + G_c (-\bar{V}S_c + K_y \bar{W}') + B^*\lambda \left\{ -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right) \bar{W}' + \right. \\
& \quad \left. + \bar{W}'' \bar{W}' + \bar{W}' \bar{W}'' + \nu (\bar{W}'' \bar{W}'' + \bar{W}' \bar{W}''') \right\} + \\
& \quad + \frac{1-\nu}{2} (W' \bar{W}'' + \bar{W}'' \bar{W}' + \bar{W}' \bar{W}'' + \bar{W}'' \bar{W}') = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Podstawiając do równania (14) wyrażenia określone równaniami (8) oraz (11) uzyskuje się piąte równanie równowagi:

$$\begin{aligned}
& 2B^* \left\{ \frac{1}{R_1} \left[\bar{U}'' + \nu \bar{V}'' - \frac{\bar{W}'}{R_1} - \frac{\nu}{R_2} \bar{W}' + \frac{1}{2} (\bar{W}''^2 + \bar{W}'^2) + \frac{\nu}{2} (\bar{W}''^2 + \bar{W}'^2) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{R_2} \left[\bar{V}'' + \nu \bar{U}'' - \frac{\bar{W}'}{R_2} - \frac{\nu}{R_1} \bar{W}' + \frac{1}{2} (\bar{W}''^2 + \bar{W}'^2) + \frac{\nu}{2} (\bar{W}''^2 + \bar{W}'^2) \right] \right\} + \\
& \quad - tB^*\Delta^2 (\bar{U}'' + \bar{V}'') - 2D\Delta^4 \bar{W} - 2G_c (\bar{U}'' F_c - K_x \bar{W}'' + \bar{V}'' S_c - K_y \bar{W}'') = \\
& \quad - N_x^* \bar{W}'' - N_y^* \bar{W}'' - 2T^* \bar{W}'' - q = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

Przez N_x^* , N_y^* , T^* oznaczono obciążenia zewnętrzne do krytyczne zaś q oznacza obciążenia poprzeczne.

Równania (15); (16); (21); (22); (23) opisują równowagę małowyniosłej powłoki warstwowej z uwzględnieniem trójosiowego nieliniowego stanu przemieszczeń rdzenia (hipoteza hiperboliczna) oraz nieliniowych związków między odkształceniami i przemieszczeniami (geometrycznie nieliniowa teoria).

5. Przypadki szczególne

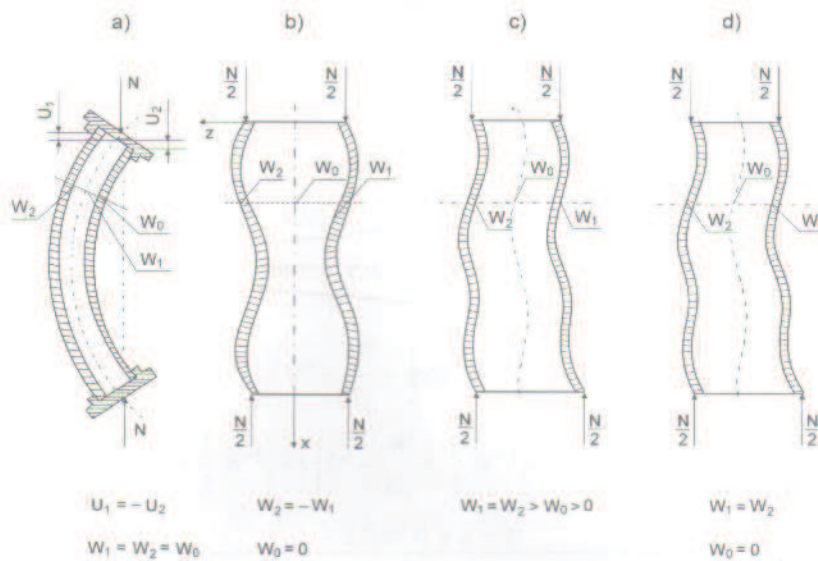
Posługiwanie się bezpośrednio równaniami (15);(16);(21);(22) i (23) jest nadzwyczaj trudne. Dla szczególnych przypadków powłok i płyt dadzą się one znacznie uprościć.

5.1. Asymetryczna forma odkształconej konstrukcji warstwowej

Dla konstrukcji warstwowej obciążonej zewnętrznymi siłami N_x^* , N_y^* , T^* formą odkształcenia konstrukcji po utracie stateczności jest podstawowa forma (asymetryczna) [1, 4] pokazana na rys. 7c. Charakteryzuje się ona tym, że $W_1 = W_2 > W_0$, $U_1 = -U_2$ oraz $V_1 = -V_2$.

