

# ANALIZA WPŁYWU PODNOSZENIA SIŁĄ SKUPIONĄ BEZSTYKOWEGO TORU KOLEJOWEGO NA JEGO RÓWNOWAGĘ

## SPIS TREŚCI

1. Wstęp
2. Analiza utraty kontaktu eksploatowanego toru bezstykowego z podsypką
3. Wpływ podnoszenia toru na jego równowagę
4. Wnioski

## STRESZCZENIE

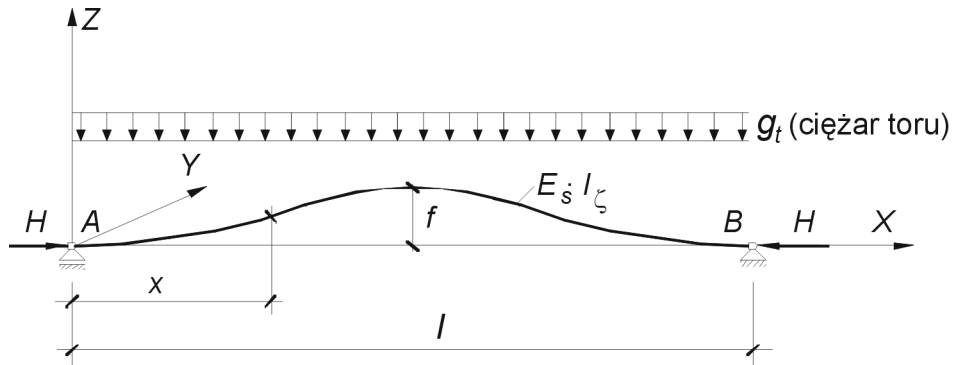
*Przeprowadzono analizę dotyczącą równowagi wygiętego w górę bezstykowego toru kolejowego. Tor — ściskany siłą osiową wywołaną zmianami temperatury — spoczywający na sztywnym i nierównym podłożu, podniesiony z zewnątrz przyłożoną siłą  $Q$  zostaje wygięty na długości  $l$ . Analizę przeprowadzono w dwu etapach; w etapie pierwszym — z pominięciem wpływu zmiany długości osi toru kolejowego na przebieg jego ugięć w płaszczyźnie pionowej, czego konsekwencją jest pominięcie wpływu na pracę toru poziomej reakcji podłoża, w drugim etapie — korzystając z wyników obliczeń etapu pierwszego — uwzględniono pominięte wpływy, co umożliwiło opracowanie równania przedstawiającego warunek konieczny wybożenia toru w płaszczyźnie pionowej. Z równania tego określono zmienną wartość siły ściskającej, w zależności (m.in.) od strzałki  $f$  i długości  $l$  uniesionego w górę toru wskutek działania pionowej siły  $Q$ .*

## 1. WSTĘP

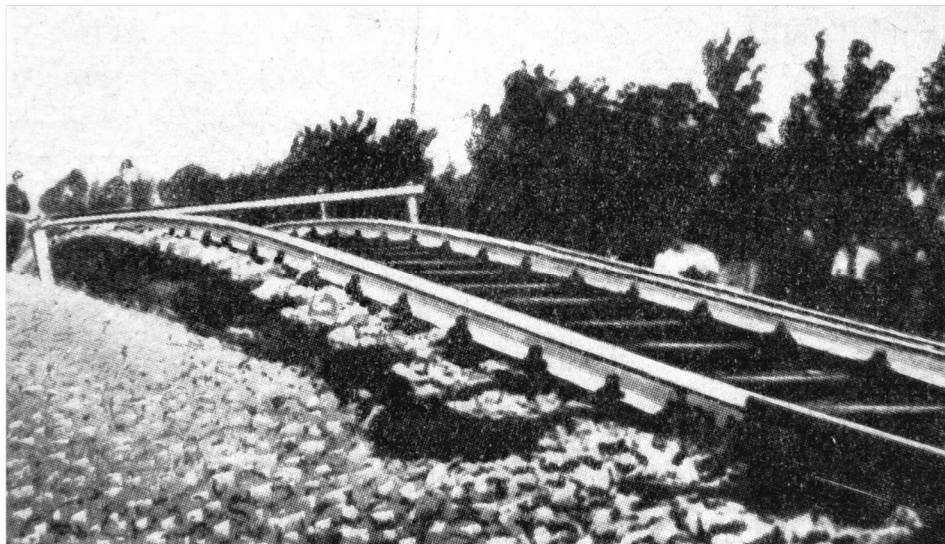
W literaturze z zakresu dróg kolejowych znacznie częściej rozpatruje się płaszczyznę poziomą w aspekcie utraty stateczności toru kolejowego [13, 16]. Niemniej jednak analiza bezstykowego toru kolejowego w płaszczyźnie pionowej ukazuje wiele problemów teoretycznych dotyczących stateczności toru bezstykowego [8, 9, 11].

W niniejszym artykule rozważa się możliwość utraty kontaktu toru bezстыkowego z podsypką w płaszczyźnie pionowej podczas występowania wysokich temperatur szyn, z uwzględnieniem wpływu krzywizny podłoża ( $R_0$ ) i ciężaru toru ( $g_t$ ) na rozpatrywane zjawisko.

Przedmiotem rozważań jest prosty, bezстыkowy tor kolejowy, o długości nieskończenie dużej, który jako ważki, sprężysty pręt spoczywa na jednoparametrowym podłożu sprężystym, winklerowskim. W torze — pod wpływem zmian temperatury — powstaje ścisająca siła podłużna  $H$ , która w pewnych okolicznościach, przy dużych nierównościach podłoża, może wywołać — na przykład — ugięcie toru w płaszczyźnie pionowej na długości  $l$  (rys. 1, 2) [2].



Rys. 1. Postać wygiętego w górę toru na długości  $l$



Rys. 2. Typowy przypadek wybożenia toru w płaszczyźnie pionowej [10]

Podłoże scharakteryzowane jest przez trzy niezależne współczynniki podatności podłoża:  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , przeliczone na jednostkę długości toru, odpowiednio dla trzech kierunków osi układu  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , przy czym oś  $x$  jest osią podłużną toru. Parametry wytrzymałościowe przekroju: sztywność podłużna  $E_S \cdot A$  oraz sztywności na zginanie  $E_S \cdot I_y$  (płaszczyzna pozioma) i  $E_S \cdot I_z$  (płaszczyzna pionowa) są stałe wzdłuż osi toru. Tor podlega działaniu procesu cieplnego (insolacji), w wyniku którego w szynach powstaje skalarne pole temperatur oraz wektorowe pole przemieszczeń. Z polem przemieszczeń jest związany przestrzenny stan odkształceń i naprężeń w szynach. Zakłada się, że szyna jest ciałem jednorodnym, izotropowym oraz liniowo sprężystym, o stałych fizycznych, niezależnych od temperatury i czasu. Przyjęte założenia umożliwiają stosowanie teorii małych odkształceń ciała stałego przy wyprowadzaniu równań różniczkowych w celu określenia przemieszczeń toru dla kierunków:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

## 2. ANALIZA UTRATY KONTAKTU EKSPLOATOWANEGO TORU BEZSTYKOWEGO Z PODSYPKĄ

Celem niniejszej analizy jest warunek konieczny wybożenia toru, określający, czy początkowo prosty tor bezstykowy (o długości nieskończenie dużej, spoczywający jako ważki pręt o ciężarze jednostkowym  $g_t$  na poziomym podłożu podsypkowym) może, w wyniku działania dużych sił ściskających, utracić lokalnie stateczność w płaszczyźnie pionowej i utrwalić postać wygięcia w formie pojedynczej fali (rys. 3a) [7]. W analizie problemu przyjęto założenie, że podłoże toru charakteryzują w płaszczyźnie wybożenia ( $x$ ,  $z$ ) dwa współczynniki podatności:  $k_1 \neq 0$  i  $k_3 = \infty$  — podłoże sztywne.

