

Koncepcja przedziałami liniowego modelowania dynamiki systemu kierowca - samochód - droga w aspekcie badań kierowności

DARIUSZ ŻARDECKI

Przemysłowy Instytut Motoryzacji w Warszawie

W pracy przedstawiono koncepcję przedziałami liniowego modelowania układu dynamicznego kierowca – samochód – droga. Proponowana metoda modelowania oparta jest na specjalnych odwzorowaniach luz(...), tar(...) i związanym z tymi odwzorowaniami aparacie matematycznym. Takie podejście nie tylko istotnie ułatwia syntezę modeli opisujących działanie tarcia i luzu w mechanizmach kierowniczych (w układach ze wspomaganie i bez, w pojazdach 2WS i 4WS), opisujących elementy progowe i ograniczenia kierowcy, ale upraszcza także procedury symulacyjne, jak również analizę osobliwych zjawisk nieliniowych (np. efekty stick-slip i opóźnienia).

1. WPROWADZENIE

Badania kierowności samochodu obejmują rozległą problematykę dotyczącą bezpieczeństwa czynnego systemu "kierowca - samochód - droga" (KSD). U podstaw tych badań leżą modele matematyczne opisujące system KSD w kategoriach teorii mechaniki, układów dynamicznych i sterowania.

We wczesnym okresie (lata 1950-70) badania kierowności koncentrowały się na podstawowych własnościach sterownych pojazdu opisywanych przez proste modele liniowe tzw. dynamiki poprzecznej. Modele takie umożliwiały analizę dynamiki systemu KSD metodami częstotliwościowymi, w tym badanie stabilności oraz wrażliwości na zmianę podstawowych parametrów. Modele liniowe nadawały się więc do opisu zachowań samochodu w zakresie niewielkich zaburzeń ruchu, o ile w jego podzespołach sterujących nie występowały znaczące luzy lub tarcia wymagające bezwzględnie opisu nieliniowego. Modele liniowe znajdowały też zastosowanie w badaniach symulacyjnych manewrów drogowych przy niezbyt gwałtownych choć silnych wymuszeniach, jako moduły opisujące dynamikę poprzeczną pojazdu w jego lokalnym układzie współrzędnych.

Obecnie badania kierowności wykraczają zwykle poza ruch bryły nadwozia i obejmują także dynamikę podzespołów sterujących. Dotyczy to przede wszystkim układu kierowniczego, zawieszenia oraz układu hamulcowego, które w nowoczesnych samochodach są coraz bardziej skomplikowane mechanicznie i naszpikowane automatyką. Skomplikacja podzespołów sprzyja, w miarę ich zużycia, powstawaniu nadmier-

nych luzów i tarć, co rodzi potencjalne zagrożenia związane z drganiami nieliniowymi (problemy shimmy, stick-slip). Występowanie w nich w serwomechanizmów i innych elementów automatyki wymaga tymbarziej analiz nieliniowych opartych na symulacji komputerowej i modelach z nieliniowościami progowymi.

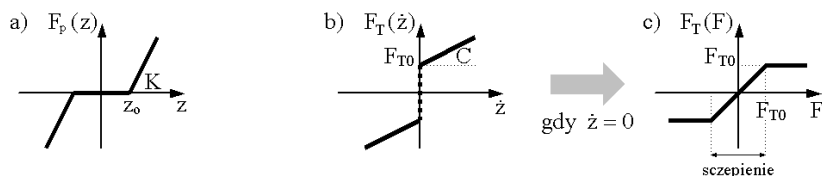
Uwzględnienie w modelu mechanizmu luzów, tarć, a także ograniczników oraz sprężystości i tłumień o skokowo zmiennych wartościach może być realizowane poprzez przedziałami liniowe charakterystyki statyczne oraz poprzez przedziałami liniowe podmodele dynamiczne wyrażane zmiennostrukturalnymi równaniami różniczkowymi.

Świadczą o tym informacje zawarte w pracach poświęconych układom mechanicznym z nieliniowościami progowymi (np. [1-3, 6, 8, 12]), czy też w publikacjach odnoszących się już bezpośrednio do samochodu i jego podzespołów (np. [4, 5, 7, 11, 13]). Warto w tym miejscu dodać, iż przedziałami liniowe modele są dość popularne także w innych dziedzinach techniki (zwłaszcza w elektronice, automatyce i robotyce, co wynika bezpośrednio z postaci charakterystyk półprzewodnikowych oraz stosowania w sterowaniu układów przełączających), a nawet doczekały się w pewnych obszarach spójnej teorii matematycznej (odniesienia literaturowe zawarte np. w pracach [16, 18]).

Modele przedziałami liniowe były też stosowane przez autora i współpracowników w dotychczasowych pracach poświęconych problematyce kierowności samochodu w obecności luzu i tarcia w układzie kierowniczym (np. [9, 10, 15, 17]). Istotnym nowum w stosunku do prac innych autorów było zastosowanie specjalnych przedziałami liniowych odwzorowań luz(...) i tar(...) i ich oryginalnego aparatu matematycznego ([16, 19]), które umożliwiają tworzenie efektywnych modeli oraz procedur obliczeniowych, a także ułatwiają analizy. W dotychczasowych badaniach rozpatrywano model dynamiki samochodu w warunkach tzw. testów otwartych realizowanych ze stałą prędkością jazdy. Celem niniejszego referatu jest prezentacja rozszerzonej koncepcji przedziałami liniowego modelowania w odniesieniu nie tylko do pojazdu, ale i kierowcy. Rozbudowa modelu samochodu i wprowadzenie modelu kierowcy-sterownika pozwala prowadzić badania symulacyjne kierowności w systemie zamkniętym KSD wg rozmaitych testów ISO i ECE. Pewnym novum w stosunku do poprzednich prac będzie nie tylko dopuszczenie zmienności prędkości jazdy, ale także uwzględnienie w modelu niestacjonarności parametrów tarcia wynikających ze zmienności nacisków. W referacie zasygnalizowane będą na przykładach szczególne walory przedziałami liniowego modelowania i zastosowanych odwzorowań luz(...) i tar(...), zarówno na etapie formułowania modeli, jak i w analizach.

