

Metoda identyfikacji mechanicznego obiektu dynamicznego

RYSZARD ANDRZEJEWSKI

Politechnika Łódzka
Instytut Pojazdów

W artykule przedstawiono metodę identyfikacji mechanicznego obiektu dynamicznego. Proponowana metoda wykorzystuje relacje wynikające z tzw. równania bilansu dynamicznego. Zaprezentowano przykład zastosowania tej metody dla modelu obiektu 2M2K2C stosując eksperyment komputerowy. Uzyskano dobre rezultaty.

Wykaz oznaczeń

2M2K2C - obiekt dwubryłowy (dwumasowy) z dwoma elementami sprężynującymi i z dwoma elementami tłumiącymi

$M_{1,2}$ - masa

$K_{1,2}$ - współczynnik sztywności

$C_{1,2}$ - współczynnik tłumienności

F_M - grawitacyjna siła ciężkości

g - przyspieszenie grawitacyjne

F_B - siła bezwładności

F_S - siła w elemencie sprężynującym

F_D - siła w elemencie tłumiącym

F_0 - siła wymuszająca

f - częstość wymuszenia w Hz

T - okres pulsacji wymuszenia

$\Pi(t)$ - wielkość dynamiczna

$\Lambda(t)$ - wielkość kinematyczna

P - parametr obiektu

P_{ob} - wartość parametru obliczona; znaleziona na drodze identyfikacji

Ω - bilans dynamiczny

Ω_{Π_i} - składnik bilansu dynamicznego

Δt - krok obliczeń (pomiarów)

t - czas

t_0 - czas rozpoczęcia pomiaru

ΔP - błąd algorytmu identyfikacji parametru „ P ”

Indeksy dolne

i – numer siły działającej w układzie – $i \in \{1, n\}$

j – numer kolejnego kroku obliczeniowego (pomiarowego) – $j \in \{1, s\}$

Indeks górny

k – numer bilansu dynamicznego – $k \in \{1, m\}$.

1. Wprowadzenie

Metoda została opracowana pod kątem zastosowania jej przede wszystkim w diagnostyce samochodowej. Uwzględniono techniczne warunki prowadzenia badań w warunkach samochodowej stacji diagnostycznej. Dotyczy to w szczególności wymuszenia, którego realizacja nie może być zbyt skomplikowana i zbyt kosztowna. Przyjęto w tym przypadku, że wymuszenie będzie kinematyczne, a więc realizowane za pomocą platformy sejsmicznej (wibratora). Dodatkowo założono, że wymuszenie będzie miało charakter stacjonarnego sygnału okresowego możliwie zbliżonego do harmonicznego; o stałej amplitudzie (przemieszczeniu) a o różnej regulowanej dla każdego kolejnego pomiaru częstotliwości. Dalej założono, że badany obiekt podczas pomiarów sygnałów użytych do identyfikacji obiektu znajdzie się w warunkach drgań ustalonych, czyli, że cechą badanego obiektu będzie stacjonarność. Takie założenie w przypadku pojazdu samochodowego może być w większości modeli i marek spełnione, aczkolwiek przy pewnych rozwiązaniach zawiesznień, (np. dla pewnych zawiesznień „aktywnych”) ta właściwość może nie być zachowana.

W metodzie zakłada się, że struktura obiektu jest znana, co w przypadku pojazdu samochodowego może być właściwe, zwłaszcza gdy dotyczy badań diagnostycznych pojazdu, który jako dokładnie rozeznany zarówno, co do marki, modelu, roku produkcji itd. podlega badaniom kontrolnym na stacji kontroli pojazdów.

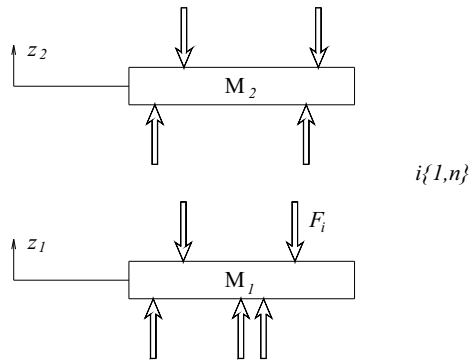
W porównaniu z np. metodą eksperymentalnej analizy modalnej [1], [3], gdzie traktuje się obiekt jako „czarną skrzynkę”, stawiając jednocześnie ostre wymagania odnośnie do spełnienia zasady superpozycji przez badany obiekt czy zasady niezmienniczości w czasie, w prezentowanej tu metodzie takich ostrych wymagań nie postawiono.

Metodę nazwano metodą bilansu dynamicznego. W dalszej części artykułu opisano ideę tej metody, jednak, jedno zagadnienie wymaga tu szczególnego podkreślenia. Jest istotne w metodzie identyfikacji wykazanie, przeprowadzenie dowodu słuszności, poprawności danego algorytmu identyfikacji. W prezentowanej metodzie, jak wykazały próby dokonane przez autora, przeprowadzenie klasycznego dowodu poprawności algorytmu na drodze analitycznej jest możliwe tylko dla najprostszych obiektów. Z tych powodów zrezygnowano z takiej drogi, proponując dokonywanie badania poprawności algorytmu identyfikacji na drodze eksperymentu komputerowego. W tym przypadku model obiektu traktowany będzie jako obiekt, a wyniki identyfikacji, czyli wartości parametrów będą porównywane z wartościami parametrów, które są znane jako „Dane” modelu komputerowego. Wnioski z tych badań nie mogą jednak stanowić podstawy do wnioskowania ogólnego. Wykazanie poprawności algorytmu doty-

czy tylko badanego przypadku; badanego obiektu i przyjętych parametrów algorytmu identyfikacji. Dla każdego innych warunków należy eksperyment powtórzyć.

2. Założenia do metody identyfikacji obiektu

Opis mechanicznego obiektu dynamicznego zawiera siły (momenty obrotowe sił) zarówno wewnętrzne jak i zewnętrzne i wymuszające – rys. 1. Oznaczmy przez „ n ” liczbę tych sił.



Rys. 1. Model obiektu mechanicznego. F_i – siły, $z_{1,2}$ – przemieszczenia, n – liczba sił

Fig. 1. Mechanical system model. F_i – forces, $z_{1,2}$ – displacements, n – number of forces

Przyjmujemy, że pod nazwą „wielkość dynamiczna” będziemy rozumieli siłę (moment obrotowy siły), ale także pochodną tej siły, czy różnicę wartości siły w przypadku opisu obiektu za pomocą równań różnicowych. W obiekcie dynamicznym wartości tych wielkości będą zależne od czasu – t . Tak zdefiniowaną wielkość dynamiczną oznaczmy przez greckie pi - $\Pi(t)$.

Przyjmujemy, że pod nazwą „wielkość kinematyczna” będziemy rozumieli przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie i dalsze pochodne, a w przypadku opisu obiektu za pomocą równań różnicowych - różnicę wartości. Oznaczmy tę wielkość przez greckie lambda - $\Lambda(t)$.