Warunek ten można zapisać następująco:

$$\frac{N_t - H}{\sqrt{k_1 \cdot E_S \cdot A}} = 1,378 \cdot l \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2 - \frac{N_t \cdot l}{2 \cdot E_S \cdot A} + \frac{H \cdot l}{2 \cdot E_S \cdot A} \cdot \left[1 - 2,204 \cdot \left(\frac{f}{l}\right)^2\right] \quad (1)$$

$$N_t = E_S \cdot A \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \quad (2)$$

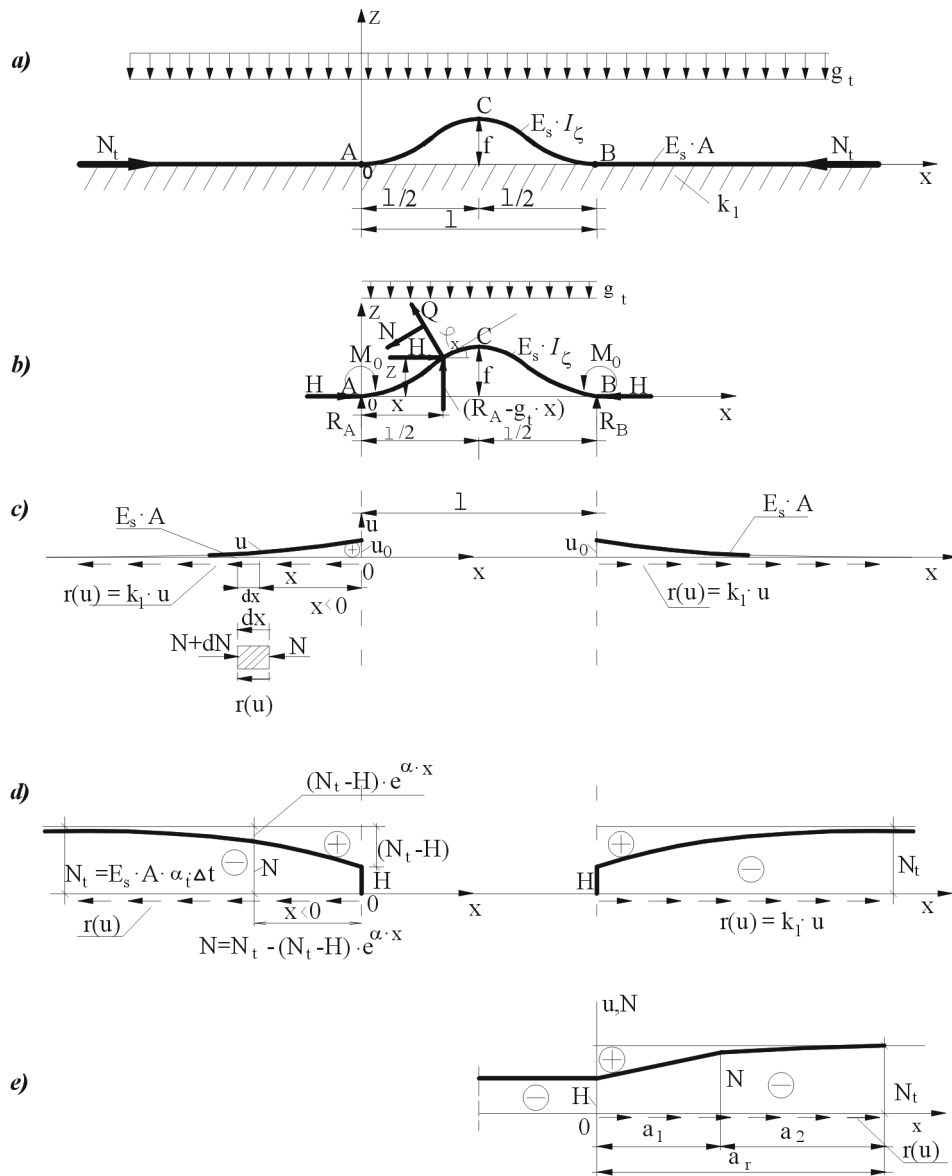
$$H = 80,7626 \cdot \frac{E_S \cdot I_z}{l^2} \quad (3)$$

$$f = \frac{1}{415,49} \cdot \frac{g_t \cdot l^4}{E_S \cdot I_z} \quad (4)$$

gdzie:

- $N_t$  — siła ściskająca w torze od zmian temperatury [MN],
- $k_1$  — współczynnik podatności podłoża dla kierunku  $x$  [MPa],
- $H$  — podłużna siła ściskająca działająca na długości fali wygiętego toru [MN],
- $f$  — strzałka ugięcia (wygięcia) toru [m],
- $l$  — długość fali uniesionego w górę toru [m],
- $g_t$  — ciężar jednostkowy toru [MN/m],
- $E_S$  — moduł *Younga* dla stali szynowej [MPa],

$A = 2 \cdot A_S$ , przy czym  $A_S$  — oznacza pole przekroju poprzecznego szyny [m<sup>2</sup>],  
 $\alpha_t$  — współczynnik rozszerzalności liniowej dla stali [1/K],  
 $\Delta t = t - t_p$  [K],  $t$  — temperatura szyny,  $t_p$  — temperatura przytwierdzenia szyn.



Rys. 3. Schematy obliczeniowe

Uwzględniając w równaniu (1) wyrażenia (3) i (4) i oznaczając niewiadomą wartość długości fali wyboczenia toru  $l$  przez  $2 \cdot x$ , otrzymuje się równanie w postaci [7]:

$$N_t = \frac{E_S \cdot A}{x + a_0} \cdot (a_1 \cdot x^7 - a_2 \cdot x^5 + a_3 \cdot x^{-1} + a_4 \cdot x^{-2}) \quad (5)$$

$$\text{gdzie: } a_0 = \left( \frac{E_S \cdot A}{k_1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a_1 = \frac{1}{978} \cdot \left( \frac{g_t}{E_S \cdot I_\zeta} \right)^2, \quad a_2 = \frac{1}{60,57} \cdot \left( \frac{g_t \cdot i}{E_S \cdot I_\zeta} \right)^2,$$

$$a_3 = 20,19 \cdot i^2, \quad a_4 = 20,19 \cdot \frac{E_S \cdot I_\zeta}{(k_1 \cdot E_S \cdot A)^{\frac{1}{2}}}, \quad i = \left( \frac{I_\zeta}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Z warunku na minimum siły  $N_t$  jako funkcji  $x$ ,  $\left( \frac{dN_t}{dx} = 0 \right)$ , wynika równanie nieliniowe, z którego obliczono  $x$  (długość połowy fali wyboczenia toru, której odpowiada  $N_t^{\min}$ ) [7]:

$$6 \cdot a_1 \cdot x^{10} + 7 \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot x^9 - 4 \cdot a_2 \cdot x^8 - 5 \cdot a_0 \cdot a_2 \cdot x^7 - 2 \cdot a_3 \cdot x^2 + (a_0 \cdot a_3 + 3 \cdot a_4) \cdot x - 2 \cdot a_0 \cdot a_4 = 0 \quad (6)$$

Po wyznaczeniu  $x$  ze wzoru (6) oblicza się:  $N_t^{\min}$  ze wzoru (5), długość fali  $l = 2 \cdot x$ , siłę  $H$  ze wzoru (3), strzałkę wyboczenia  $f$  ze wzoru (4).