2. Odwzorowania luz(..) i tar(...) w opisie przedziałami liniowych modeli elementarnych

Podstawowe charakterystyki przedziałami liniowe występujące w modelach elementarnych opisujących działanie luzu i tarcia w mechanizmach cechują się podobieństwami topologicznymi (rys.1).



Rys. 1. Charakterystyki występujące w elementarnych modelach luzu (a) i tarcia (b, c).
Fig.1. Characteristics of elementary models of freeplay (a) and friction (b,c).

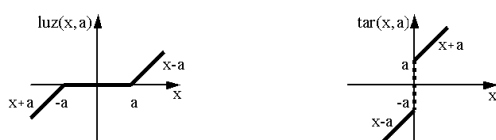
Uwaga ta dotyczy również charakterystyk psychomotorycznych występujących w modelach kierowcy w odniesieniu do opisów ograniczeń percepcji (charakterystyka ze strefą martwą o kształcie z rys.1a) oraz ograniczeń wysiłkowych układu neuromuskularnego (charakterystyka z nasyceniem o kształcie z rys.1c).

Dostrzeżenie podobieństw topologicznych (rys. 2) zrodziło pomysł wprowadzenia specjalnych odwzorowań luz(...) i tar(...) z ich wspólnym aparatem matematycznym:

Dla $-\infty < x < +\infty$ oraz $a \geq 0$

$$y = \text{luz}(x, a) = x + \frac{|x - a| - |x + a|}{2}$$

$$y = \text{luz}^{-1}(x, a) = \text{tar}(x, a) = x + a \cdot s(x), \quad \text{gdzie: } s(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ s^* \in [-1, 1] & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$



Rys. 2. Interpretacja topologiczna odwzorowań luz(...) i tar(...).
Fig. 2. Topological interpretation of mappings luz(...) and tar(...).

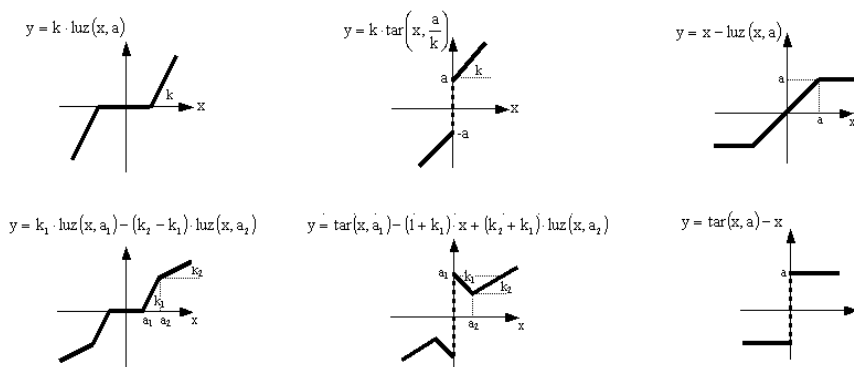
Zestawienia formuł analitycznych i twierdzeń (wraz z dowodami) odnoszących się do operacji funkcyjnych, równań i układów równań funkcyjnych, a także inkluzji i równań różniczkowych zawierających odwzorowania luz(...) i tar(...) podane są

w pracach autora [16], [19]. Poniżej zaprezentowano ich 2 przykłady (formuły te będą wykorzystane w p.4):

$$\text{Dla } k_1 \geq 0, k_2 \geq 0 \quad k_1 \cdot \text{tar}(z, a_1) + k_2 \cdot \text{tar}(z, a_2) = (k_1 + k_2) \cdot \text{tar}(z, \frac{k_1 \cdot a_1 + k_2 \cdot a_2}{k_1 + k_2}). \quad (\text{F.1})$$

$$\text{Jeżeli } \text{luz}(y, b) = k \cdot \text{luz}(z - y, a) \quad \text{to} \quad \text{luz}(y, b) = \frac{k}{k+1} \cdot \text{luz}(z, a + b). \quad (\text{F.2})$$

Stosując kombinacje liniowe $\text{luz}(\dots)$ i $\text{tar}(\dots)$ (przykłady na rys.3) oraz przesunięcia argumentów można konstruować dowolne przedziałami liniowe charakterystyki (w szczególności charakterystyki elementów uwzględnianych w modelu systemu KSD).



Rys. 3. Przykłady opisu charakterystyk przedziałami liniowych z użyciem $\text{luz}(\dots)$ i $\text{tar}(\dots)$.

Fig. 3. Examples of description of piecewise linear characteristics with the aid of $\text{luz}(\dots)$ and $\text{tar}(\dots)$.

Główną zaletą stosowania $\text{luz}(\dots)$ i $\text{tar}(\dots)$ w modelowaniu układów nieliniowych jest możliwość dokonywania operacji analitycznych w równaniach podczas ich formalnych uproszczeń, a zwłaszcza rozwikłań.

3. Założenia i ogólna struktura systemu KSD

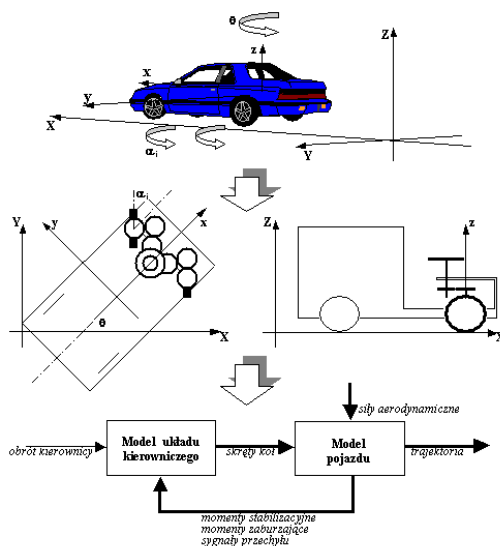
Opracowując przedziałami liniowy model systemu KSD przyjęto założenia ogólne:

- **Model systemu KSD** tworzony jest pod kątem symulacyjnych badań wpływu luzu i tarcia w układzie kierowniczym na kierowność i komfort prowadzenia samochodu. Badania dotyczą pojazdów 4-kołowych 2WS lub 4WS jadących po płaskiej, równej i suchej drodze, bez gwałtownych hamowań i przyspieszeń, prowadzonych zgodnie ze standardami testów ISO. Z uwagi na rozległość testów drogowych obejmujących zarówno manewry (np. zmiana pasa ruchu) i stabilizację ruchu prostoliniowego w obecności zakłóceń (np. niewyważenie koła), model systemu KSD tworzony jest w przynajmniej w dwóch wersjach: dla „dużych” i dla „małych” wymuszeń.