2.1. Iloczyn skalarowy

Operując zdefiniowanymi wielkościami dynamicznymi i kinematycznymi możemy, na potrzeby dalszych rozważań odnośnie do identyfikacji obiektu, zapisać iloczyn skalarowy tych wielkości

$$\Pi_i(t) \cdot \Lambda_i(t); \quad i\{1,n\} \quad (1)$$

opatrując czynniki tego iloczynu odpowiednimi znakami „+”, „-”, w zależności od przyjętego oznaczenia zwrotu za dodatni, ujemny. W zależności od wielkości dynamicznej i przyporządkowanej jej wielkości kinematycznej, iloczyn ten będzie wyrażał np.: pracę siły $F \cdot z$, moc siły $F \cdot \dot{z}$, czy też wielkość nieokreśloną fizycznie np. $F \cdot \ddot{z}$, itd.

Utworzymy dalej sumę iloczynów skalarowych dla wybranych „n” wielkości dynamicznych i dla odpowiadających tym wielkościom „n” wielkości kinematycznych

$$\sum_1^n [\Pi_i(t) \cdot A_i(t)]; \quad i\{1, n\} \quad (2)$$

gdzie „n” – liczba wszystkich sił oddziałująca na obiekt.

2.2. Bilans dynamiczny

Wyrażenie

$$\Omega = \sum_1^n \int_{t_0}^{t_0+T} [\Pi_i(t) \cdot A_i(t)]; \quad i\{1, n\} \quad (3)$$

nazwiemy **bilansem dynamicznym obiektu**.

W zależności (3):

t_0 - czas rozpoczęcia pomiaru, po stanie przejściowym, gdy istnieją już warunki drgań ustalonych,

T - okres pulsacji wymuszenia (lub jego wielokrotność).

W przypadku, gdy model obiektu opisany jest za pomocą czasu dyskretnego, zamiast operacji całkowania w bilansie dynamicznym znajdzie się operacja sumowania

$$\Omega = \sum_1^n \sum_1^s [\Pi_i(t_j) \cdot A_i(t_j)]; \quad i\{1, n\}, \quad j\{1, s\} \quad (4)$$

gdzie - s – liczba sumowań w okresie T ; $s = \frac{T}{\Delta t}$; Δt - ustalony krok obliczeń (pomiarów).

Dodatkowo, dla potrzeb analizy, zdefiniujemy wyrażenie

$$\Omega_{\Pi_i} = \int_{t_0}^{t_0+T} [\Pi_i(t) \cdot A_i(t)]; \quad i\{1, n\} \quad (5)$$

jako „składnik bilansu danej wielkości dynamicznej”. Składnik ten dla modelu dyskretnego ma postać

$$\Omega_{\Pi_i} = \sum_1^s [\Pi_i(t_j) \cdot A_i(t_j)]; \quad i\{1, n\}, \quad j\{1, s\} \quad (6)$$

Bilanś dynamicznych (3) lub (4) możemy utworzyć dla danego obiektu odpowiednio wiele w zależności od utworzonego zbioru wielkości dynamicznych i zbioru wielkości kinematycznych. W przypadku gdy będziemy dokonywać identyfikacji „m” parametrów modelu, znajdzie konieczność utworzenia „m” bilansów dynamicznych, różniących się od siebie, a więc z iloczynami skalarowymi utworzonymi za pomocą różnych wielkości dynamicznych i kinematycznych i ich różnych kombinacji. Zapis iloczynu skalarowego dla „m” wielkości dynamicznych

$$\Pi_i^k(t_j) \cdot A_i^k(t_j); \quad i\{1, n\}, \quad j\{1, s\}, \quad k\{1, m\}. \quad (7)$$

Zapis „m” bilansów dynamicznych modelu obiektu

$$\Omega^k = \sum_1^n \sum_1^s [\Pi_i^k(t_j) \cdot A_i^k(t_j)]; \quad i\{1,n\}, j\{1,s\}, k\{1,m\}. \quad (8)$$

2.2. Wyznaczenie wartości parametrów obiektu. Identyfikacja parametrów

Wielkości dynamiczne modelu obiektu opisane są zwykle za pomocą zależności w postaci funkcji, w których występują wielkości zwane parametrami

$$\Pi = \phi(P, A, \dots) \quad (9)$$

gdzie: P – parametr, A – wielkość kinematyczna.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z „ m ” poszukiwanymi wartościami parametrów będziemy operować „ m ” wielkościami dynamicznymi Π^k ; $k\{1,m\}$:

$$\Pi_i^k(t_j) = \phi_i^k(P^k, A_i^k(t_j), \dots); \quad i\{1,n\}, j\{1,s\}, k\{1,m\}. \quad (10)$$

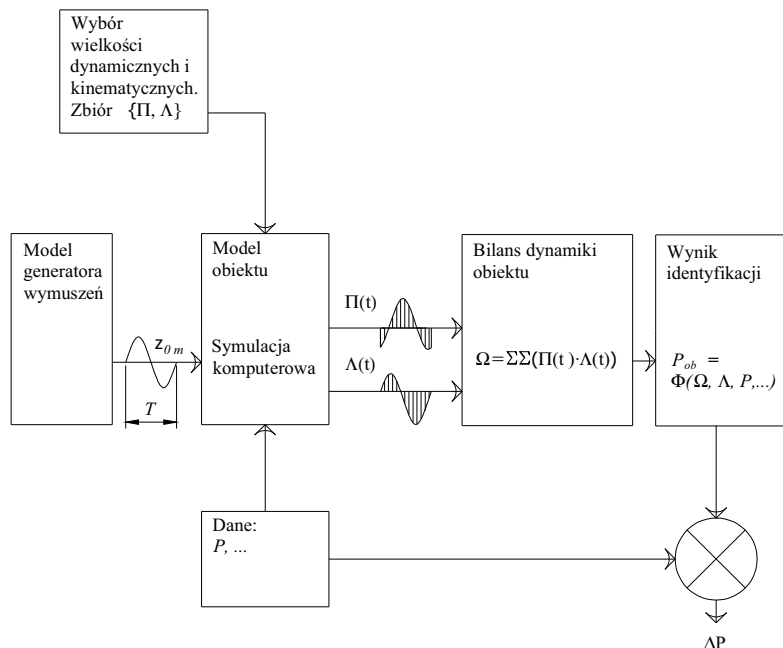
Podstawiając zależności (10) na Π do zależności (8) na bilans dynamiczny obiektu otrzymamy zależności, z których możemy wyznaczyć wartości poszczególnych parametrów (1,... m)

$$P^k = \Phi(\Omega^k, A_i^k, P^k, \dots); \quad i\{1,n\}, k\{1,m\}. \quad (11)$$

2.4. Badanie poprawności algorytmu identyfikacji

Przedstawiona tu metoda opiera się na założeniu, że model struktury obiektu jest zidentyfikowany. W praktyce, często nie rozdziela się identyfikacji struktury od identyfikacji parametrów, co i przy tej metodzie może mieć miejsce. Chodzi tylko o to, że do identyfikacji parametrów wykorzystuje się tu model o opisanej strukturze.

Poprawność algorytmu identyfikacji parametrów (czy też struktury modelu obiektu – uwaga niżej) proponuje się tu sprawdzać za pomocą eksperymentu komputerowego. Schemat procedury sprawdzenia pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Schemat procedury testowania algorytmu identyfikacji.