#### Przykład obliczeniowy (tor z szynami 60E1, podsypka tłuczniowa)

Do obliczeń przyjęto następujące dane:

$$E_S = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}, \quad E_S \cdot I_\zeta = 2 \cdot E_S \cdot I_{S_\zeta} = 12,831 \text{ MNm}^2, \\ E_S \cdot A = E_S \cdot 2 \cdot A_S = 3228,12 \text{ MN}, \quad \alpha_t = 1,15 \cdot 10^{-5} 1/\text{K}.$$

$k_1$ [MPa]	$R_0$ [m]	$g_t$ [ $\frac{\text{MN}}{\text{m}}$ ]	$x$ [m]	$l$ [m]	$f$ [m]	$N_t$ [MN]	$H$ [MN]	$\Delta t$ [K]
5	$\infty$	0,0026	14,1524	28,305	0,3132	1,6828	1,2934	45,33
<b>20</b>	$\infty$	<b>0,0026</b>	<b>13,559</b>	<b>27,118</b>	<b>0,2639</b>	<b>1,8437</b>	<b>1,4091</b>	<b>49,66</b>
20	5000	0,002314*	13,938	27,876	0,2624	1,7451	1,3334	47,01
20	2000	0,00189*	14,624	29,247	0,2594	1,5861	1,2114	42,72
20	1000	0,0012*	16,291	32,583	0,2538	1,2793	0,9761	34,46
5	$\infty$	0,005*	12,1614	24,323	0,3284	2,2762	1,7516	61,31
20	$\infty$	0,005*	11,6179	23,236	0,2735	2,5077	1,9193	67,55

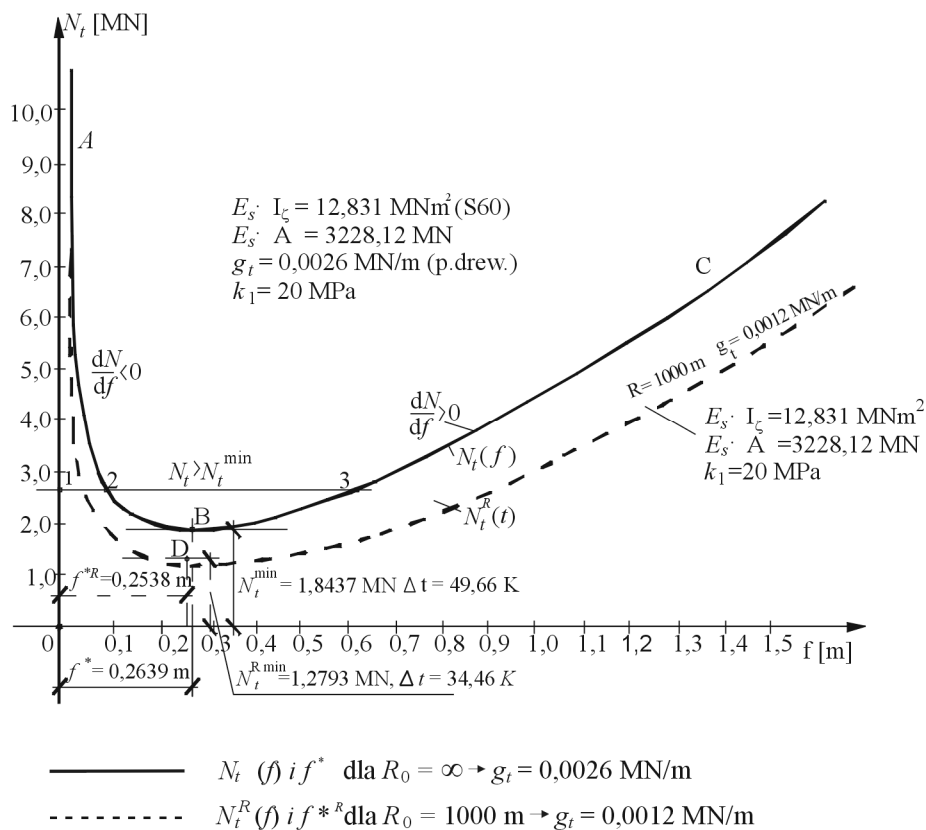
\* W przeprowadzonych obliczeniach wykorzystano model ściskanego toru bezstykowego, spoczywającego na poziomym podłożu (por. rys. 3). Wpływ krzywizny podłoża uwzględnia się tutaj poprzez redukcję jednostkowej siły masowej toru, którą oblicza się ze wzoru:  $\bar{g}_t = g_t \cdot \left(1 - \frac{H}{R_0 \cdot g_t}\right)$  [7], gdzie:  $g_t$  i  $H$  odpowiada  $R_0 = \infty$ . Dla  $R_0 = \infty$  ciężar dla podkładów drewnianych wynosi:  $g_t = 0,0026$  MN/m, a dla podkładów betonowych  $g_t = 0,005$  MN/m.

Przedstawione wyżej wyniki obliczeń dają możliwość prześledzenia wpływu, jaki krzywizna podłoża wywiera na warunki stateczności toru bezstykowego w płaszczyźnie pionowej. Ponadto, na podstawie danych tablicy 1 można sformułować następujące wnioski:

- 1) zwiększenie ciężaru własnego toru zwiększa bezpieczeństwo jego użytkowania oraz stwarza możliwości dopuszczenia większych tolerancji w utrzymaniu toru;
- 2) opór podłużny podsypki jest istotnym czynnikiem zwiększającym stateczność toru w płaszczyźnie pionowej (w związku z tym należy dążyć do starannego ułożenia i zagęszczenia podsypki tłuczniowej w torach bezstykowych);
- 3) krzywizna pionowa podłoża podsypkowego, wygiętego wypukłością ku górze, ujemnie wpływa na warunki stateczności ściskanego toru bezstykowego w płaszczyźnie pionowej.

Uwzględniając sprężysty model oporu podłużnego podsypki, czyli  $r(u) = k_1 \cdot u$ , oraz przyjmując do obliczeń wartość współczynnika  $k_1 = 20$  MPa [2, 3, 4, 5], na rysunku 4 przedstawiono przebieg funkcji  $N_t$  w układzie osi ( $f, N_t$ ) oraz typowy przypadek wyoboczenia toru w płaszczyźnie pionowej. Sposób obliczeń dla innych modeli podłoża zawarto w pracy [1].

Szczegółnej analizy wymaga postać równowagi odkształconego toru, odpowiadająca na wykresach rysunku 4 punktom  $B(f^*, N_t^{\min})$  i  $D(f^{*R}, N_t^{R\min})$ , gdzie:  $N_t^{\min}$  i  $N_t^{R\min}$  są dolnymi wartościami krytycznej siły ściskającej w torze, którym odpowiadają największe krytyczne strzałki ugięcia:  $f^*$  i  $f^{*R}$ . Równowaga ta będzie stałą dla  $\Delta t \geq 49,66K$  i  $\Delta t \geq 34,46K$  oraz niestała przy  $\Delta t < 49,66K$  i  $\Delta t < 34,46K$ , odpowiednio dla  $N_t$  — linia ciągła i  $N_t^R$  — linia przerywana (por. rys. 4). W tym drugim przypadku nastąpi nagły przeskok do pierwotnej, prostej postaci równowagi (dotyczy  $N_t$ ), która będzie **stateczna**.

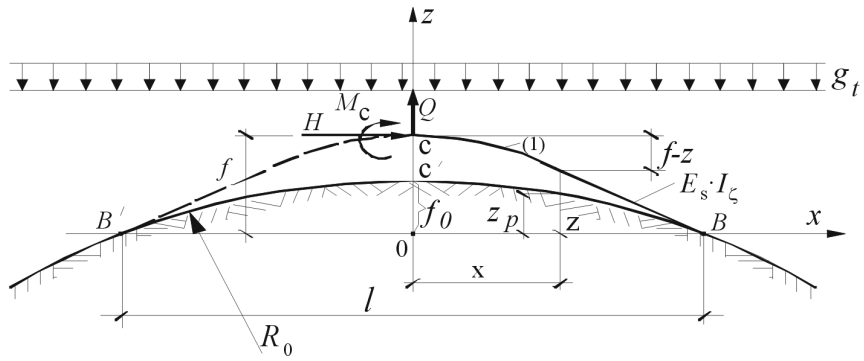


Rys. 4. Przebieg funkcji  $N_t(f)$  [1, 2]

### 3. WPŁYW PODNOSZENIA TORU NA JEGO RÓWNOWAGĘ

Naprawy toru bezстыkowego czy też badania podtorza płytą VSS są związane z jego podnoszeniem. W związku z podnoszeniem toru pojawia się wiele problemów teoretycznych, dotyczących stateczności [11, 14, 15]. Problemy te są ważne ze względu na bezpieczeństwo i prawidłowość prowadzonych prac [6].