- **Model matematyczny kierowcy-sterownika** ma charakter makroskopowy, uwzględniający wprawdzie fizjologiczny aspekt sterowania, ale utworzony w konwencji teorii automatyki z wykorzystaniem transmitancji oraz bloków charakterystyk przedziałami liniowych. Struktura modelu kierowcy obejmuje moduł percepcji, moduł przetwarzania sygnałów i generacji sterowania oraz moduł wykonawczy. Uwzględnia się ograniczenia psymotoryczne na wejściu i wyjściu, opóźnienia w transmisji sygnałów, korekcję dynamiczną, a także wykorzystanie w generacji sterowania tzw. modeli referencyjnych zakodowanych w pamięci. Wątek modelowania kierowcy-sterownika jest szerzej omówiony w drugim referacie autora [22].

- **Model matematyczny samochodu** stanowi strukturę opartą na autonomicznych modelach częściowych i podmodelach. Struktura ta uwzględnia a priori autonomiczność podzespołów wynikającą z istotnie słabych sprzężeń. M.in., mając na uwadze małe momenty dewiacyjne, dopuszcza się opis dynamiki elementów układu kierowniczego w kategorii ruchów płaskich, mimo iż nadwozie wykonuje ruchy przestrzenne.

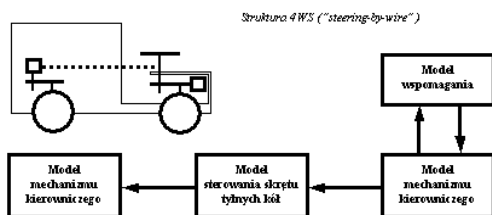
Z uwagi na przedmiot badań i specyfikę pod modeli w modelu samochodu wyróżnia się dwa główne modele częściowe: model układu kierowniczego oraz model ruchu pojazdu (rys. 4).



Rys. 4. Idea dekompozycji modelu dynamiki samochodu 2WS na 2 główne modele częściowe.

Fig. 4. A decomposition of model of dynamics of a 2WS car into two main partial models.

Model układu kierowniczego ma strukturę modułową uwzględniającą różne rozwiązania techniczne – bez wspomagania i ze wspomaganem 2WS oraz 4WS (rys. 5).

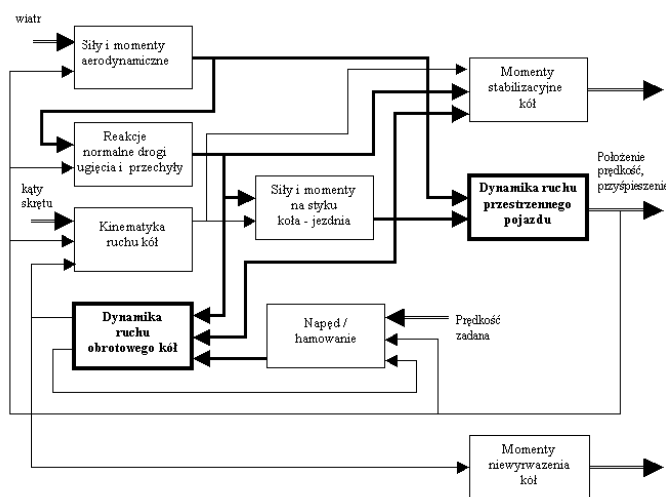


Rys. 5. Koncepcja modułowa modelu układu kierowniczego (tu dla struktury 4WS).

Fig. 5. A module-type conception of steering system model (for 4WS structure).

Moduł podstawowy – model mechanizmu kierowniczego opisuje przedziałami liniowo dynamikę mechanizmu z uwzględnieniem luzu (w przekładni) oraz tarcia kinetycznego i statycznego (w zwrotnicach i w ewentualnym tłumiku drgań). W wersji rozbudowanej jest to model wieloelementowy MBS. Dopuszcza on niesymetrię lewej i prawej strony układu, wynikającą z niesymetrii rozwiązań konstrukcyjnych oraz oddziaływań na koła podczas skrętu, a także niestacjonarność tarcia spoczynkowego w zwrotnicach, uzależnioną od przechyłów nadwozia. W wersji zredukowanej model przystaje do „rowerowego” modelu pojazdu (więcej szczegółów w pkt. 4). Moduły dodatkowe – model wspomagania 2WS oraz model transmisji sterowania 4WS, wyrażane są przez typowe transmitancje i charakterystyki przedziałami liniowe stosowane w opisach dynamiki serwomechanizmów. W charakterystyce wyjściowej członu wspomagającego, jak i w charakterystyce bloku transmisji sterowania 4WS dla tylnych kół uwzględnione są nieliniowe uzależnienia współczynników wzmocnienia od prędkości pojazdu.

Model pojazdu ma strukturę modułową złożoną z podmodeli opisujących ruch bryły nadwozia, zawieszenie, sterowanie napędem i hamowaniem, współpracę koła z jezdnią, oddziaływania aerodynamiczne oraz zaburzenia ruchu spowodowane niewyważeniem koła.



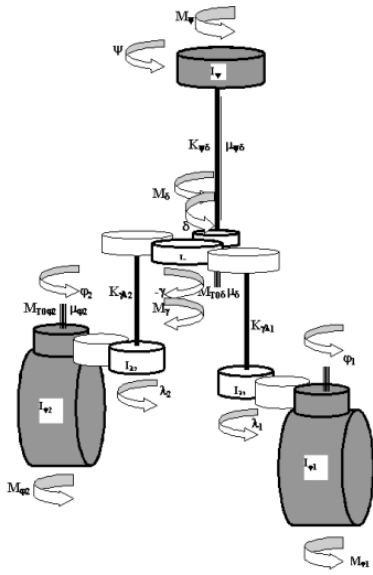
Rys. 6. Koncepcja modułowa modelu pojazdu (tu wersja bez dynamiki zawieszenia).

Fig. 6. A module-type conception of a car model (without suspension dynamics).