Powoduje to, że składowe przemieszczeń $\bar{W} = \bar{U} = \bar{V} = 0$, zaś pozostałe przemieszczenia określone są przez W , U i V . Postać miejscowa symetryczna i asymetryczna (rys. 7b i d) charakteryzuje się tym, że poszczególne punkty leżące na środkowej płaszczyźnie nie przemieszczają się w kierunku poprzecznym. Obie okładziny odkształcają się niezależnie od siebie i można je traktować jak jednorodne płyty na sprężystej półprze-strzeni. Stan przemieszczeń charakteryzuje się tym, że

$$W_1 = -W_2; \quad W_0 = 0; \quad U_1 = U_2; \quad V_1 = V_2.$$



Rys. 7. Sposoby utraty stateczności a) globalny b) miejscowy symetryczny c) podstawowy d) miejscowy asymetryczny

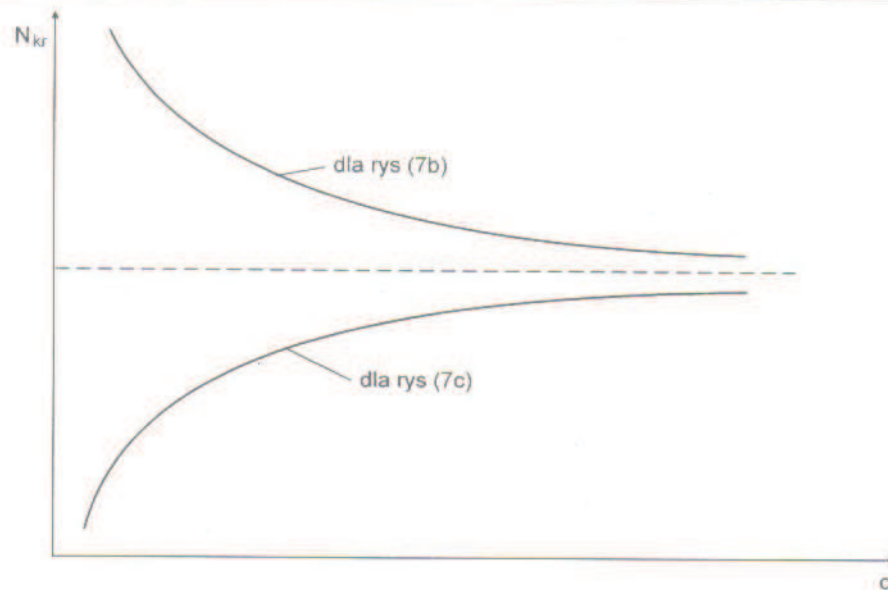
Fig. 7. Types of stability loss a) global b) local symmetrical c) basic d) local asymmetrical

W zależności od parametrów konstrukcji, np. dla cienkich rdzeni asymetryczne odkształcenie przyjmuje tzw. globalną formę utraty stateczności (rys. 7a). Odnacza się ona tym, że $W_1 = W_2 = W_0$, $U_1 = -U_2$ oraz $V_1 = -V_2$. Przy dostatecznie grubych rdzeniach, globalna postać odkształcenia może przyjmować formę jak pokazano na rys. 7d. Jej cechą charakterystyczną jest to, że $W_1 = W_2$; $W_0 = 0$; $U_1 = -U_2$; $V_1 = -V_2$ ($\bar{W} = \bar{U} = \bar{V} = 0$). Pod względem energetycznym formy z rys. (7b) i z rys. (7d) są równorzędne. Wniosek ten potwierdza wykres obrazujący siłę krytyczną dla obu przypadków. Widać, iż obie krzywe asymptotycznie zbliżają się do siebie dla dostatecznie grubych rdzeni.

Z przedstawionej dyskusji wynika, że forma asymetryczna rys. (7c) jest tą formą podstawową, która w istocie obejmuje wszystkie przypadki przedstawione na rys. (7c), gdyż formy rys. (7b) i rys. (7d) są energetycznie równoważne. Stąd przyjmując $\bar{W} = \bar{U} = \bar{V} = 0$, otrzyma się znacznie prostsze równania różniczkowe:

$$-2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2}\right)W'' + (1+\nu)W'W'' + 2W''W'' + (1-\nu)W''W'' = 0 \quad (24)$$

$$-2\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1}\right)W' + (1+\nu)W''W'' + 2W'W'' + (1-\nu)W'W'' = 0 \quad (25)$$



Rys. 8. Siła krytyczna dla dwóch stanów obciążeń (rys. 7b i 7c) w zależności od grubości rdzenia
 Fig. 8. The critical force for two states of loads versus on the core thickness

$$2B^* \left\{ \frac{1}{R_1} \left[- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) W + \frac{1}{2} (W^{*2} + \nu W'^2) \right] + \frac{1}{R_2} \left[- \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right) W + \frac{1}{2} (W'^2 + \nu W^{*2}) \right] \right\} +$$

$$-2D\Delta^4 W - B^*(2c+r)\Delta^2 (\dot{U} + V') + N_x^* W^{**} + N_y^* W'' + 2T^* W^{**} = 0 \quad (26)$$

Są to końcowe wzory, które mogą służyć do obliczeń konstrukcji warstwowej.