Analizę zagadnienia podnoszenia toru kolejowego przeprowadzono w dwóch etapach [1, 2]. W etapie pierwszym pominięto wpływ zmian długości osi toru na przebieg jego ugięć w płaszczyźnie pionowej. Konsekwencją tego założenia było również pominięcie wpływu poziomej reakcji podłoża  $r(u) = k_1 \cdot u$  na pracę toru. W drugim etapie zostały one uwzględnione dzięki wynikom obliczeń etapu pierwszego, w którym z równania (1) określono zmienną wartość siły ściskającej  $H$ , występującej na długości fali wygiętego toru, w zależności (m.in.) od strzałki  $f$  i długości  $l$  uniesionego w górę toru pod działaniem pionowej siły  $Q$  (rys. 5).



Rys. 5. Schemat obliczeniowy podnoszonego toru

W pierwszym etapie obliczeń uzyskano wzór na strzałkę fali podniesienia toru [11]:

$$f = \frac{g \cdot E \cdot I_\zeta}{H^2} \cdot \nu^2 \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos \nu}{\nu \cdot \sin \nu} \right) \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot (1 - \rho) \cdot (\sin \nu - \nu \cdot \cos \nu)}{\nu \cdot (1 - \cos \nu)} \right) + \rho \cdot \frac{1 - \cos \nu}{\nu \cdot \sin \nu} \right] \quad (7)$$

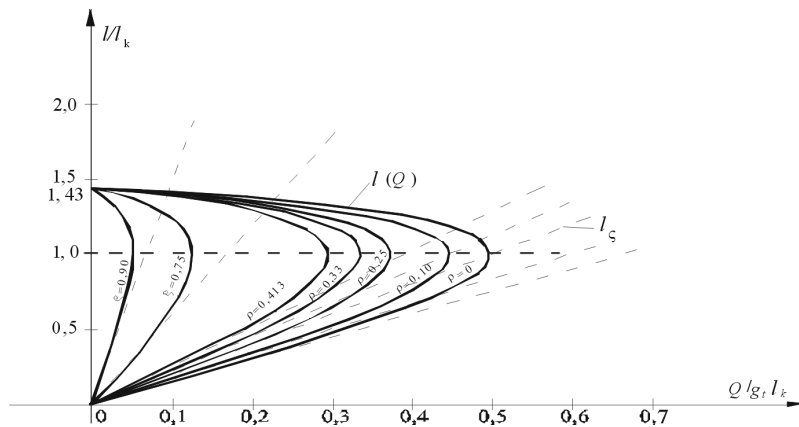
$$\nu = \frac{l}{2 \cdot \beta}, \quad \rho = \frac{H}{R_0 \cdot g_i}, \quad \beta = \sqrt{\frac{E_s \cdot I_\zeta}{H}} \quad (8)$$

gdzie  $\nu, \rho, \beta$  — dodatkowe parametry.

Związek między  $Q$  i  $l$  wyznaczono z warunku  $\frac{d^2 z_c}{dx^2} = \frac{d^2 z_p}{dx^2}$ , dla  $x = \frac{l}{2}$  [11]:

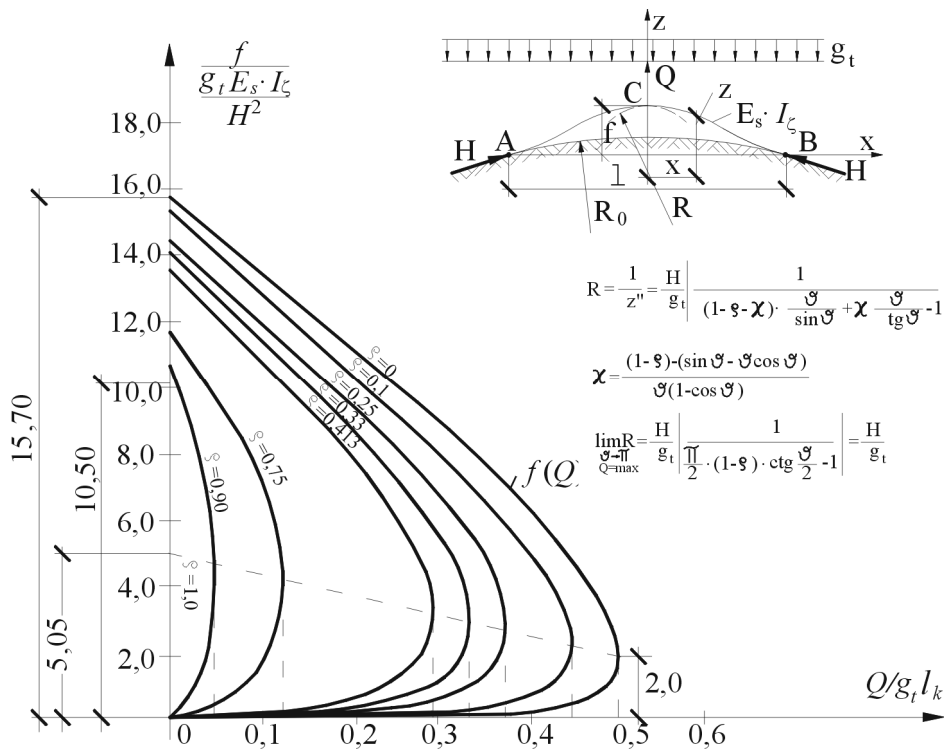
$$\frac{Q}{g_i \cdot l} = \frac{[1 - \rho] \cdot [\sin \nu - \nu \cos \nu]}{\nu \cdot [1 - \cos \nu]} \quad (9)$$

Korzystając z zależności (7) i (9) przedstawiono na rysunkach 7 i 8 przebiegi  $l(Q)$  i  $f(Q)$  we współrzędnych bezwymiarowych.



Rys. 6. Wykres zależności  $l(Q)$ , gdzie:  $l_k = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{E_s \cdot I_\zeta}{H}}$





Rys. 7. Wykres zależności  $f(Q)$

Na wykresach  $l(Q)$  i  $f(Q)$  można wyróżnić dwie charakterystyczne fazy zachowania się toru. Pierwsza — gdy wzrości  $Q$  od zera do  $Q_{\max}$  towarzyszy wzrost  $f$  i  $l$  oraz druga — w której wzrości  $f$  i  $l$  odpowiada malejąca od  $Q_{\max}$  do zera wartość siły  $Q$ , która utrzymuje w równowadze wygięty tor.

**W drugim etapie**, korzystając z wyników etapu pierwszego, uwzględniając pominięte wpływy zmian długości osi toru oraz działanie poziomej reakcji podłoża  $r(u)$  otrzymano następujące równanie nieliniowe [1, 2]:

$$(N_t - H) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{k_1 \cdot E_S \cdot A}} + \frac{\sqrt{E_S \cdot I_\zeta \cdot \nu}}{\sqrt{H \cdot E_S \cdot A}} \right) - \frac{0,689 \cdot g_t^2 \cdot (E_S \cdot I_\zeta)^{1,5}}{H^{3,5}} \cdot \nu^3. \quad (10)$$

$$\cdot \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos \nu}{\nu \cdot \sin \nu} \right) \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot (1 - \rho) \cdot (\sin \nu - \nu \cdot \cos \nu)}{\nu \cdot (1 - \cos \nu)} \right) + \rho \cdot \frac{1 - \cos \nu}{\nu \cdot \sin \nu} \right]^2 \cdot \left( 1 - \frac{1,6 \cdot H}{E_S \cdot A} \right) = 0$$

gdzie:  $\nu = \frac{l}{2 \cdot \beta}$ ,  $\beta = \sqrt{\frac{E_S \cdot I_\zeta}{H}}$  oraz  $\rho = \frac{H}{R_0 \cdot g_t}$

W równaniu (10) siła ściskająca  $H$ , działająca na długości  $l$  uniesionego w górę toru przez siłę  $Q$ , jest zmienną zależną od parametru  $\nu$ , który zmienia się w granicach:  $0 \leq \nu \leq 4,4939$  (por. rys. 6 i 7). Siła  $H$  przyjmuje wartości od  $H = N_t^{\min}$ , dla  $\nu=0$ , czyli  $l=0$ , do wartości  $H=H^*$ , dla  $\nu=4,4939$ , czyli  $l=1,43 \cdot l_k$ , gdzie  $l_k = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{E_S \cdot I_\zeta}{H}}$ , przy czym wartości  $N_t^{\min}$  i  $H^*$  określa się według wzoru (3). Dla ułatwienia obliczeń można wprowadzić dodatkową zmienną  $\gamma = \frac{H}{N_t^{\min}}$ , której zakres zmienności określa nierówność:  $\gamma^* \leq \gamma \leq 1$ , gdzie  $\gamma^* = \frac{H^*}{N_t^{\min}}$ .