$\Pi(t)$ – wielkość dynamiczna, $\Lambda(t)$ – wielkość kinematyczna, P – wartość parametru „Dane”, P_{ob} – wartość parametru obliczona, z_{0m} – amplituda wymuszenia, T – okres pulsacji wymuszenia, ΔP – błąd algorytmu identyfikacji

Fig. 2. Test procedure diagram of identification algorithm:

$\Pi(t)$ – dynamic variable, $\Lambda(t)$ – kinematic variable, P – parameter value “Data”, P_{ob} – calculated parameter value, z_{0m} – excitation amplitude, T – pulsation excitation period, ΔP – identification algorithm error.

Po dokonaniu wyboru wielkości kinematycznych i dynamicznych dokonuje się symulacji komputerowej z wykorzystaniem wyrażeń na iloczyny skalarowe:

$$\Pi_i^k(t_j) \cdot \Lambda_i^k(t_j); \quad i\{1, n\}, \quad j\{1, s\}, \quad k\{1, m\}$$

wyrażeń na bilanse dynamiczne:

$$\Omega^k = \sum_1^n \sum_1^s [\Pi_i^k(t_j) \cdot \Lambda_i^k(t_j)]; \quad i\{1, n\}, \quad j\{1, s\}, \quad k\{1, m\}$$

i funkcji, z których wynikają wartości parametrów

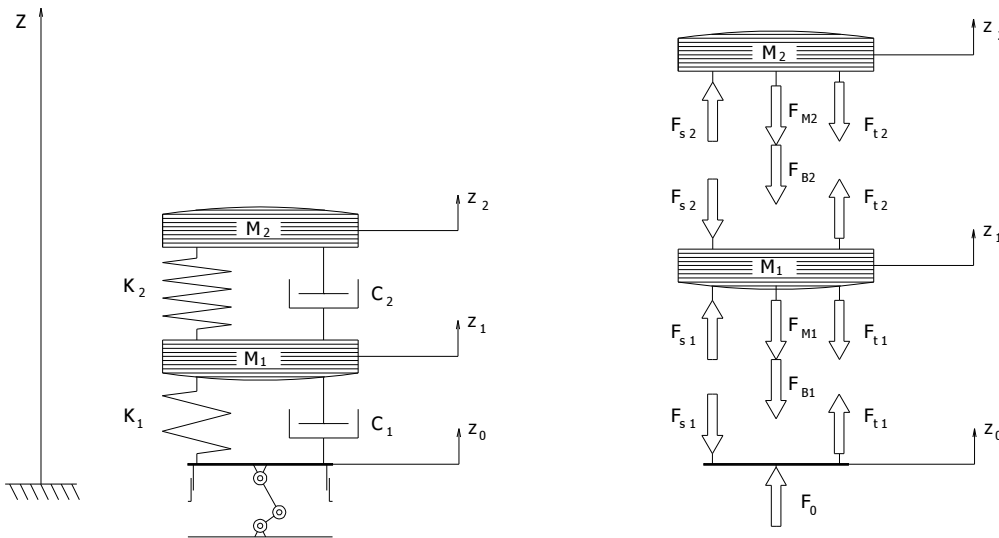
$$\Pi_i^k(t_j) = \phi_i^k(P_{ob}^k, \Lambda_i^k(t_j), \dots); \quad i\{1, n\}, \quad j\{1, s\}, \quad k\{1, m\}$$

Dokonuje się porównania wyznaczonych z tych funkcji wartości parametrów z wartościami, które w modelu obliczeniowym występują jako „Dane”. Na tej podstawie można ocenić poprawność algorytmu identyfikacji dla badanego przypadku; badanego obiektu i przyjętego algorytmu identyfikacji.

3. Przykład

3.1. Obiekt identyfikacji - model systemu 2M2K2C

Na rys. 3 pokazano przyjęty do rozważań obiekt identyfikacji – model systemu 2M2K2C; modelu układu składającego się z dwóch brył o masach „ M_1 ” i „ M_2 ” z elementami sprężynującymi „ K_1 ”, „ K_2 ” i tłumiącymi „ C_1 ”, „ C_2 ”.



Rys. 3. Obiekt identyfikacji – model systemu dwubryłowego 2M2K2C

Fig. 3. Identification object – model of 2MDOF

gdzie:

$F_{M1,2} = M_{1,2} \cdot g$ - grawitacyjne siły ciężkości, $F_{B1,2} = M_{1,2} \cdot \ddot{z}_{1,2}$ - siły bezwładności.

Dynamika systemu 2M2K2C

Siła w elemencie sprężynującym 1

$$F_{S1} = (M_1 + M_2) \cdot g + K_1 \cdot (z_0 - z_1). \quad (12)$$

Siła w elemencie sprężynującym 2

$$F_{S2} = M_2 \cdot g + K_2 \cdot (z_1 - z_2). \quad (13)$$

Siła w elemencie tłumiącym 1

$$F_{D1} = C_1 \cdot \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_0}{dt} \right). \quad (14)$$

Siła w elemencie tłumiącym 2

$$F_{D2} = C_2 \cdot \left(\frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \right). \quad (15)$$

Siła wymuszająca (tu jako wynikowa)

$$F_0 = F_{S1} + F_{D1};$$

$$F_0 = (M_1 + M_2) \cdot g + K_1 \cdot (z_0 - z_1) + C_1 \cdot \left(\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_0}{dt} \right). \quad (16)$$

Suma sił działających na bryłę 1

$$-M_1 \cdot g - M_1 \cdot \frac{d^2 z_1}{dt^2} + F_{D2} + F_{S2} - F_{S1} - F_{D1} = 0. \quad (17)$$

Suma sił działających na bryłę 2

$$-M_2 \cdot g - M_2 \cdot \frac{d^2 z_2}{dt^2} - F_{D2} - F_{S2} = 0. \quad (18)$$

Równania ruchu systemu 2M2K2C

Uwzględniając zależności (12) ÷ (15) i (17) ÷ (18) wyprowadza się równania ruchu systemu

$$\frac{du}{dt} = \frac{C_2}{M_1} \cdot x - \frac{C_1 + C_2}{M_1} \cdot u + \frac{K_2}{M_1} \cdot y - \frac{K_1 + K_2}{M_1} \cdot z + \frac{K_1}{M_1} \cdot z_0 + \frac{C_1}{M_1} \cdot \frac{dz_0}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = u$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{C_2}{M_2} \cdot x + \frac{C_2}{M_2} \cdot u - \frac{K_2}{M_2} \cdot y + \frac{K_2}{M_2} \cdot z \quad (19)$$

$$\frac{dy}{dt} = x$$

gdzie: $u = \frac{dz_1}{dt}$; $z = z_1$; $x = \frac{dz_2}{dt}$; $y = z_2$.

Wymuszenie

Przyjęto, że wymuszenie jest typu kinematycznego i ma charakter harmoniczny. Kierunek wymuszenia jest zgodny z osią pionową „Z” – rys. 3. Wymuszenie wyraża się zależnością:

$$z_0 = z_{z0m} \cdot \sin\left(\frac{f}{2\pi} \cdot t\right) \quad (20)$$

gdzie: t – czas, f – częstość wymuszenia w Hz.

3.2. Identyfikacja parametrów systemu 2M2K2C

Identyfikacji parametrów systemu 2M2K2C dokonano zgodnie z metodą opisaną w p.2.