Przedstawiona na rysunku 6 struktura modułowa modelu częściowego dynamiki ruchu pojazdu bazuje na opracowaniach Lozi (szczegóły np. w [9]) i odnosi się do testów z „dużymi” wymuszeniami. Przewiduje się jego rozbudowę i uwzględnienie przedziałami liniowego podmodelu dynamiki zawieszenia. W wersji zredukowanej, przystającej do „małych” wymuszeń i stałej prędkości jazdy, model częściowy pojazdu ma postać modelu rowerowego Rocardé'a.

4. Wykorzystanie aparatu matematycznego luz(...) i tar(...) w syntezie modeli elementów systemu KSD

Odwzorowania luz(...) i tar(...) pozwalają wyrażać charakterystyki i całe modele przedziałami liniowe w zwartych analitycznych formach. Walory aparatu matematycznego luz(...) i tar(...) w modelowaniu elementów systemu KSD są jednak szczególnie widoczne podczas syntezy modelu i wyznaczania w sposób formalny jego form uproszczonych. Poniżej będzie to pokazane na przykładzie syntezy wysokorzędowego niesymetrycznego modelu mechanizmu kierowniczego i jego redukcji do postaci niskorzędowej przystającej do „rowerowego” modelu pojazdu. Podobne rozważania przedstawione w pracy [14] nie obejmowały przypadku układu ze wspomaganiem.



- Oznaczenia:
- ψ - kąt obrotu kierownicy
 - δ - kąt obrotu koła przekładni od strony kierownicy
 - γ - kąt obrotu kół przekładni od strony zwrotnic
 - λ_1, λ_2 - kąty obrotu elementów układu przenoszącego ruch na zwrotnice
 - φ_1, φ_2 - kąty obrotu zwrotnic kół jezdnych
 - M_ψ - moment siły na kole kierownicy
 - M_δ - moment siły wspomagania sterowania przed przekładnią tj. od strony kierownicy
 - M_γ - moment siły wspomagania sterowania za przekładnią tj. od strony zwrotnic
 - $M_{\varphi_1}, M_{\varphi_2}$ - momenty sił zewnętrznych oddziałujących na zwrotnice (stabilizacyjne plus niewównażenia)
 - I_ψ - moment bezwładności kierownicy wraz z wałkiem
 - I_δ - moment bezwładności koła przekładni od strony kierownicy
 - I_γ - moment bezwładności koła przekładni od strony zwrotnic
 - $I_{\varphi_1}, I_{\varphi_2}$ - momenty bezwładności elementów przenoszącego ruch na zwrotnice
 - $I_{\varphi_1}, I_{\varphi_2}$ - momenty bezwładności zwrotnic z kołami
 - $K_{\psi\delta}$ - współczynnik sztywności wałka kierownicy
 - $K_{\delta\gamma}$ - współczynnik sztywności zębów przekładni
 - $K_{\gamma\lambda_1}, K_{\gamma\lambda_2}$ - współczynniki sztywności ci wałków reprezentujących drążki
 - $K_{\lambda\varphi_1}, K_{\lambda\varphi_2}$ - współczynniki sztywności zębów zastępczych „przekładni” zwrotnic
 - $\mu_{\psi\delta}$ - współczynnik tarcia materiałowego wałka kierownicy
 - μ_δ - współczynnik tarcia w ułożyskowaniu koła przekładni od strony kierownicy (w tłumiku)
 - $\mu_{\varphi_1}, \mu_{\varphi_2}$ - współczynniki tarcia w ułożyskowaniu zwrotnic
 - $M_{T\psi\delta}$ - moment sił tarcia suchego w ułożyskowaniu koła przekładni od strony kierownicy (w tłumiku)
 - $M_{T\gamma\lambda_1}, M_{T\gamma\lambda_2}$ - momenty sił tarcia suchego ułożyskowania zwrotnic
 - $(\delta - p\gamma)_0$ - parametr luzu (położenia luzu przekładni widnianego od strony kierownicy)
 - p - przełożenie przekładni (definiowane dla stanu ustalonego tak, że $\delta = p \cdot \gamma$)
 - n_1, n_2 - przełożenia „przekładni” mechanizmu zwrotniczego (dla stanów ustalonych $\lambda_1 = n_1 \cdot \varphi_1, \lambda_2 = n_2 \cdot \varphi_2$)
- W użytkowym modelu symulacyjnym $I_\psi, I_\delta, I_\gamma, I_{\varphi_1}, I_{\varphi_2} = 0, K_{\psi\delta}, K_{\delta\gamma}, K_{\gamma\lambda_1}, K_{\gamma\lambda_2} \rightarrow \infty$.

Rys. 7. Zastępczy model fizyczny mechanizmu kierowniczego.
Fig. 7. A physical model of the steering system.

Wyjściowy model matematyczny opisujący dynamikę mechanizmu kierowniczego utworzony jest w oparciu o równania Newtona, z wykorzystaniem metody modelowania sił sprężystości i dyssypacyjnych, opartej na odwzorowaniach luz(...) i tar(...). Przyjęty jest w nich jednomasowy model tarcia. Model ten (omówiony w pracach [20], [17]) jest w pełni kompatybilny ze znanym modelem Karnoppa [8].

Przy $I_\gamma, I_\delta, I_{\lambda_1}, I_{\lambda_2} = 0, K_{\lambda_1\varphi_1}, K_{\lambda_2\varphi_2}, K_{\delta\gamma} \rightarrow \infty$ także $\lambda_1 = n_1 \cdot \varphi_1, \lambda_2 = n_2 \cdot \varphi_2$, równania ruchu stanowią układ przedziałami liniowych równań różniczkowych:

$$I_\psi \cdot \ddot{\psi} + \mu_{\psi\delta} \cdot (\dot{\psi} - \dot{\delta}) + K_{\psi\delta} \cdot (\psi - \delta) = M_\psi,$$

$$\mu_\delta \cdot \text{tar} \left(\dot{\delta}, \frac{M_{T0\delta}}{\mu_\delta} \right) - \mu_{\psi\delta} \cdot (\dot{\psi} - \dot{\delta}) - K_{\psi\delta} \cdot (\psi - \delta) + K_{\delta\gamma} \cdot \text{luz}(\delta - p \cdot \gamma, (\delta - p\gamma)_0) = M_\delta,$$