Z równania (10) można dla każdego  $\nu$  określić wartość  $\gamma$  bądź też zakładając z góry określoną wartość  $\gamma$  z podanego wyżej przedziału, obliczyć odpowiadającą jej wartość parametru  $\nu$ . Siła podnosząca  $Q$  wykonuje pracę:  $L_Q = Q \cdot (f - f_0)$  [12], gdzie strzałka  $f_0$  uwzględnia wpływ pierwotnej krzywizny podłoża toru (por. rys. 5).

### Przykład obliczeniowy

Wyniki obliczeń, zestawione w tablicach 2—8, otrzymano na podstawie równania (10) i zależności (7) i (9), dla danych:  $E_S \cdot I_\zeta = 12,831 \text{ MNm}^2$ ,  $E_S \cdot A = 3228,12 \text{ MN}$ ,  $g_t = 0,0026 \text{ MN/m}$ , (podkłady drewniane, przypadek niekorzystny),  $k_1 = 20 \text{ MPa}$ .

Tablica 2

Obliczenia dla  $R_0 = \infty$

$\gamma$	$\nu$	$f - f_0$ [m]	$l$ [m]	$Q_{\max}$ [MN]	$0,5 \cdot L_Q$ [MNm]	$R_0 = \infty$ $\Delta L = 1,0392 \cdot 10^{-3}$ MNm $N_t^{\min} = 1,8437 \text{ MN}$ $H^* = 1,4091 \text{ MN}$ $\gamma^* = 0,7643$
1,0	0	0	0	0	0	
0,9973	3,14159	0,0197	16,598	0,0216	$2,129 \cdot 10^{-4}$	
0,98	3,883	0,0629	20,695	0,0174	$5,491 \cdot 10^{-4}$	
0,95	4,1901	0,1064	22,682	0,0115	$6,110 \cdot 10^{-4}$	
0,90	4,3784	0,1585	24,351	0,0053	$4,234 \cdot 10^{-4}$	
0,85	4,4564	0,2010	25,503	0,0019	$1,921 \cdot 10^{-4}$	
0,80	4,4881	0,2387	26,475	$2,92 \cdot 10^{-4}$	$3,483 \cdot 10^{-5}$	
0,7643	4,4937	0,2639	27,120	0	0	

Tablica 3

Obliczenia dla  $R_0 = 5000$  m

$\gamma$	$\nu$	$f - f_0$ [m]	$l$ [m]	$Q_{\max}$ [MN]	$0,5 \cdot L_Q$ [MNm]	$R_0 = 5000$ m $\Delta L = 9,464 \cdot 10^{-4}$ MNm $N_t^{\min} = 1,7451$ MN $H^* = 1,3334$ MN $\gamma^* = 0,7641$
1,0	0	0	0	0	0	
0,9951	3,14159	0,0192	17,079	0,0192	$1,844 \cdot 10^{-4}$	
0,98	3,755	0,0504	20,571	0,0170	$4,276 \cdot 10^{-4}$	
0,95	4,1045	0,0909	22,837	0,0122	$5,565 \cdot 10^{-4}$	
0,90	4,313	0,1405	24,655	0,0071	$4,995 \cdot 10^{-4}$	
0,85	4,3967	0,1808	25,862	0,0043	$3,875 \cdot 10^{-4}$	
0,80	4,4297	0,2167	26,858	0,0030	$3,282 \cdot 10^{-4}$	
0,7641	4,4347	0,2407	27,513	0,0029	$3,473 \cdot 10^{-4}$	

Tablica 4

Obliczenia dla  $R_0 = 2000$  m

$\gamma$	$\nu$	$f - f_0$ [m]	$l$ [m]	$Q_{\max}$ [MN]	$0,5 \cdot L_Q$ [MNm]	$R_0 = 2000$ m $\Delta L = 8,072 \cdot 10^{-4}$ MNm $N_t^{\min} = 1,5861$ MN $H^* = 1,2114$ MN $\gamma^* = 0,7638$
1,0	0	0	0	0	0	
0,989	3,14159	0,0189	17,97	0,0163	$1,544 \cdot 10^{-4}$	
0,98	3,467	0,0319	19,922	0,0159	$2,547 \cdot 10^{-4}$	
0,95	3,9062	0,0665	22,797	0,0133	$4,43 \cdot 10^{-4}$	
0,90	4,1589	0,1108	24,937	0,0099	$5,483 \cdot 10^{-4}$	
0,85	4,2576	0,1475	26,269	0,0080	$5,92 \cdot 10^{-4}$	
0,80	4,2953	0,1801	27,318	0,0073	$6,614 \cdot 10^{-4}$	
0,7638	4,3003	0,2020	27,99	0,0075	$7,55 \cdot 10^{-4}$	

Tablica 5

Obliczenia dla  $R_0 = 1000$  m

$\gamma$	$\nu$	$f - f_0$ [m]	$l$ [m]	$Q_{\max}$ [MN]	$0,5 \cdot L_Q$ [MNm]	$R_0 = 1000$ m $\Delta L = 5,598 \cdot 10^{-4}$ MNm $N_t^{\min} = 1,2793$ MN $H^* = 0,9761$ MN $\gamma^* = 0,763$
1,0	0	0	0	0	0	
0,9578	3,14159	0,0235	20,332	0,0140	$1,642 \cdot 10^{-4}$	
0,95	3,2475	0,0284	21,104	0,0141	$2,000 \cdot 10^{-4}$	
0,90	3,6202	0,0583	24,170	0,0141	$4,11 \cdot 10^{-4}$	
0,85	3,771	0,0855	25,907	0,0141	$6,042 \cdot 10^{-4}$	
0,80	3,8337	0,1105	27,149	0,0146	$8,06 \cdot 10^{-4}$	
0,763	3,8485	0,1279	27,906	0,0152	$9,74 \cdot 10^{-4}$	

Obliczenia dla  $R_0 = 2000 \text{ m}^*$

$\gamma$	$\nu$	$f - f_0$ [m]	$l$ [m]	$Q_{\max}$ [MN]	$0,5 \cdot L_Q$ [MNm]	$R_0 = 2000 \text{ m}$ $\Delta L = 8,4 \cdot 10^{-4}$ MNm $N_t^{\min} = 1,6213 \text{ MN}$ $H^* = 1,2385 \text{ MN}$ $\gamma^* = 0,7639$ Brak skokowej zmiany postaci odkształconego toru $0,5 \cdot L_Q < \Delta L$ Końcową, utrwaloną postać równowagi otrzymuje się przez ostrożne podnie- sienie toru siłą $Q$
1,0	0	0	0	0	0	
0,9994	$\pi/2$	0,0008	8,84	0,0101	$4,058 \cdot 10^{-6}$	
0,9899	3,14159	0,0179	17,766	0,0160	$1,43 \cdot 10^{-4}$	
0,98	3,515	0,0326	19,977	0,0154	$2,516 \cdot 10^{-4}$	
0,95	3,9525	0,0676	22,816	0,0125	$4,225 \cdot 10^{-4}$	
0,90	4,2030	0,1124	24,927	0,0088	$4,932 \cdot 10^{-4}$	
0,85	4,300	0,1495	26,241	0,0067	$5,023 \cdot 10^{-4}$	
0,80	4,3367	0,1824	27,280	0,0059	$5,415 \cdot 10^{-4}$	
0,78	4,3411	0,1948	27,655	0,0059	$5,763 \cdot 10^{-4}$	
0,7639*	4,3413	0,2046	27,947	0,0060	$6,148 \cdot 10^{-4}$	
0,7639	4,400	0,2242	28,324	0,0039	$4,381 \cdot 10^{-4}$	
0,7639	4,490	0,2587	28,904	$1,561 \cdot 10^{-4}$	$2,019 \cdot 10^{-5}$	
0,7639	4,4934	0,2601	28,926	$4,345 \cdot 10^{-7}$	$5,651 \cdot 10^{-8}$	