Badania symulacyjne komputerowe prowadzono dla zakresu częstości wymuszeń od 1 do 50 Hz. Krok obliczeń numerycznych był stały i wynosił $\Delta t = 0.00001$ s. Metoda całkowania numerycznego Runge Kutta. Amplituda wymuszenia miała wartość stałą $z_{0m} = 0.015$ m. Nominalne wartości parametrów systemu 2M2K2C: $M_1 = 60$ kg, $M_2 = 700$ kg, $K_1 = 200\ 000$ N/m, $K_2 = 30\ 000$ N/m, $C_1 = 100$ N/(m/s), $C_2 = 1500$ N/(m/s).

Sprawdzenia poprawności algorytmu identyfikacji dla systemu prowadzono dla zakresu wartości $K_1 = 100\ 000 \div 300\ 000$ N/m, $K_2 = 15\ 000 \div 45\ 000$ N/m, $C_1 = 50 \div 150$ N/(m/s), $C_2 = 750 \div 2250$ N/(m/s).

Bilans dynamiczny obiektu - systemu 2M2K2C

W przykładzie za wielkości dynamiczne przyjęto siły występujące w systemie. Zostały one oznaczone przez F_i . Ich liczba wynosi $n = 13$ – patrz. rys.3. Wielkości kinematyczne stanowią tu przemieszczenia i ich pochodne. Oznaczono je przez „ $f(z)$ ”.

W ogólnym przypadku zależności na siły w systemie 2M2K2C są postaci:

$$F_i^k = P_{i1}^k \cdot \phi_{i1}^k(f_i^k(z_i^k(t_j))) + P_{i2}^k \cdot \phi_{i2}^k(f_i^k(z_i^k(t_j))) + P_{i3}^k \cdot \phi_{i3}^k(f_i^k(z_i^k(t_j))) + \dots \quad (21)$$

gdzie:

$P_{i1,2,3,\dots}^k$ - parametry, których wartości są nieznane i będą poszukiwane na drodze identyfikacji

$\phi_{i1,2,3,\dots}^k(f_i^k(z_i^k(t_j)))$ - funkcje wielkości kinematycznych wykorzystane do opisu wielkości dynamicznych.

Wzór na bilans dynamiki obiektu zgodnie z zapisem (8) i (21) będzie teraz miał postać

$$\Omega^k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \{ [P_{i1}^k \cdot \phi_{i1}^k(f_i^k(z_i^k(t_j))) + P_{i2}^k \cdot \phi_{i2}^k(f_i^k(z_i^k(t_j))) + \dots] \cdot f_i^k(z_i, t_j) \} \equiv 0 \quad (22)$$

Zapisy (21) i (22) mają charakter ogólny. W „Przykładzie” zależności na siły przyjęto takie jak w p.3.1, tzn.: (12) ÷ (16).

W rezultacie wielu analiz, do identyfikacji systemu 2M2K2C wykorzystano trzy bilanse dynamiczne oznaczone kolejno Ω^1 , Ω^2 , Ω^3 , za pomocą których, jak się okazało, można było dokonać identyfikacji wszystkich 4 parametrów tego obiektu.

3.3. Wyznaczenie wartości parametru K_I – współczynnika sztywności

Bilans dynamiczny - Ω^I

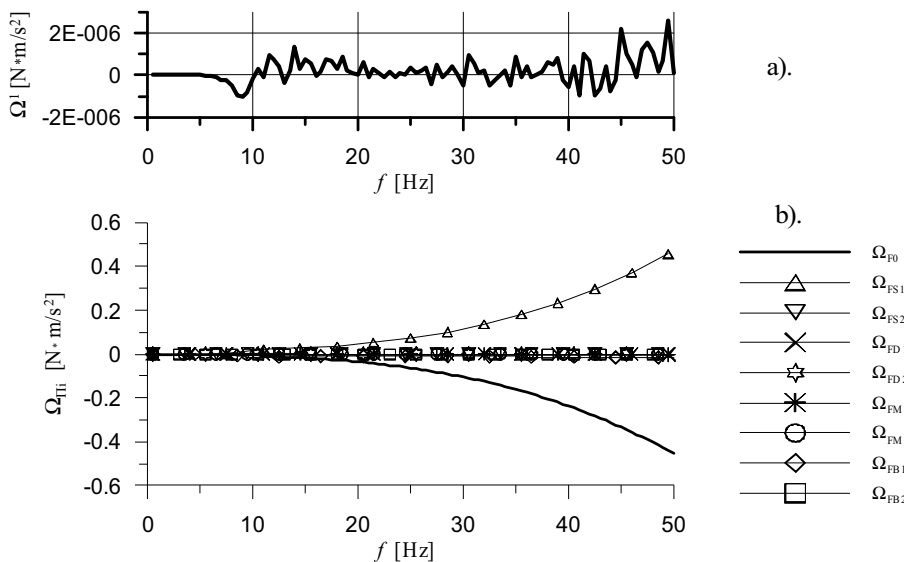
Bilans dynamiczny Ω^I został utworzony z wykorzystaniem iloczynu skalarowego: - wielkości dynamicznej w postaci różnicy wartości siły z dwóch kolejnych kroków obliczeniowych i wielkości kinematycznej w postaci różnicy wartości przyspieszenia bryły (z którą związana jest dana siła) z dwóch kolejnych kroków obliczeniowych; „j-1” i „j”:

$$\Omega^I = \sum_1^n \sum_1^s \{ [(F_i)_j - (F_i)_{j-1}] \cdot [(\ddot{z}_i)_j - (\ddot{z}_i)_{j-1}] \}; \quad i \{1, n\}, \quad j \{1, s\}, \quad k=1 \quad (23)$$

Składniki bilansu dynamicznego - Ω^I

Wartości udziałów poszczególnych składników w bilansie dynamicznym systemu 2M2K2C obliczono z zależności

$$\Omega^I \pi_i = \sum_1^s \{ [(F_i)_j - (F_i)_{j-1}] \cdot [(\ddot{z}_i)_j - (\ddot{z}_i)_{j-1}] \}; \quad i \{1, n\}, \quad j \{1, s\}. \quad (24)$$



Rys. 4. Wyniki identyfikacji: a) – wartości bilansu Ω^I w funkcji częstości wymuszenia – f , b) – wartości poszczególnych składników bilansu Ω_{π_i} w funkcji częstości wymuszenia – f

Fig. 4. Identification process results: a) – balance value Ω^I for base excitation frequency – f , b) – balance components values Ω_{π_i} for base excitation frequency – f

Uwaga

Wartości poszczególnych składników bilansu Ω_{π_i} przedstawione graficznie na wykresie – rys. 4 – dla zakresu częstości bliskich 0 nie mają, jak to może sugerować ten wykres, wartości zerowych, są oczywiście tylko relatywnie małe.

Na rys. 4 pokazano wyniki symulacji komputerowej – pierwszego etapu identyfikacji. Na rys. 4 a) przedstawione są wartości bilansu dynamicznego dla różnych częstotliwości wymuszeń. Na rys. 4 b). – wartości poszczególnych składników bilansu.

Na podstawie wyników symulacji komputerowej – rys. 4, biorąc pod uwagę udziały wartości poszczególnych składników w bilansie dynamicznym obiektu 2M2K2C wyprowadzono zależność na wartość współczynnika sztywności K_I .