$$-p^2 \cdot K_{\delta\gamma} \cdot \text{luz} \left(\frac{\delta}{p} - \gamma, \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p} \right) + K_{\gamma\lambda_1} \cdot (\gamma - n_1 \cdot \varphi_1) + K_{\gamma\lambda_2} \cdot (\gamma - n_2 \cdot \varphi_2) = M_\gamma,$$

$$I_{\varphi_1} \cdot \ddot{\varphi}_1 + \mu_{\varphi_1} \cdot \text{tar} \left(\dot{\varphi}_1, \frac{M_{T0\varphi_1}}{\mu_{\varphi_1}} \right) - n_1^2 \cdot K_{\gamma\lambda_1} \cdot \left(\frac{\gamma}{n_1} - \varphi_1 \right) = M_{\varphi_1},$$

$$I_{\varphi_2} \cdot \ddot{\varphi}_2 + \mu_{\varphi_2} \cdot \text{tar} \left(\dot{\varphi}_2, \frac{M_{T0\varphi_2}}{\mu_{\varphi_2}} \right) - n_2^2 \cdot K_{\gamma\lambda_2} \cdot \left(\frac{\gamma}{n_2} - \varphi_2 \right) = M_{\varphi_2}.$$

(dla skrócenia zapisu nie będziemy na razie podawać zależności dla tar(0,.)).

Układ równań zawiera 3 równania ruchu oraz 2 silnie nieliniowe równania więzów uwikłane z uwagi na $\dot{\delta}$ i γ .

Rozwikłanie równania 2. nie nastęrcza trudności. Stosując formułę F1, mamy:

$$\mu_{\delta} \cdot \text{tar}\left(\dot{\delta}, \frac{M_{T0\delta}}{\mu_{\delta}}\right) - \mu_{\psi\delta} \cdot (\dot{\psi} - \dot{\delta}) = (\mu_{\delta} + \mu_{\psi\delta}) \cdot \text{tar}\left(\dot{\delta}, \frac{M_{T0\delta}}{\mu_{\delta} + \mu_{\psi\delta}}\right) - \mu_{\psi\delta} \cdot \dot{\psi}$$

Równanie dla zmiennej $\dot{\delta}$ można zatem przepisać po odwróceniu jako:

$$\dot{\delta} = \frac{1}{\mu_{\delta} + \mu_{\psi\delta}} \text{luz}(\mu_{\psi\delta} \cdot \dot{\psi} + K_{\psi\delta} \cdot (\psi - \delta) - K_{\delta\gamma} \cdot \text{luz}(\delta - p \cdot \gamma, (\delta - p\gamma)_0) + M_{\delta}, M_{T0\delta})$$

Rozwikłanie równania 3. i uwolnienie się od zmiennej γ przebiega następująco:

$$\text{Z równania 3. } \gamma - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}} = \frac{p^2 K_{\delta\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}} \cdot \text{luz}\left(\frac{\delta}{p} - \gamma, \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p}\right).$$

Stosując formułę F3:

$$\text{luz}\left(\gamma - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, 0\right) = \frac{1}{1 + \frac{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}{p^2 K_{\delta\gamma}}} \cdot \text{luz}\left(\frac{\delta}{p} - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, \left(\gamma - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}\right) \cdot \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p}\right).$$

$$\text{Stąd } \gamma = \frac{1}{1 + \frac{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}{p^2 K_{\delta\gamma}}} \cdot \text{luz}\left(\frac{\delta}{p} - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p}\right) + \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}.$$

Przy $K_{\delta\gamma} \rightarrow \infty$ otrzymujemy poszukiwane równanie dla zmiennej γ :

$$\gamma = \text{luz}\left(\frac{\delta}{p} - \frac{K_{\gamma\lambda_1} \cdot n_1 \cdot \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} \cdot n_2 \cdot \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p}\right) + \frac{K_{\gamma\lambda_1} \cdot n_1 \cdot \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} \cdot n_2 \cdot \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}.$$

Rozwikłanie więzów algebraicznych i wyznaczenie γ pozwala radykalnie uprościć model do formy równań różniczkowych zwyczajnych.

Równania ruchu dla zmiennych $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ zawierają składniki opisujące tarcie suche przy pomocy odwzorowania tar(...) także w stanach zerowania się $\dot{\phi}_1$ lub $\dot{\phi}_2$, gdy pojawia się tarcie statyczne i może występować zjawisko stick-slip. Wymaga to dookreślenia $s_{\phi_1}^*$, $s_{\phi_2}^*$ ($M_{T0\phi_1} s_{\phi_1}^*$, $M_{T0\phi_2} s_{\phi_2}^*$ stanowią momenty sił tarcia statycznego w zwrotnicach) i wyznaczenia zmiennostrukturalnych form równań ruchu (dla zerowych i niezerowych $\dot{\phi}_1$ lub $\dot{\phi}_2$). Tarcia w zwrotnicach funkcjonują w układach jednomasowych, stosując zatem ich model tarcia otrzymujemy model w postaci zmiennostrukturalnych równań ruchu bez uwikłań, a więc gotowych do użycia w standardowych procedurach symulacyjnych:

$$I_{\psi} \ddot{\psi} + \mu_{\psi\delta} (\dot{\psi} - \dot{\delta}) + K_{\psi\delta} (\psi - \delta) = M_{\psi}$$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{\mu_{\delta} + \mu_{\psi\delta}} \text{luz}\left(\mu_{\psi\delta} \dot{\psi} + K_{\psi\delta} (\psi - \delta) - \frac{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}{p^2} \text{luz}\left(\delta - p \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, (\delta - p\gamma)_0\right) + M_{\delta}, M_{T0\delta}\right)$$

$$I_{\phi_1} \ddot{\phi}_1 = \begin{cases} M_{\phi_1} - \mu_{\phi_1} \operatorname{tar} \left(\dot{\phi}_1, \frac{M_{T0\phi_1}}{\mu_{\phi_1}} \right) + n_1 K_{\gamma\lambda_1} \left(\operatorname{luz} \left(\frac{\delta}{p} - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p} \right) + \frac{K_{\gamma\lambda_2} (n_2 \phi_2 - n_1 \phi_1) + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}} \right) & \text{gdy } \dot{\phi}_1 \neq 0 \\ \operatorname{luz} \left(n_1 K_{\gamma\lambda_1} \left(\operatorname{luz} \left(\frac{\delta}{p} - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p} \right) + \frac{K_{\gamma\lambda_2} (n_2 \phi_2 - n_1 \phi_1) + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}} \right) + M_{\phi_1}, M_{T0\phi_1} \right) & \text{gdy } \dot{\phi}_1 = 0 \end{cases}$$