Tablica 7

Obliczenia dla  $R_0 = 1000 \text{ m}^*$

$\gamma$	$\nu$	$f - f_0$ [m]	$l$ [m]	$Q_{\max}$ [MN]	$0,5 \cdot L_Q$ [MNm]	$R_0 = 1000 \text{ m}$ $\Delta L = 6,75 \cdot 10^{-4}$ MNm $N_t^{\min} = 1,4274 \text{ MN}$ $H^* = 1,0897 \text{ MN}$ $\gamma^* = 0,7634$ samorzutny (już bez udziału siły $Q$ ) przeskoc toru z postaci odkształc. o param.: $f = 0,1362 \text{ m}$ , $l = 28,021 \text{ m}$ , do końcowej postaci równowagi (p. D, rys. 5) o: $f = 0,2563 \text{ m}$ , $l = 30,84 \text{ m}$ i kształcie utrwalonym ( $Q = 0$ ). $0,5 \cdot L_Q \geq \Delta L$
1,0	0	0	0	0	0	
0,9973	$\pi/2$	0,0007	9,432	0,0071	$2,423 \cdot 10^{-6}$	
0,9720	3,14159	0,0162	19,107	0,0116	$9,363 \cdot 10^{-5}$	
0,95	3,5329	0,0316	21,735	0,0115	$1,815 \cdot 10^{-4}$	
0,90	3,9019	0,0648	24,663	0,0103	$3,3383 \cdot 10^{-4}$	
0,88	3,9734	0,0770	25,398	0,0099	$3,8303 \cdot 10^{-4}$	
0,86	4,0233	0,0888	26,015	0,0097	$4,3023 \cdot 10^{-4}$	
0,84	4,0581	0,1001	26,550	0,0095	$4,7815 \cdot 10^{-4}$	
0,82	4,0815	0,1110	27,027	0,0095	$5,29 \cdot 10^{-4}$	
0,80	4,096	0,1216	27,460	0,0096	$5,847 \cdot 10^{-4}$	
0,78	4,1033	0,1319	27,859	0,0098	$6,468 \cdot 10^{-4}$	
0,7715	4,1045	0,1362	28,021	0,0099	$6,7553 \cdot 10^{-4}$	
0,7634*	4,1048	0,1402	28,171	0,0100	$7,043 \cdot 10^{-4}$	
0,7634	4,200	0,1621	28,824	0,0083	$6,693 \cdot 10^{-4}$	
0,7634	4,300	0,1890	29,511	0,0060	$5,644 \cdot 10^{-4}$	
0,7634	4,400	0,2209	30,197	0,0032	$3,508 \cdot 10^{-4}$	
0,7634	4,490	0,2548	30,815	$1,269 \cdot 10^{-4}$	$1,617 \cdot 10^{-5}$	
0,7634	4,4937	0,2563	30,84	0	0	

\* Tablice 6 i 7 mają charakter korekcyjny (por. tabl. 2 — 6). Odnoszą się one odpowiednio: tablica 4 do 6, a tablica 5 do 7.

**Uwaga:** W kolumnie 7 wartość  $\Delta L$  obliczono ze wzoru:

$$\Delta L = L_Z + L_P - L_{\dot{S}C} \quad (11)$$

gdzie:  $L_{\dot{S}C}$  — ubytek energii ściskania na długości rozpatrywanej lewej połowy toru,

$L_Z$  — praca zginania toru o sztywności  $E_S \cdot I_\zeta$ ,

$L_P$  — praca podniesienia toru, o ciężarze jednostkowym  $g_t$ , na długości  $\frac{l}{2}$ .

Odpowiednie zależności mają postać [1, 7]:

$$L_{\dot{S}C} = \frac{E_S \cdot A}{2} \cdot \sqrt{\frac{E_S \cdot A}{k_1}} \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{N_t}{E_S \cdot A} \right)^2 - \frac{N_t \cdot H}{(E_S \cdot A)^2} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{H}{E_S \cdot A} \right)^2 \right] + \frac{l}{4} \cdot E_S \cdot A \cdot \left[ \left( \frac{N_t}{E_S \cdot A} \right)^2 - \left( \frac{H}{E_S \cdot A} \right)^2 \right] \quad (12)$$

$$L_Z = \frac{g_t^2 \cdot l^5}{2584,22 \cdot E_S \cdot I_\zeta} \quad (13)$$

$$L_P = \frac{g_t^2 \cdot l^5}{1938,24 \cdot E_S \cdot I_\zeta} \quad (14)$$

Wykorzystując wzory (12), (13), (14) określono wartości  $\Delta L$  (11) odpowiednio do danych z tablicy 1 [1, 2]:

Tablica 8

$R_0$ [m]	$L_Z$ [MNm]	$L_P$ [MNm]	$L_{\dot{S}C}$ [MNm]	$\Delta L$ [MNm]
$\infty$	$3,704 \cdot 10^{-3}$	$4,9385 \cdot 10^{-3}$	$7,401 \cdot 10^{-3}$	$1,2415 \cdot 10^{-3}$
$\infty$	$2,9898 \cdot 10^{-3}$	$3,9863 \cdot 10^{-3}$	$5,9369 \cdot 10^{-3}$	$1,0392 \cdot 10^{-3}$
5000	$2,7182 \cdot 10^{-3}$	$3,6242 \cdot 10^{-3}$	$5,396 \cdot 10^{-3}$	$9,464 \cdot 10^{-4}$
2000	$2,3044 \cdot 10^{-3}$	$3,0773 \cdot 10^{-3}$	$4,5745 \cdot 10^{-3}$	$8,072 \cdot 10^{-4}$
1000	$1,5949 \cdot 10^{-3}$	$2,1264 \cdot 10^{-3}$	$3,1615 \cdot 10^{-3}$	$5,598 \cdot 10^{-4}$
$\infty$	$6,4228 \cdot 10^{-3}$	$8,5567 \cdot 10^{-3}$	$12,8328 \cdot 10^{-3}$	$2,1467 \cdot 10^{-3}$
$\infty$	$5,1103 \cdot 10^{-3}$	$6,8078 \cdot 10^{-3}$	$10,1538 \cdot 10^{-3}$	$1,7643 \cdot 10^{-3}$

Jak z powyższych obliczeń wynika, uwzględniając nierówność (11), istnieje pewna „bariera potencjalna”, która nie pozwala, aby tor samorzutnie mógł się wyboczyć w płaszczyźnie pionowej. Bariera ta, przy tej samej sztywności toru na zginanie  $E_S \cdot I_\zeta$ , rośnie wraz z ciężarem jednostkowym toru  $g_t$  oraz maleje ze wzrostem krzywizny podłoża toru  $\frac{1}{R}$ .

Analizując, na podstawie wyników obliczeń podanych w tablicach od 1 do 7, cały przebieg procesu zmian postaci odkształconych toru pod działaniem siły podnoszącej  $Q$  można ustalić taki przejściowy stan jego odkształcenia, przy którym równowaga uniesionego w górę toru ma postać niestateczną ( $0,5 \cdot L_Q \geq \Delta L$ , tabl. 7) i zachodzi zjawisko gwałtownego, samorzutnego przejścia jednej postaci odkształconej, o strzałce  $f$  i długości  $l$  (braku kontaktu toru z podłożem), w postać drugą — o kształcie utrwalonym dla  $Q=0$ , której odpowiada znacznie większa strzałka i długość fali ( $f_{\max}$ ,  $l_{\max}$ ). Przypadek taki, jak wynika z obliczeń ujętych w tablicach 5 i 7, może wystąpić wówczas, gdy przy dużych zmianach temperatury ściskany tor spoczywa na pierwotnie wygiętym w górę podłożu, na przykład o promieniu  $R_0 = 1000$  m.