Wyprowadzenie zależności na wartość współczynnika sztywności K_I

Dokonano następujących założeń na podstawie wyników – rys. 4 a) i 4 b):

$$\Omega^1 = 0,$$

i

$$\Omega_{FS2}^1 = 0, \Omega_{FD1}^1 = 0, \Omega_{FD2}^1 = 0, \Omega_{FM1}^1 = 0, \Omega_{FM2}^1 = 0.$$

Z założeń tych wynika, że

$$\Omega_{F0}^1 + \Omega_{FS1}^1 + \Omega_{FB1}^1 + \Omega_{FB2}^1 = 0. \quad (25)$$

Na podstawie zależności (24) i (12) można napisać

$$\Omega_{FS1}^1 = K_1 \cdot \sum_1^s \left\{ \left[(z_1)_j - (z_1)_{j-1} - (z_0)_j + (z_0)_{j-1} \right] \cdot \left[(\ddot{z}_1)_j - (\ddot{z}_1)_{j-1} - (\ddot{z}_0)_j + (\ddot{z}_0)_{j-1} \right] \right\};$$

$$i = 1, j \{1, s\}, k = 1. \quad (26)$$

Z zależności (25) i (26) wynika wzór na „obliczeniową” wartość współczynnika sztywności K_{Iob}

$$K_{Iob} = - \frac{\Omega_{F0}^1 + \Omega_{FB1}^1 + \Omega_{FB2}^1}{\sum_1^s \left\{ \left[(z_1)_j - (z_1)_{j-1} - (z_0)_j + (z_0)_{j-1} \right] \cdot \left[(\ddot{z}_1)_j - (\ddot{z}_1)_{j-1} - (\ddot{z}_0)_j + (\ddot{z}_0)_{j-1} \right] \right\}} \quad (27)$$

gdzie:

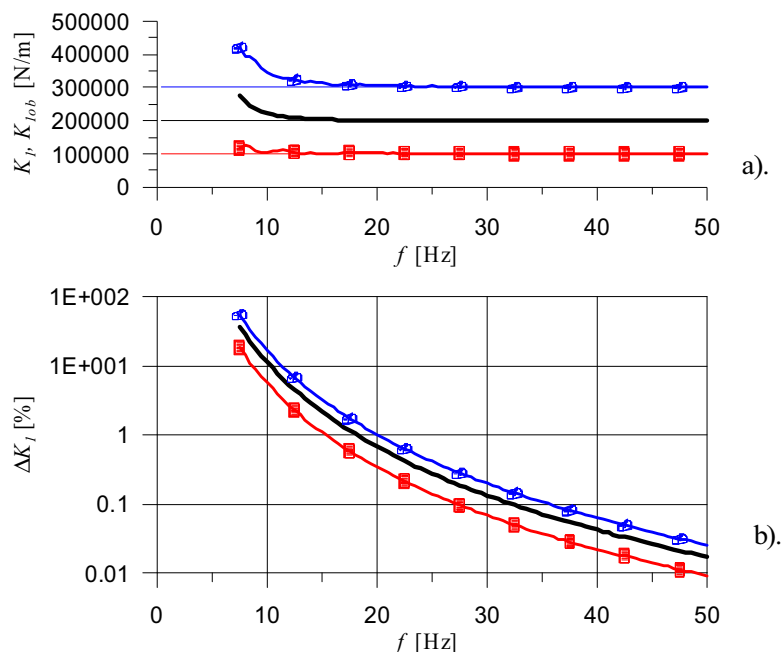
$$\Omega_{F0}^1 = \sum_1^s \left\{ \left[(F_0)_j - (F_0)_{j-1} \right] \cdot \left[(\ddot{z}_0)_j - (\ddot{z}_0)_{j-1} \right] \right\}; \quad i = 1, j \{1, s\}, k = 1$$

$$\Omega_{FB1}^1 = - \sum_1^s \left\{ \left[(F_{B1})_j - (F_{B1})_{j-1} \right] \cdot \left[(\ddot{z}_1)_j - (\ddot{z}_1)_{j-1} \right] \right\}; \quad i = 1, j \{1, s\}, k = 1$$

$$\Omega_{FB2}^1 = - \sum_1^s \left\{ \left[(F_{B2})_j - (F_{B2})_{j-1} \right] \cdot \left[(\ddot{z}_2)_j - (\ddot{z}_2)_{j-1} \right] \right\}; \quad i = 1, j \{1, s\}, k = 1$$

Zależności na siły F_i podstawia się z (12) ÷ (16).

Wyniki symulacji komputerowej procesu identyfikacji parametru K_I obliczanego na podstawie wzoru (27) przedstawiono na rys. 5. Symulację przeprowadzono dla trzech wartości tego parametru: $K_I = 100000, 200000$ i 300000 [N/m].



Rys. 5. Wyniki identyfikacji parametru K_I (współczynnik sztywności):
 $K_I = 100000 \div 300000$ [N/m] – wartości parametru według danych modelu obiektu 2M2K2C,
 $K_{I,ob}$ – wartość jako rezultat identyfikacji, ΔK_I [%] – błąd procentowy procesu identyfikacji parametru K_I
w funkcji częstotliwości wymuszenia f

Fig. 5. Results of identification process of parameter K_I (stiffness factor):
 $K_I = 100000 \div 300000$ [N/m] – values parameter according to data of 2MDOF system model,
 $K_{I,ob}$ – results of identification, ΔK_I [%] – percentage error of identification process of parameter K_I for
base excitation frequency f

Jak widać z rys. 5 dla częstotliwości wymuszeń $f > 20$ Hz błąd algorytmu identyfikacji parametru K_I nie przekracza 1[%].

3.4. Wyznaczenie wartości parametru – K_2

Bilans dynamiczny – Ω^2

Bilans dynamiczny został utworzony z wykorzystaniem iloczynu skalarowego: wielkości dynamicznej w postaci siły i wielkości kinematycznej w postaci przyspieszenia bryły (z którą związana jest dana siła):

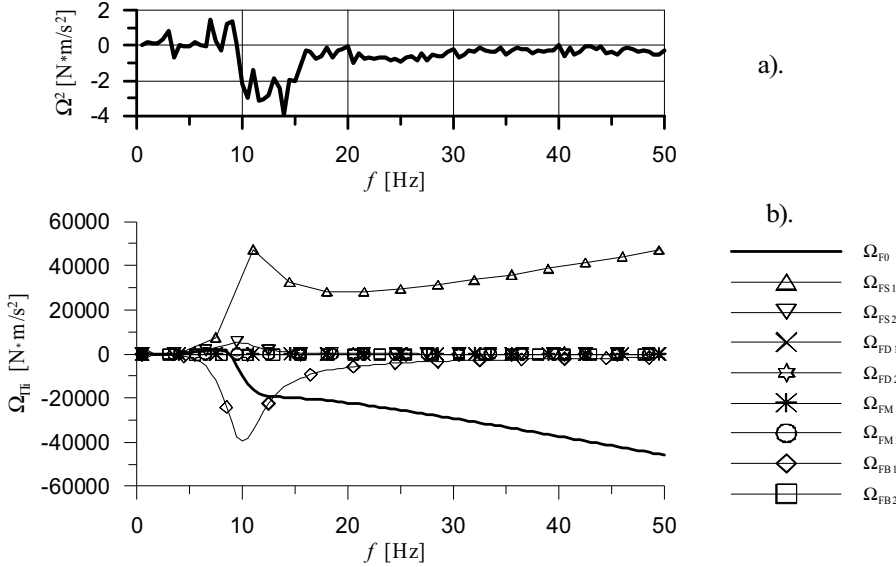
$$\Omega^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \{ (F_i)_j \cdot (\ddot{z}_i)_j \}; \quad i \{1, n\}, \quad j \{1, s\}, \quad k = 2 \quad (28)$$

Składniki bilansu dynamicznego – Ω^2

Określono udziały poszczególnych składników w bilansie dynamicznym systemu 2M2K2C wykorzystując w symulacji komputerowej wzory na te składniki

$$\Omega^2 \Pi_i = \sum_1^s \{ (F_i)_j \cdot (\ddot{z}_i)_j \}; \quad i \{1, n\}, \quad j \{1, s\}. \quad (29)$$

Na rys. 6 pokazano wyniki symulacji komputerowej – pierwszego etapu identyfikacji parametru K_2 .