$$I_{\phi_2} \ddot{\phi}_2 = \begin{cases} M_{\phi_2} - \mu_{\phi_2} \operatorname{tar} \left(\dot{\phi}_2, \frac{M_{T0\phi_2}}{\mu_{\phi_2}} \right) + n_2 K_{\gamma\lambda_2} \left(\operatorname{luz} \left(\frac{\delta}{p} - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p} \right) + \frac{K_{\gamma\lambda_1} (n_1 \phi_1 - n_2 \phi_2) + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}} \right) & \text{gdy } \dot{\phi}_2 \neq 0 \\ \operatorname{luz} \left(n_2 K_{\gamma\lambda_2} \left(\operatorname{luz} \left(\frac{\delta}{p} - \frac{K_{\gamma\lambda_1} n_1 \phi_1 + K_{\gamma\lambda_2} n_2 \phi_2 + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}}, \frac{(\delta - p\gamma)_0}{p} \right) + \frac{K_{\gamma\lambda_1} (n_1 \phi_1 - n_2 \phi_2) + M_{\gamma}}{K_{\gamma\lambda_1} + K_{\gamma\lambda_2}} \right) + M_{\phi_2}, M_{T0\phi_2} \right) & \text{gdy } \dot{\phi}_2 = 0 \end{cases}$$

Wyznaczony model opisuje nieliniową dynamikę mechanizmu kierowniczego, w tym także osobliwe zjawiska stick-slip – zarówno w tłumiku przekładni (równanie dla $\dot{\delta}$), jak i w zrotnicach (równania dla $\dot{\phi}_1$, $\dot{\phi}_2$). Będzie to szerzej wyjaśnione w punkcie 5.

W modelu tym momenty tarcia suchego w zrotnicach mogą być traktowane jako parametry niestacjonarne, uzależnione od przechyłów nadwozia. Proponuje się wprowadzenie dla nich prostych podmodeli:

$$M_{T0\phi_1}(t) = M_{T0\phi_10} + Q_1(t) \quad M_{T0\phi_2}(t) = M_{T0\phi_20} + Q_2(t).$$

Składniki $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ mogą wynikać z równań funkcyjnych bądź różniczkowych. W najprostszym przypadku:

$$Q_1(t) = k \cdot \phi(t), \quad Q_2(t) = -k \cdot \phi(t), \quad \text{gdzie } \phi(t) \text{ – kąt przechyłu nadwozia.}$$

Podobne zabiegi wydają się zbędne w przypadku momentu tarcia w tłumiku drgań, gdyż element ten jest usytuowany centralnie.

Dalsze uproszczenia dotyczą sytuacji, gdy mechanizm kierowniczy ma pełną symetrię lewej i prawej strony i wymuszenia są na tyle małe, że można pominąć niejednakowe oddziaływanie momentów stabilizacyjnych. Przy takich założeniach model dynamiki mechanizmu układu kierowniczego można zapisać w formie przystającej do tzw. modelu rowerowego pojazdu. Wówczas oddziaływania występujące dla obu kół kierowanych odniesione są sumarycznie do jednego zastępczego koła kierowanego.

Wprowadzając oznaczenia zmiennych i parametrów:

$$M_{\phi} = 2M_{\phi 1/2}, \quad I_{\phi} = 2I_{\phi 1/2}, \quad \mu_{\phi} = 2\mu_{\phi 1/2}, \quad M_{T0\phi} = 2M_{T0\phi 1/2}, \quad n = n_{1/2}, \quad K_{\gamma\phi 1/2} = n_{1/2}^2 K_{\gamma\phi 1/2},$$

$$K_{\gamma\phi} = 2K_{\gamma\phi 1/2} \text{ po zsumowaniu stronami równań dla zmiennych } \ddot{\phi}_1 \text{ oraz } \ddot{\phi}_2 \text{ otrzymamy}$$

model uproszczony:

$$I_\psi \ddot{\psi} + \mu_{\psi\delta} (\dot{\psi} - \dot{\delta}) + K_{\psi\delta} (\psi - \delta) = M_\psi,$$

$$\dot{\delta} = \frac{1}{\mu_\delta + \mu_{\psi\delta}} \text{luz} \left(\mu_{\psi\delta} \dot{\psi} + K_{\psi\delta} (\psi - \delta) - \frac{K_{\gamma\varphi}}{n^2 p^2} \text{luz} \left(\delta - n p \left(\varphi + \frac{n M_\gamma}{K_{\gamma\varphi}} \right), (\delta - p \gamma)_0 \right) + M_\delta, M_{T0\delta} \right),$$

$$I_\varphi \ddot{\varphi} = \begin{cases} -\mu_\varphi \text{tar} \left(\dot{\varphi}, \frac{M_{T0\varphi}}{\mu_\varphi} \right) + K_{\gamma\varphi} \left(\text{luz} \left(\frac{\delta}{n p} - \left(\varphi + \frac{n M_\gamma}{K_{\gamma\varphi}} \right), \frac{(\delta - p \gamma)_0}{n p} \right) + \frac{n M_\gamma}{K_{\gamma\varphi}} \right) + M_\varphi & \text{gdy } \dot{\varphi} \neq 0 \\ \text{luz} \left(K_{\gamma\varphi} \left(\text{luz} \left(\frac{\delta}{n p} - \left(\varphi + \frac{n M_\gamma}{K_{\gamma\varphi}} \right), \frac{(\delta - p \gamma)_0}{n p} \right) + \frac{n M_\gamma}{K_{\gamma\varphi}} \right) + M_\varphi, M_{T0\varphi} \right) & \text{gdy } \dot{\varphi} = 0 \end{cases}.$$

Przedstawione modele dynamiki mechanizmu kierowniczego z luzem w przekładni oraz z tarciami w zwrotnicach i w tłumiku drgań uwzględniają wspomaganie przed ($M_\delta(t)$), bądź za ($M_\gamma(t)$) przekładnią. W modelu mechanizmu sterowania skretem tylnych kół (pojazd 4WS) można dodatkowo zerować moment bezwładności tylnej kierownicy.