W pozostałych podanych przykładach obliczeniowych, zjawisko przeskoku, czyli nagłej zmiany postaci odkształconej podnoszonego toru, w zasadzie nie występuje, a końcową utrwaloną postać równowagi, określoną w p. 2 niniejszej pracy, otrzymuje się w tych przypadkach przez ostrożne podnoszenie toru siłą  $Q$  do postaci odkształconej o  $f_{\max}$  i  $l_{\max}$ . Dla siły  $Q$  wyróżnia się przy tym dwa charakterystyczne zakresy zmian:  $0 \leq Q \leq Q_{\max}$  i  $Q_{\max} \geq Q \geq 0$  (por. rys. 6 i 7). Gdyby jednak podnoszeniu toru, o którym mowa wyżej, towarzyszyły chwilowe nagłe i silne wstrząsy, wówczas można i w tych przypadkach oczekiwać wystąpienia „zjawiska przeskoku”, przy czym prawdopodobieństwo zaistnienia takiego zjawiska rośnie wraz ze wzrostem krzywizny pionowej podłoża podsypkowego oraz pojawienia się dodatkowo lokalnej nierówności pionowej toru w miejscu ewentualnego ustawienia podnośnika hydraulicznego bądź urządzenia pomiarowego do badań podtorza.

W związku z tym, w celu określenia bezpiecznych wysokości podniesienia toru, na przykład w procesie regulacji jego położenia oraz badań podtorza płytą VSS, należy przyjmować do rozważań: przypadek ściskanego toru bezstykowego, spoczywającego na podłożu o wypukłej krzywiznie, której odpowiada promień  $R_0 = 1000$  m.

Wyniki obliczeń zawarte w tablicach od 2 do 7 otrzymano na podstawie rozwiązania podanego w rozdziale 3 artykułu, w którym określono zależności  $f(Q)$  i  $l(Q)$  (por. rys. 6 i 7), z jednoczesnym uwzględnieniem równania nieliniowego (10). Równanie to zawiera zmienną wartość siły ściskającej  $H$ , występującej w strefie ugięcia toru od siły  $Q$ , przy zmiennej strzałce  $f$  i długości fali  $l$  odrywania się toru od podłoża. Siła  $H$  zmienia się od  $H = N_t = N_t^{\min}$  dla  $l = 0$ , do wartości  $H = H^*$ , dla

$l = 1,43 \cdot l_k$ , gdzie  $l_k = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{E_S \cdot I_S}{H}}$ . Dla ułatwienia obliczeń wprowadzono

zmienną pomocniczą  $\gamma = \frac{H}{N_t^{\min}}$ , przy czym  $\gamma$  zmienia się w granicach  $\gamma^* \leq \gamma \leq 1,0$ ,

gdzie  $\gamma^* = \frac{H^*}{N_t^{\min}}$ .

Wartości  $N_t^{\min}$  i  $H^*$  podane w tablicach obliczono z zależności podanych w rozdziale 2, w którym uwzględniono wpływ poziomej reakcji podłoża na warunki stateczności pionowej toru. Do obliczeń stateczności pionowej ściskanego toru, spoczywającego na nierównym podłożu o promieniu krzywizny  $R_0$ , przyjęto model

obliczeniowy toru, tak jak dla  $R_0 = \infty$  (por. rys. 3), uwzględniając wpływ krzywizny podłoża na ciężar jednostkowy siły masowej toru.

W pierwszym przybliżeniu do obliczeń  $\bar{g}_t$  przyjęto  $H = 1,4091$  MN, którą otrzymano z rozwiązania podanego w rozdziale 2 dla  $R_0 = \infty$ , otrzymując następnie dla kolejnych promieni  $R_0$ : 5000, 2000 i 1000 m odpowiednie wartości  $\bar{g}_t$ : 0,002314; 0,00189 oraz 0,0012 MN/m (patrz tabl. 1).

Dla wartości  $\bar{g}_t$ , według metod rozwiązania przedstawionych w rozdziale 2 otrzymano dla każdego  $R_0$  wartości  $N_t^{\min}$  i  $H = H^*$ , podając je w tablicach od 3 do 7, a następnie przeprowadzając obliczenia:  $f-f_0$ ,  $l$ ,  $Q_{\max}$ ,  $0,5 \cdot L_Q$  i  $\Delta L$ . Korygując w następnym kroku przybliżenia wartości  $\bar{g}_t$ , poprzez uwzględnienie dla każdego  $R_0$  odpowiedniej mu wartości  $H^*$ , obliczono według wzoru na  $\bar{g}_t$ :

$R_0 = 5000$  m,  $\bar{g}_t = 0,00233$  MN/m, (0,002314), względna różnica 0,69%,

$R_0 = 2000$  m,  $\bar{g}_t = 0,0020$  MN/m, (0,00189), względna różnica 5,5%,

$R_0 = 1000$  m,  $\bar{g}_t = 0,001624$  MN/m, (0,0012), względna różnica 26,10%,

gdzie w nawiasach podano wartości  $\bar{g}_t$  z pierwszego przybliżenia (tabl.1).

Wpływ dużej różnicy w ocenie  $\bar{g}_t$ , zwłaszcza dla  $R_0 = 1000$  m, spowodował wyraźne zniekształcenie przebiegu funkcji pracy siły podnoszącej ( $0,5 \cdot L_Q$ ) w tablicy 5. Powstała zatem konieczność przeprowadzenia dodatkowych iteracji dla  $R_0 = 2000$  m i  $R_0 = 1000$  m, według metod podanych w rozdziale 2.

Dla  $R_0 = 2000$  m otrzymujemy w drugim kroku iteracji następujące wartości:  $\bar{g}_t = 0,00198$  MN/m,  $N_t = 1,6213$  MN,  $H = 1,2385$  MN,  $f = 0,2600$  m,  $l = 28,926$  m,  $\Delta L = 8,4 \cdot 10^{-4}$  MNm,  $\Delta t = 43,67$  K, (42,72 K) (patrz tabl. 6). Natomiast dla  $R_0 = 1000$  m w piątym kroku iteracji otrzymujemy:  $\bar{g}_t = 0,0015123$  MN/m,  $N_t = 1,4274$  MN,  $H = 1,0897$  MN,  $f = 0,2565$  m,  $l = 30,838$  m,  $\Delta L = 6,75 \cdot 10^{-4}$  MNm,  $\Delta t = 38,45$  K (34,46 K) (patrz tabl. 7).

Dla nowych poprawionych wartości przybliżenia  $\bar{g}_t$  wykonano dla  $R_0 = 2000$  m i  $R_0 = 1000$  m nowe obliczenia, które przedstawiono w tablicach 6 i 7.

Celem porównania postaci odkształconej toru w końcowym stanie równowagi stałej (punkt B, rys. 4), określonej na podstawie rozwiązania podanego w rozdziale 2, z postacią odkształconą, wynikającą z rozwiązania podanego w rozdziale 3, z udziałem siły  $Q$ , posłużono się wartością promienia krzywizny w najwyższym wypukłym wierzchołku fali odkształconego toru.

Promień krzywizny  $R = \frac{1}{\frac{d^2z}{dx^2}}$  ma tutaj wartość ujemną (warunkiem wystarczającym,

aby w przyjętym układzie współrzędnych krzywa była wypukła jest  $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$ ), dlatego należy obliczać jego wartość bezwzględną  $|R|$ .