Rys. 6. Wyniki identyfikacji: a) – wartości bilansu Ω^2 w funkcji częstości wymuszenia – f , b) – wartości poszczególnych składników bilansu Ω_{ni} w funkcji częstości wymuszenia – f

Fig. 6. Identification process results: a) – balance value Ω^2 for base excitation frequency – f , b) – balance components values Ω_{ni} for base excitation frequency – f

Wyprowadzenie zależności na współczynnik sztywności K_2

Na podstawie wyników badań symulacyjnych – rys. 6 a) i b) przyjęto, że wartości bilansu dynamicznego w stosunku do wartości niektórych składników tego bilansu są bardzo małe ($4 \ll 40000$) i można napisać

$$\Omega^2 = 0,$$

i

$$\Omega_{FD1}^2 = 0, \quad \Omega_{FD2}^2 = 0.$$

Z tych założeń wynika więc, że

$$\Omega_{F0}^2 + \Omega_{FS1}^2 + \Omega_{FS2}^2 + \Omega_{FB1}^2 + \Omega_{FB2}^2 + \Omega_{FM1}^2 + \Omega_{FM2}^2 = 0. \quad (30)$$

Uwzględniając zależności (29) i (13) możemy napisać

$$\Omega_{FS2}^2 = K_2 \cdot \sum_1^s \{ [(z_2)_j - (z_1)_j] \cdot [(\ddot{z}_2)_j - (\ddot{z}_1)_j] \}; \quad (31)$$

$$i=1, j\{1,s\}, k=2$$

Z zależności (30) i (31) wynika wzór na wartość „obliczeniową” współczynnika sztywności K_{2ob}

$$K_{2ob} = -\frac{\sum_1^s \{ M_2 \cdot g \cdot (\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1) \} + \Omega_{F0}^2 + \Omega_{FS1}^2 + \Omega_{FB1}^2 + \Omega_{FB2}^2 + \Omega_{FM1}^2 + \Omega_{FM2}^2}{\sum_1^s \{ [(z_2)_j - (z_1)_j] \cdot [(\ddot{z}_2)_j - (\ddot{z}_1)_j] \}} \cdot (32)$$

Zależności na poszczególne wartości składników bilansu $\Omega_{\Pi_i}^2$ występujących we wzorze (32):

$$\Omega_{F0}^2 = \sum_1^s \{ [(F_0)_j] \cdot [(\ddot{z}_0)_j] \}; \quad i=1, j\{1,s\}, k=2$$

$$\Omega_{FS1}^2 = \sum_1^s \{ [(F_{S1})_j] \cdot [(\ddot{z}_1)_j - (\ddot{z}_0)_j] \}; \quad i=1, j\{1,s\}, k=2$$

$$\Omega_{FB1}^2 = -\sum_1^s \{ [(F_{B1})_j] \cdot [(\ddot{z}_1)_j] \}; \quad i=1, j\{1,s\}, k=2$$

$$\Omega_{FB2}^2 = -\sum_1^s \{ [(F_{B2})_j] \cdot [(\ddot{z}_2)_j] \}; \quad i=1, j\{1,s\}, k=2$$

$$\Omega_{FM1}^2 = -\sum_1^s \{ [(F_{M1})_j] \cdot [(\ddot{z}_1)_j] \}; \quad i=1, j\{1,s\}, k=2$$

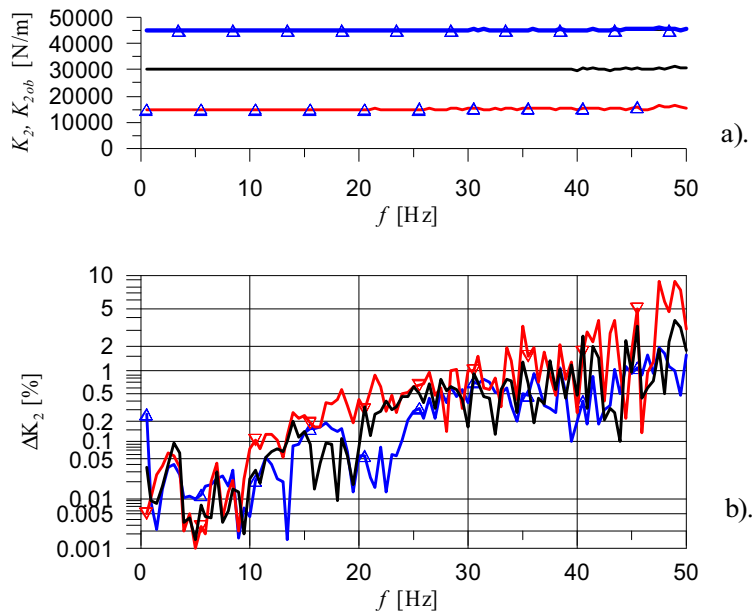
$$\Omega_{FM2}^2 = -\sum_1^s \{ [(F_{M2})_j] \cdot [(\ddot{z}_2)_j] \}; \quad i=1, j\{1,s\}, k=2.$$

Zależności na siły F_i podstawia się z (12) ÷ (16).

Ze względu na to, że we wzorze na K_{2ob} – (32) – występuje składnik Ω_{FS1}^2 , użycie tego wzoru wymaga znajomości wartości współczynnika sztywności K_i . W przypadku zachowania kolejności procesu identyfikacji jak w „Przykładzie” nie stanowi to problemu.

Wykorzystując zależność (32) dokonano symulacji komputerowej. Uzyskano wyniki identyfikacji współczynnika K_2 przedstawione na rys. 7. Symulację prowadzono dla trzech wartości tego współczynnika:

$$K_2 = 15000, 30000 \text{ i } 45000 \text{ [N/m]}.$$



Rys. 7. Wyniki identyfikacji parametru K_2 (współczynnik sztywności):

$K_2 = 15000 \div 45000$ [N/m] – wartości parametru według danych wejściowych modelu obiektu 2M2K2C, $K_{2,ob}$ – wartość obliczana z zależności (30), ΔK_2 [%] – wyliczony błąd procentowy procesu identyfikacji parametru K_2 dla różnych wartości częstości wymuszenia f

Fig. 7. Results of identification process of parameter K_2 (stiffness factor):

$K_2 = 15000 \div 45000$ [N/m] – values parameter according to data of 2MDOF system model, $K_{2,ob}$ – results of identification, ΔK_2 [%] – percentage error of identification process of parameter K_2 for base excitation frequency f

Jak widać z rys. 7 dla częstości wymuszeń $f < 30$ Hz błąd algorytmu identyfikacji parametru K_2 nie przekracza 1[%].