5. Wykorzystanie aparatu matematycznego luz(...) i tar(...) w analizie osobliwych zjawisk w systemie KSD

Modele przedziałami liniowe bazujące na odwzorowaniach luz(...) i tar(...) ułatwiają nie tylko symulację numeryczną, ale także umożliwiają wyjaśnienie osobliwych zjawisk, jakie obserwuje się w systemie KSD. W niniejszym punkcie zaprezentujemy to w odniesieniu do zjawiska stick-slip spowodowanego przez tarcia w układzie kierowniczym oraz w odniesieniu do osobliwego efektu opóźnienia spowodowanego luzem w układzie kierowniczym oraz nieczułością percepcji kierowcy.

Zjawisko stick-slip

Proces szepiania / rozczepiania dotyczy elementów trących występujących w zwrotnicach oraz w tłumiku drgań.

Równanie opisujące dynamikę mechanizmu zwrotniczego ma strukturę typu:

$$I_\varphi \ddot{\varphi} = \begin{cases} -\mu_\varphi \text{tar} \left(\dot{\varphi}, \frac{M_{T0\varphi}}{\mu_\varphi} \right) + \Sigma M_\varphi & \text{gdy } \dot{\varphi} \neq 0 \\ \text{luz}(\Sigma M_\varphi, M_{T0\varphi}) & \text{gdy } \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

Analizujemy to równanie dla osobliwego stanu $\dot{\varphi} = 0$. Gdy $-M_{T0\varphi} \leq \Sigma M_\varphi \leq M_{T0\varphi}$ (czyli $\text{luz}(\Sigma M_\varphi, M_{T0\varphi}) = 0$), wówczas $\ddot{\varphi} = 0$, co oznacza szepienie. Gdy $|\Sigma M_\varphi| > M_{T0\varphi}$ wówczas $\ddot{\varphi} \neq 0$, co oznacza rozczepienie. Zauważmy, że w przypadku $\Sigma M_\varphi = \text{const}$ zjawisko stick-slip może wynikać z niestacjonarności $M_{T0\varphi}$ spowodowanej przez przechyły nadwozia.

Równanie opisujące dynamikę (quasidynamikę) tłumika drgań ma strukturę typu

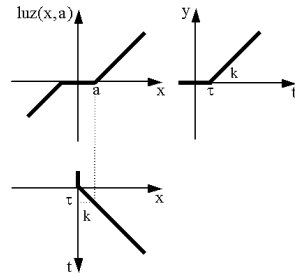
$$\dot{\delta} = \frac{1}{\mu_\delta + \mu_{\psi\delta}} \text{luz}(\Sigma M_\delta, M_{T0\delta}).$$

Gdy $-M_{T_{0\delta}} \leq \Sigma M_{\delta} \leq M_{T_{0\delta}}$ ($\text{luz}(\Sigma M_{\delta}, M_{T_{0\delta}}) = 0$) wówczas $\dot{\delta} = 0$ i stan ten trwa tak długo (sczepienie), aż $|\Sigma M_{\delta}| > M_{T_{0\delta}}$ ($\text{luz}(\Sigma M_{\delta}, M_{T_{0\delta}}) \neq 0$) i następuje $\dot{\delta} \neq 0$ (rozczepienie).

Osobliwe opóźnienie

Analizujemy efekty przekształcania sygnałów $x(t)$ przez blok statyczny z charakterystyką ze strefą martwą, opisany przez odwzorowanie $y(t) = \text{luz}(x(t), a)$. Z uwagi na nieliniowy charakter transformacji wykluczonym jest sformułowanie zależności typu transmitancyjnego, które obowiązywałyby dla dowolnych $x(t)$. Natomiast możliwym i cennym jest wysnuć wnioski jakościowe na podstawie analiz dotyczących pewnych charakterystycznych przebiegów, z jakimi mamy do czynienia w badaniach. Z uwagi na ograniczone ramy referatu, prezentowane rozważania dotyczą tu tylko jednego, aczkolwiek bardzo reprezentatywnego sygnału liniowo narastającego $x(t) = k \cdot t \cdot l(t)$. Taki sygnał jest typowym fragmentem sygnału oscylującego wokół poziomu zerowego i aproksymowanego w sposób przedziałami liniowy. W przypadku modelu kierowcy, liniowo narastający przebieg $x(t)$ może wyrażać liniowo zmienne narastanie uchybu, jaki pojawia się po zaistnieniu zaburzenia trajektorii ruchu samochodu.

Transformację $y(t) = \text{luz}(x(t), a)$, gdzie $x(t) = k \cdot t \cdot l(t)$ rozpatrujemy graficznie (rys. 8).



Rys. 8. Geometryczna interpretacja transformacji.
Fig. 8. Geometrical interpretation of a transformation.

W wyniku transformacji otrzymujemy:

$$y(t) = \text{luz}(k \cdot t \cdot l(t), a) = k \cdot (t - \tau) \cdot l(t - \tau), \quad \text{gdzie:} \quad \tau = \frac{a}{|k|}.$$

Oznacza to, że sygnał ten doznaje tu opóźnienia. Wzrasta ono ze wzrostem strefy martwej, natomiast maleje, gdy sygnał wejściowy jest bardziej ostry. Takie „czyste” opóźnienie sygnału $x(t)$ przechodzącego przez blok z nieliniowością typu $\text{luz}(\dots)$ nie jest cechą obowiązującą dla wszystkich typów sygnałów. Np. dla sygnału skokowego ($k \rightarrow \infty$, sygnał ograniczony) opóźnienie znika, natomiast obniża się wysokość sygnału. Analizując przekształcenie innych typów sygnałów można konstatować, że prze-

kształcanie sygnału łagodnie zmiennego pojawiającego się na wejściu bloku z nieliniowością typu luz(...) powoduje opóźnienie w pojawieniu się jego stransformowanej odpowiedzi.