Dla rozwiązania (patrz rozdz. 2) mamy:

$$R_1 = \frac{1}{\frac{g_t \cdot l}{4 \cdot H \cdot \beta} \cdot \left[ \frac{1}{\sin(\nu - \pi)} + \frac{2 \cdot \beta}{l} \right]}$$

Natomiast rozwiązanie podane w rozdziale 3, w ogólnym przypadku, daje:

$$R_2 = \frac{1}{\left[ \left( \frac{l}{R_0} - \frac{g_t \cdot l}{H} + \frac{Q}{H} \right) \cdot \frac{\beta}{2 \cdot \sin \nu} - \frac{Q \cdot \beta}{2 \cdot H} \cdot \operatorname{ctg} \nu \right] \cdot \beta^{-2} + \frac{g_t}{H}}$$

Rozwiązanie to dla  $R_0 = \infty$  i  $Q = 0$  (utrwalona postać równowagi przy  $f_{\max}$  i  $l_{\max}$ ), prowadzi do identycznego wzoru na promień krzywizny  $R_2$ , jak dla  $R_1$ , czyli mamy  $R_1 = R_2$ . Dla toru z szynami 60E1 na podkładach drewnianych, ułożonych na podsypce tłuczniowej, mamy:  $R_1 = R_2 = 96,721$  m. Natomiast dla  $R_0 = \infty$  i  $Q = 0$  (punkt B, rys. 4) otrzymujemy:

—  $H = 1,4091$  MN;  $f = 0,2638$  m i  $l = 27,1185$  m (rozdz. 2),

—  $N_t = 1,8437$  MN;  $H = 1,4091$  MN;  $f = 0,2639$  m oraz  $l = 27,118$  m (rozdz. 3),

czyli postacię odkształcone obu rozwiązań są takie same.

#### 4. WNIOSKI

1. Końcowa postać równowagi odkształconego w górę toru, ściskanego siłami wywołanymi zmianami temperatury szyn — określona w p. 2 i odpowiadająca punktom równowagi B i D z rysunku 4 — jest statycznie możliwa, ale nie może ona wystąpić samorzutnie [1].
2. Jak wynika z przebiegu funkcji  $N_t(f)$  na rysunku 4, dla siły  $N_t < N_t^{\min}$  tor ma tylko jedną prostoliniową, stateczną postać równowagi. W przypadku natomiast  $N_t > N_t^{\min}$  występują już trzy postacie równowagi: stateczna, odpowiadająca prostoliniowej postaci równowagi (punkt 1), niestateczna — postać krzywoliniowa równowagi, oznaczona punktem 2, leżącym na lewej części AB krzywej; oraz kolejna stateczna postać równowagi (punkt 3), odpowiadająca prawej części BC krzywej.
3. Badanie stateczności pionowej toru drogą analizy wcześniejszych stanów jego równowagi w p. 3, z udziałem siły  $Q$ , poprzedzających końcowy stan równowagi wygiętego w górę toru, dla  $f_{\max}$  i  $l_{\max}$  przy  $Q = 0$  (rys. 6 i 7) jest konieczna wówczas, gdy chce się ustalić stopień bezpieczeństwa pracy ściskanego toru.
4. Z wykresów  $l(Q)$  i  $f(Q)$  (rys. 6 i 7) wynika, że w przebiegu ugięć toru spowodowanych siłą zewnętrzną  $Q$  można wyróżnić dwie fazy zachowania się toru. Pierwsza faza, gdy wzrośtowi  $f$  i  $l$  towarzyszy wzrost  $Q$  od zera do  $Q_{\max}$  oraz druga, w której dalszemu wzrośtowi  $f$  i  $l$  odpowiada malejąca od  $Q_{\max}$  do zera wartość siły  $Q$ . Zmianę siły  $Q$  wyczuwa się wyraźnie przy podnoszeniu toru dźwignikami hydraulicznymi w czasie napraw toru.
5. W przypadku, gdyby podnoszeniu toru towarzyszyły chwilowe nagłe i silne wstrząsy, wówczas można by było oczekiwać wystąpienia „zjawiska przeskoku”,



- czyli nagłej zmiany postaci odkształconej podnoszonego toru. Prawdopodobieństwo zaistnienia takiego zjawiska rośnie wraz ze wzrostem krzywizny pionowej podłoża podsypkowego oraz pojawienia się dodatkowo lokalnej nierówności pionowej toru w miejscu ewentualnego ustawienia podnośnika hydraulicznego bądź urządzenia pomiarowego do badań podtorza.
6. W artykule została przeprowadzona analiza zagadnienia podnoszenia toru kolejowego z uwzględnieniem wpływu zmian długości osi toru oraz działania poziomej reakcji podłoża  $r(u) = k_1 \cdot u$  na pracę toru. Otrzymano równanie nieliniowe (10) uwzględniające wpływ zasadniczych wielkości (siła ściskająca, siła podnosząca czy krzywizna podłoża) na stateczność bezstykowego toru kolejowego w płaszczyźnie pionowej.
  7. Analizując cały przebieg procesu zmian postaci odkształconych toru pod działaniem siły podnoszącej  $Q$ , można ustalić taki przejściowy stan jego odkształcenia (tabl. 7), przy którym postać równowagi uniesionego w górę toru staje się niestateczna ( $0,5 \cdot L_Q \geq \Delta L$ ) i zachodzi zjawisko gwałtownego, samorzutnego przejścia jednej postaci odkształconej, o strzałce  $f$  i długości odrywania toru od podłoża, w postać drugą — o kształcie utrwalonym przy  $Q=0$ , której odpowiada znacznie większa strzałka i długość fali ( $f_{\max}, l_{\max}$ ).
  8. Przyjęcie skorygowanych wielkości (por. tabl. 5 i 7) pozwala opisać zmiany postaci odkształconej toru pod działaniem skupionej siły podnoszącej  $Q$ .

## BIBLIOGRAFIA

1. *Bednarek Wł.*: Analiza stateczności eksploatowanego toru bezstykowego w warunkach utraty jego kontaktu z podłożem. Praca doktorska, Poznań 2002.
2. *Bednarek Wł.*: Analysis of continuous welded rail track stability in vertical plane. Archives of Civil Engineering, L.1, 2006.
3. *Bednarek Wł.*: Loss of contact analysis in jointless track on ballast due to influence of nonaxial horizontal subsoil reaction transfer. Archives of Civil Engineering, L. 3, 2004.
4. *Bogdaniuk B.*: Stateczność toru bezstykowego w procesie jego eksploatacji. Praca doktorska, Poznań 1972.
5. *Dieterman H. A., Van M. A., Van Damm A. J. P., Esveld C.*: Longitudinal forces in railroad structures. *Rail Engineering International*, 1990 nr 1.
6. *Führer G.*: Oberbauberechnung. VEB Verlag für Verkehrswesen, Berlin 1978.
7. *Huber M. T.*: Pisma. Zagadnienia kolejowe. Tom III, dział VIII, PWN, Warszawa 1957.
8. *Kerr A. D.*: On the stability of the railroad track in the vertical plane. *Rail International* (Journal of the International Railway Congress Association, Brussels, Belgium), No. 2, 1974.
9. *Kerr A. D., El-Aini Y. M.*: Determination of admissible temperature increases to prevent vertical track buckling. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, 1978.
10. *Mazurek T.*: Budowa kolei. WKŁ, Warszawa, 1964.
11. *Szumierz W.*: Analiza utraty kontaktu prostego toru bezstykowego z podłożem. Archiwum Inżynierii Lądowej, tom XIX, 1973, zeszyt 2.
12. *Szumierz W.*: Do zagadnień stateczności toru bezstykowego. *Przegląd Kolejowy Drogowy*, 1966, nr 6.

13. Szumierz W.: Stateczność prostego toru bezстыkowego przy zmianach temperatury. Archiwum Inżynierii Lądowej, tom XVII, 1971, zeszyt 2.
14. Świtka R.: Statyka szyny przy podnoszeniu toru. *Drogi Kolejowe* 1988, nr 3.
15. Świtka R.: Wstęp do badań nad statecznością nieskończenie długiej belki na podłożu sprężystym podnoszonej siłą skupioną. ZNPP, Poznań 1988, nr 31.
16. Van M. A.: Stability of continuous welded rail track. Delft 1995.