3.5. Wyznaczenie wartości parametrów – C_1 i C_2

Bilans dynamiczny – Ω^3

Bilans dynamiczny został utworzony z wykorzystaniem iloczynu skalarowego: wielkości dynamicznej w postaci siły i wielkości kinematycznej w postaci prędkości bryły (z którą związana jest dana siła):

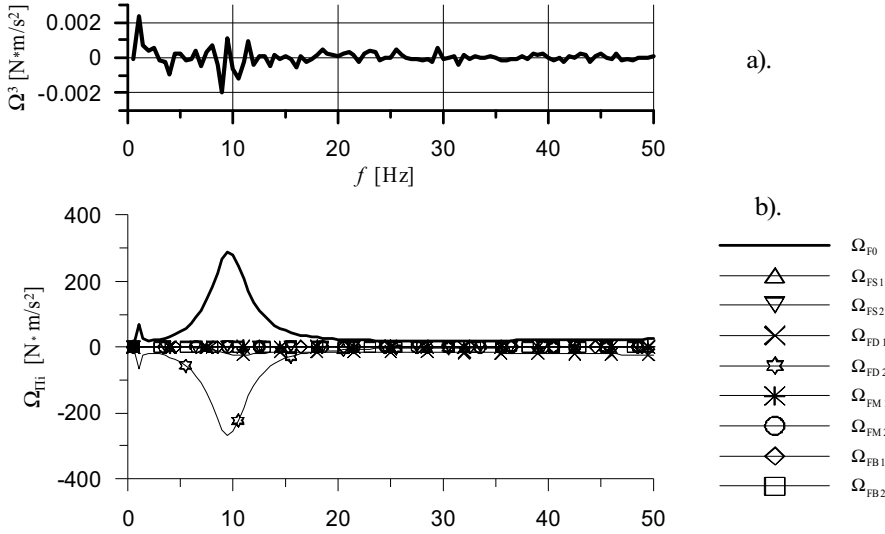
$$\Omega^3 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \{ (F_i)_j \cdot (\dot{z}_i)_j \}; \quad i \{1, n\}, \quad j \{1, s\}, \quad k = 3 \quad (33)$$

Składniki bilansu dynamicznego – Ω^3

Udziały poszczególnych składników w bilansie dynamicznym systemu 2M2K2C obliczono z zależności

$$\Omega^3 \Pi_i = \sum_1^s \{ (F_i)_j \cdot (\dot{z}_i)_j \}; \quad i \{1, n\}, \quad j \{1, s\}. \quad (34)$$

Na rys. 8 pokazano wyniki symulacji komputerowej: przebiegi: $\Omega^3(f)$ i $\Omega^3 \Pi_i(f)$.



Rys. 8. Wyniki identyfikacji: a) – wartości bilansu Ω^3 w funkcji częstości wymuszenia f , b) – wartości poszczególnych składników bilansu Ω_{Π_i} w funkcji częstości wymuszenia f

Fig. 8. Identification process results: a) – balance value Ω^3 for base excitation frequency f , b) – balance components values Ω_{Π_i} for base excitation frequency f

Wyprowadzenie zależności na współczynnik tłumienności C_2

Na podstawie wyników – rys. 8 a). i b) i uwzględniając, że wartości bilansu dynamicznego w stosunku do wartości niektórych składników tego bilansu są bardzo małe ($0.002 \ll 200$), przyjęto, że zachodzi relacja

$$\Omega^3 = 0,$$

i na podstawie wyników – rys. 8 b). przyjęto, że zachodzą

$$\Omega_{FS1}^3 = 0, \quad \Omega_{FS2}^3 = 0, \quad \Omega_{FD1}^3 = 0, \quad \Omega_{FD2}^3 = 0, \quad \Omega_{FM1}^3 = 0, \quad \Omega_{FM2}^3 = 0, \quad \Omega_{FB1}^3 = 0, \quad \Omega_{FB2}^3 = 0.$$

Uwzględniając powyższe możemy napisać, że

$$\Omega_{F0}^3 + \Omega_{FD1}^3 = 0. \quad (35)$$

Z zależności (15) i (34) wynika zależność na składnik bilansu dynamicznego Ω_{FD2}^3

$$\Omega_{FD2}^3 = -C_2 \cdot \sum_1^s \{ [(\dot{z}_2)_j - (\dot{z}_1)_j] \cdot [(\ddot{z}_2)_j - (\ddot{z}_1)_j] \}; \quad (36)$$

$$i = 1, \quad j \{1, s\}, \quad k = 3.$$

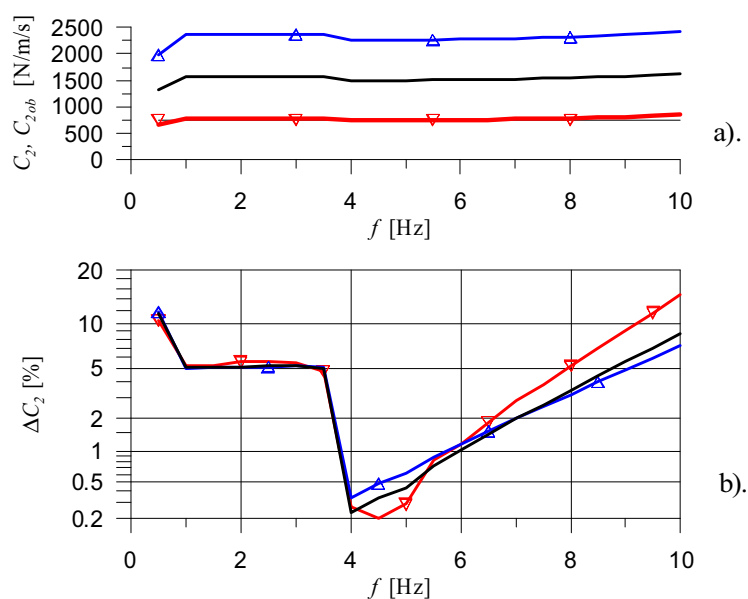
Uwzględniając zależności (35) i (36) wyprowadzono wzór na „obliczeniową” wartość współczynnika tłumienności

$$C_{2ob} = \frac{\Omega_{F_0}^3}{\sum_1^s \{[(\dot{z}_2)_j - (\dot{z}_1)_j]^2\}} \quad (37)$$

gdzie

$$\Omega_{F_0}^3 = \sum_1^s \{[(F_0)_j] \cdot [(\dot{z}_0)_j]\}; \quad i=1, \quad j\{1,s\}, \quad k=3.$$

Przeprowadzono symulację komputerową wykorzystując zależność (37). Obliczeń dokonano dla trzech wartości współczynnika tłumienności $C_2 = 750, 1500$ i 2250 [N/(m/s)] - rys. 9.



Rys. 9. Wyniki identyfikacji parametru C_2 (współczynnik tłumienności): $C_2 = 750 \div 2250$ [N/(m/s)] – wartości parametru według danych wejściowych modelu obiektu 2M2K2C, C_{2ob} – wartość obliczana z zależności (35), ΔC_2 [%] – wyliczony błąd procentowy procesu identyfikacji parametru C_2 dla różnych wartości częstości wymuszenia f

Fig. 9. Results of identification process of parameter C_2 (damping factor): $C_2 = 750 \div 2250$ [N/(m/s)] – values parameter according to data of 2MDOF system model, C_{2ob} – results of identification, ΔC_2 [%] – percentage error of identification process of parameter C_2 for base excitation frequency f

Uwaga

Wykresy na rysunku 9 przedstawiono tylko dla zakresu częstości 0 – 10 Hz, jako że przebiegi dla wartości powyżej 10 Hz są dla nas nieinteresujące ze względu na silną tendencję wzrostu błędów identyfikacji; co widać na rys. 9b).