6. Uwagi końcowe

W referacie przedstawiono koncepcję przedziałami liniowego modelowania dynamiki systemu kierowca – samochód – droga z wykorzystaniem specjalnych odwzorowań przedziałami liniowych luz(...), tar(...) i ich aparatu matematycznego. Za sprawą tego aparatu możliwe jest przekształcanie modeli przedziałami liniowych do form zredukowanych i bez uwikłań w sposób formalny poprzez przejścia graniczne z parametrami „małymi” do zera i z parametrami „dużymi” do nieskończoności. Formy te doskonale przystają do typowych procedur symulacji komputerowej. Uzyskane modele mają zwarte analityczne formy, łatwe do jakościowej analizy i interpretacji osobliwych zjawisk nieliniowych, jakie towarzyszą istnieniu luzów i taré w mechanizmach pojazdu, czy też ograniczeń psychomotorycznych, jakie występują u kierowcy.

Referat powstał w ramach grantu 4T07B05928 sponsorowanego przez Ministerstwo Nauki i Informatyzacji w latach 2005-2007.

Literatura

- [1] ARMSTRONG-HELOUVRY B., DUPONT P., CANUDAS DE WIT C.: *A Survey of Models, Analysis Tools and Compensation Methods for the Control of Machines with Friction*. Automatica. Vol.30, No.7, 1994, s. 1083-1138.
- [2] BAJKOWSKI J., GRZESIKIEWICZ W.: *Matematyczny opis układów napędowych z uwzględnieniem sił tarcia suchego*. Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej, Mechanika, Z.68, 2001, s.35-50.
- [3] BROGLIATTO B., DAM A.T., PAOLI L., GENOT F., ABADIE M.: *Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems*. Applied Mechanical Review: Vol.55, No.2, 2002, s.107-150.
- [4] CHRSTOS J.P., HEYDINGER G.J.: *Inclusion of Steering System Freeplay in Open-Loop Vehicle Dynamic Simulations*. Proceedings of 12 IAVSD Symposium. Supplement VSD, 1991, s.99-113.
- [5] DEMIC M.: *Analysis of Influence of Design Parameters on Steered Wheels Shimmy of Heavy Vehicles*. Vehicle System Dynamics, Vol.26, 1996, s.343-379.
- [6] GRZESIKIEWICZ W.: *Dynamics of mechanical systems with constraints*. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Mechanika, Nr 117, 1990.
- [7] INABA A., MIYAJIMA M.: *Design Concept of Front Suspension Compliance Application to Bluebird 910 with Examination of Steering Shimmy*. JSAE Review. No.11, 1981, s.43-49.
- [8] KARNOPP D.: *Computer Simulation of Stick-Slip Friction on Mechanical Dynamic Systems*. Transactions of the ASME. Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control Vol.107, March 1985, s.100-103.
- [9] LOZIA Z., ŻARDECKI D.: *Vehicle Dynamics Simulation with Inclusion of Freeplay and Dry Friction in Steering System (SAE Paper 2002-01-0619)*. SAE Transactions. Journal of Passenger Car, Mechanical Systems, Section 6 – Vol.111, 2002, s.907-923.
- [10] LOZIA Z., ŻARDECKI D.: *Dynamics of Steering System with Freeplay and Dry Friction – Comparative Simulation Investigation for 2WS and 4WS Vehicles, (SAE Paper 2005-01-1261)*. Special Publication SP-1915 “Steering and Suspension, Tires and Wheels”, SAE’ 2005 World Congress, 2005, s.1-9.

- [11] MACADAM C.: *The Interpretation of Aerodynamic Properties and Steering System Characteristics on Passenger Car Handling*. Proceedings of 14 IAVSD Symposium, Supplement VSD, 1989, s.391-404.
- [12] NORDIN M., GUTMAN P.O.: *Controlling mechanical systems with backlash - a survey*. Automatica, Vol.38, 2002, s.1633-1649.
- [13] PACEJKA B.: *Non-linearities in Road Vehicle Dynamics*. Vehicle System Dynamics, Vol.15, 1986, s.237-254.
- [14] ŻARDECKI D.: *Model matematyczny dynamiki układu kierowniczego z luzem i tarciem w przekładni*. Materiały VI Konferencji Autoprogres'98 - Jachranka 1998, T.1, s.43-52.
- [15] ŻARDECKI D.: *Analiza wrażliwości strukturalnej modelu matematycznego układu kierowniczego z luzem i tarciem*. Teka Komisji N/P Motoryzacji PAN, Z.21, 2000, s.73-82.
- [16] ŻARDECKI D.: *Odwzorowania luz(...) i tar(...) - podstawy teoretyczne oraz koncepcja zastosowań w modelowaniu dyskretnych układów mechanicznych zawierających luzy bądź tarcia*. Biuletyn WAT. Vol.L, Nr 5, 2001, s.125-160.
- [17] ŻARDECKI D.: *Steering System Freeplay and Friction in Vehicle Dynamic Models and Simulations*. The Archives of Transport, Vol.XVII, No 1, 2005, s.65-95.
- [18] ŻARDECKI D.: *Piecewise-Linear Modeling of Dynamic Systems with Freeplay and Friction*. Proceedings of 8 DSTA Conference, Łódź 2005, s.331-332.
- [19] ŻARDECKI D.: *Piecewise Linear luz(...) and tar(...) Projections. Part 1 – Theoretical Background and Friction*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol.44, No.1, 2006, s.163-184.
- [20] ŻARDECKI D.: *Piecewise Linear luz(...) and tar(...) Projection. Part 2 - Application in Modeling of Dynamic Systems with Freeplay and Friction*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol.44, No1, 2006, s.185-202.
- [21] ŻARDECKI D.: *Nieczułość percepcji i luzy źródłami opóźnień w systemie kierowca - samochód - droga*. Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej, Mechanika, 2006, s.377-385.
- [22] ŻARDECKI D.: *Model matematyczny kierowcy jako sterownika procesu kierowania samochodem – nowe spojrzenie*. Materiały Konferencji Autoprogres-Konmot 2006.

Conception of piecewise linear modeling of driver - car - road system

Summary

The paper presents a conception of piecewise linear modeling of the driver - car - road dynamical system. The method of modeling bases on special luz(...) and tar(...) projections and their mathematical apparatus. It makes easy not only synthesis (with formal simplifications) of models describing friction and freeplay actions in steering mechanisms (with or without power assistance, 2WS and 4WS vehicles), describing threshold and limiter elements of driver, but also simplify the simulation procedures, as well as some analytical studies of singular non-linear phenomena (e.g. stick-slip and time delay effects).