5.2. Powłoki i płyty jednorodne

Wyznaczając z równania (21) i (22) wyrażenia zawierając G_r i podstawiając je do równania (23), otrzymamy wraz z (15) i (16) tylko równania dla jednorodnych powłok.

$$2U^{**} + (1-\nu)U'' + (1+\nu)V^{**} - 2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{\nu}{R_2} \right) W^* + (1+\nu)W'W^{**} + 2W^*W^{**} + (1-\nu)W^*W'' = 0 \quad (27)$$

$$2V'' + (1-\nu)V^{**} + (1+\nu)U^{**} - 2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{\nu}{R_1} \right) W' + (1+\nu)W^*W^{**} + 2W'W'' + (1-\nu)W'W^{**} = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
& 2B^* \left[\frac{1}{R_1} \left(U^* + \nu V' - \frac{W}{R_1} - \frac{\nu}{R_2} W + \frac{1}{2} W^{*2} + \frac{\nu}{2} W'^2 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R_1} \left(V' + \nu U^* - \frac{W}{R_2} - \frac{\nu}{R_1} W + \frac{1}{2} W'^2 + \frac{\nu}{2} W^{*2} \right) \right] + \\
& - 2D\Delta^4 W + N_x^* W^{**} + N_y^* W'' + 2T^* W^{*'} + q = 0
\end{aligned} \quad (29)$$

Gdy powłoka jest obciążona tylko siłami poprzecznymi q , to równanie (26) przekształca się do postaci:

$$\begin{aligned}
& 2B^* \left\{ \left(\frac{1}{R_1} + W^{**} \right) \left[\left(U^* - \frac{W}{R_1} + \frac{1}{2} W^{*2} \right) + \nu \left(V' - \frac{W}{R_2} + \frac{1}{2} W'^2 \right) \right] + \right. \\
& \left. + \left(\frac{1}{R_2} + W'' \right) \left[\left(V' - \frac{W}{R_2} + \frac{1}{2} W'^2 \right) + \nu \left(U^* - \frac{W}{R_1} + \frac{1}{2} W^{*2} \right) \right] + (1 - \nu)(U' + V^* + W^* W') W^{*'} \right\} - \\
& - 2D\Delta^4 W + q = 0
\end{aligned} \quad (29a)$$

Dodatkowo przyjmując $R_1^{-1} = R_2^{-1} = 0$, uzyskuje się równania dla jednorodnych płyt.

5.3. Geometrycznie liniowa teoria

Opuszczając w równaniach (15), (16), (21), (22) i (23) wyrażenia nieliniowe będące efektem nieliniowych wyrażeń we wzorach (5) uzyskuje się pięć równań liniowych.

Równania te podane są w pracy [1] pod numerami (6.5), (6.6), (6.7), (6.8), i (6.9), przy założeniu, że $W_1 = W_2$. Gdy warunki brzegowe dadzą się wyrazić tylko przez przemieszczenie W , to równania te sprowadzają się do jednego równania. W pracy [1] równanie to oznaczono numerem (6.16).

Jeżeli w równaniach (1.3), (2.3) i (3) uwzględnimy tylko elementy liniowe (hipoteza linii łamanej, czyli $F(z) = S(z) = T(z) = 1$ oraz pominiemy elementy nieliniowe we wzorach (5), to uzyskuje się równania [2], które opisują pełny liniowy stan przemieszczeń powłok warstwowych. Równania te oznaczone są numerem (29a).

Wnioski

Zaprezentowana w tej publikacji po raz pierwszy teoria, przedstawia równania różniczkowe opisujące płyty i małowyniosłe powłoki trójwarstwowe w ujęciu podwójnej nieliniowości. Uwzględniony został nieliniowy stan przemieszczeń rdzenia oraz nieliniowe związki pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami w odniesieniu do rdzenia i okładzin.

Takie ujęcie problemu ma istotne znaczenie – wiele konstrukcji pracuje w stanach dużych odkształceń.

Jest oczywiste, że rozwiązanie tych równań dla konkretnych płyt i powłok stosowanych w praktyce inżynierskiej jest bardzo trudne. Dlatego przykłady szczególnych rozwiązań zostaną później wykonane i przedstawione w kolejnej publikacji.

Literatura

1. ROMANÓW F.: *Wytrzymałość konstrukcji warstwowych*. Wydawnictwo WSI. Zielona Góra 1995.
2. WOLMIR A.C.: *Ustoičivost deformirujemych sistem*. Wydawnictwo „Nauka”. Moskwa 1967.
3. ROMANÓW F.: *Hyperbolischer dreiaxialer Verschiebungszustand von flachen Sandwichkonstruktionen und schwach gewolbten Sandwichschalen*, Bauingenieur, **58**, 209–212, 1983.
4. ROMANÓW F.: *Kritische Belastungen von Sandwichkonstruktion bei Anwendung der hyperbolischen Hypothese des dreiaxialen Verschiebungszustandes*, Bauingenieur, **59**, 229–233, 1984.

A bi-nonlinear theory for sandwich construction calculation

Summary

In this paper generalised differential equations describing shallow shells and sandwich plates have been derived. The analysis presented is based on the three-axes non-linear state of core displacements (hyperbolic hypothesis) and on geometric non-linear theory. The equations have been derived with the help of equilibrium equations for a sandwich element. The theory is discussed and its application in the simplest case of shells and plates is given at the end of the paper.