Jak widać z rys. 9 dla częstości wymuszeń $4 < f < 6$ Hz błąd algorytmu identyfikacji parametru C_2 nie przekracza 1[%].

Wyprowadzenie zależności na współczynnik tłumienności C_j

Analogicznie, jak dla poprzednich działań przyjęto na podstawie wyników – rys. 8 a) i b), że

$$\Omega^3 = 0,$$

i

$$\Omega_{FD1}^3 = 0, \Omega_{FD2}^3 = 0, \Omega_{FM1}^3 = 0, \Omega_{FM2}^3, \Omega_{FB1}^3 = 0, \Omega_{FB2}^3 = 0$$

Z założeń wynika, że

$$\Omega_{F0}^3 + \Omega_{FD1}^3 + \Omega_{FD2}^3 = 0. \quad (38)$$

Z zależności (14) i (34) wyprowadzono wzór na wartość „obliczeniową” współczynnika tłumienności

$$\Omega_{FD1}^3 = -C_1 \cdot \sum_1^s \{ [(\dot{z}_1)_j - (\dot{z}_0)_j] \cdot [(\dot{z}_1)_j - (\dot{z}_0)_j] \}; \quad (39)$$

$$i = 1, \quad j \{1, s\}, \quad k = 3.$$

Uwzględniając zależności (38) i (39) można napisać, że

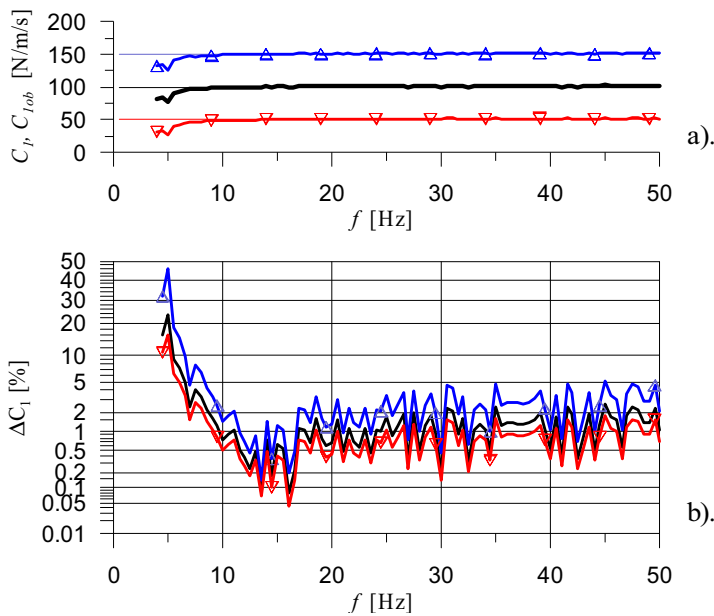
$$C_{1ob} = \frac{\Omega_{F0}^3 + \Omega_{FD2}^3}{\sum_1^s \{ [(\dot{z}_1)_j - (\dot{z}_0)_j]^2 \}} \quad (40)$$

gdzie

$$\Omega_{F0}^3 = \sum_1^s \{ [(F_0)_j] \cdot [(\dot{z}_0)_j] \}; \quad i = 1, \quad j \{1, s\}, \quad k = 3$$

$$\Omega_{FD2}^3 = -\sum_1^s \{ [(F_{D2})_j] \cdot [(\dot{z}_2)_j - (\dot{z}_1)_j] \}; \quad i = 1, \quad j \{1, s\}, \quad k = 3.$$

Wykorzystując zależność (40) dokonano symulacji komputerowej dla trzech wartości danych: $C_j = 50, 100$ i 150 [N/(m/s)]. Wyniki identyfikacji współczynnika C_j przedstawiono na rys. 10.



Rys. 10. Wyniki identyfikacji parametru C_1 (współczynnik tłumienia):

$C_1 = 50 \div 150$ [N/(m/s)] – wartości parametru według danych wejściowych modelu obiektu 2M2K2C, C_{1ob} – wartość obliczana z zależności (38), ΔC_1 [%] – wyliczony błąd procentowy procesu identyfikacji parametru C_1 dla różnych wartości częstości wymuszenia f

Fig. 10. Results of identification process of parameter C_1 (damping factor):

$C_1 = 50 \div 150$ [N/(m/s)] – values parameter according to data of 2MDOF system model, C_{1ob} – results of identification, ΔC_1 [%] – percentage error of identification process of parameter C_1 for base excitation frequency f

Jak widać z rys. 10 dla częstości wymuszeń $10 < f < 17$ Hz błąd algorytmu identyfikacji parametru C_2 nie przekracza 2[%], a dla $f > 10$ Hz błąd algorytmu identyfikacji parametru C_2 nie przekracza 5[%].

4. Wnioski. Uwagi

Opracowana metoda identyfikacji parametrów (współczynników sztywności i tłumienia) w zastosowaniu do modelu dwubryłowego 2M2K2C pozwoliła na uzyskanie bardzo dobrych rezultatów. Osiągnięcie błędu metody w eksperymencie komputerowym rzędu 1 ÷ 2 % dobrze prognozuje wykorzystanie jej w zastosowaniach modelowania obiektów rzeczywistych i badaniach diagnostycznych.

Wzory na wartości parametrów obiektu: (27) - K_{1ob} , (32) - K_{2ob} , (37) - C_{2ob} i (40) - C_{1ob} , opracowane na podstawie wyników symulacji komputerowej procesu identyfikacji, pozwalają na prosty do zastosowania sposób dokonywania identyfikacji obiektu 2M2K2C.

Wykorzystanie prezentowanej metody identyfikacji do celów diagnostyki samochodowej wydaje się być możliwe i celowe. W Instytucie Pojazdów Politechniki Łódzkiej prowadzone są obecnie dalsze prace dotyczące zagadnień związanych z zastosowaniem metody identyfikacji do diagnostyki układów nośnych pojazdów samochodowych. W szczególności istotnym jest tu opracowanie dobrej metodyki pomiarowej i przetwarzania sygnałów w warunkach badania obiektu rzeczywistego, a więc przy występowaniu zaburzeń i różnorodnych zakłóceń.

Literatura

- [1] UHL T.: *Modal testing of mechanical systems by using an impact*. The Archive of Mechanical Engineering, TOM XXXVII 1990 Zeszyt 4.
- [2] GIERGIEL J., UHL T.: *Identification of the impact Force in mechanical systems*. The Archive of Mechanical Engineering, TOM XXXVI 1989 Zeszyt 2-3.
- [3] KULISIEWICZ M., PIĘSIĄK ST.: *Metodologia modelowania i identyfikacji mechanicznych układów dynamicznych*. Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1994.

Identification method of dynamic mechanical system

Summary

In this paper is presented identification method of mechanical systems. The proposed method is based on a dynamical balance equation. For example computer simulation investigations for two-degrees of freedom system are presented. The investigations results are favourable.