

## **Analiza numeryczna dynamiki pojazdu: model matematyczny oraz jego weryfikacja**

**MAREK SZCZOTKA**

Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej

W pracy przedstawiono model pojazdu zbudowany przy wykorzystaniu metody przekształceń jednorodnych i współrzędnych złączowych. Umożliwia ona wyprowadzanie równań ruchu mechanicznych układów wieloczłonowych, przy stosowaniu podejścia, polegającego na przedstawianiu ruchu ciał jako ruchu względnego. Formalizm ten różni się od powszechnie stosowanych metod wykorzystujących współrzędne absolutne i równania więzów, które są określone dla typowych, stosowanych w pojazdach połączeń. Równania ruchu otrzymano w oparciu o równania Lagrange'a II rodzaju. Model matematyczny pojazdu, uwzględnia jego złożoną strukturę, oraz układ napędowy, który zbudowano w dwóch wersjach: jako klasyczny (silnik z mechanizmem różnicowym) oraz napęd niezależny. W drugiej części artykułu przedstawiono wyniki obliczeń, które uzyskano przy pomocy własnego oprogramowania. Wyniki obliczeń zweryfikowano poprzez ich porównanie z wynikami uzyskanymi z: badań, wykonanych na rzeczywistym obiekcie oraz przy użyciu pakietu MSC.ADAMS. Przedstawiono również wnioski, charakteryzujące zalety i wady proponowanego podejścia.

### **1. Wstęp, przegląd metod modelowania dynamiki pojazdów**

Pomimo istnienia od wielu lat na rynku komercyjnego oprogramowania przeznaczonego do analizy mechanicznych układów wieloczłonowych, nadal powszechnie budowane są własne modele i programy dedykowane. Można wymienić przynajmniej kilka tego powodów:

- mogą one uwzględniać zjawiska, które nie są ujęte w pakietach komercyjnych lub są „słabo” zdefiniowane,
- własne modele matematyczne powstają często w wyniku wprowadzenia i testowania nowych metod modelowania (generowania układów równań, opisu matematycznego ruchu układów mechanicznych, metod całkowania numerycznego równań ruchu, itp.),
- budowa własnego modelu i oprogramowania pozwala na uproszczenia, które są zasadne z punktu widzenia przeznaczenia modeli (w pakietach komercyjnych czasem jest to niemożliwe). Należy tu również wymienić trudności, jakie występują w trakcie prac prototypowych, kiedy brak jest jeszcze szczegóło-

wych danych przyszłego produktu. Wówczas wprowadza się przemyślane uproszczenia w modelu, redukując liczbę potrzebnych danych o pojeździe,

- są również takie zastosowania analizy numerycznej układów wielocłonowych (w tym pojazdów), dla których budowa (lub stosowanie) dokładnych, szczegółowych modeli matematycznych jest wręcz niewskazana. Do tej grupy należą: rekonstrukcja wypadków drogowych dokonywana przez biegłych sądowych, optymalizacja i sterowanie, badania nad modelami pojazdów z aktywnymi czy *semiaktywnymi* elementami sterowania, itp.
- budowa własnych, autorskich modeli oraz programów obliczeniowych posiada liczne walory poznawcze, edukacyjne (które są trudne do uzyskania w trakcie użytkowania gotowych pakietów, takich jak np. MSC.ADAMS).

Szczegółowa analiza literatury z zakresu modelowania dynamiki pojazdów, ze względu na ogromną popularność tematyki jak i różnorodność rozpatrywanych zagadnień, nie jest możliwa do przedstawienia na kilku stronach. Stąd poniżej ograniczono się jedynie do omówienia metod stosowanych przez innych autorów.

Przede wszystkim, zastosowanie współrzędnych węzłowych (złączowych) do modelowania dynamiki pojazdów spotykane jest w literaturze znacznie rzadziej, niż metody oparte na współrzędnych absolutnych. W pracy [1] przedstawiono model do symulacji ruchu pojazdu, zbudowany przy wykorzystaniu współrzędnych złączowych. Równania ruchu dla pojazdu podzielono na podukłady i rozwiązywano oddzielnie. W pracy [2] bazując na równaniach Lagrange'a II rodzaju, współrzędnych złączowych i przekształceniach jednorodnych, wyprowadzono równania ruchu dla układu wielocłonowego mogącego zawierać również człony podatne. Podano także przykład zastosowania metody do modelowania pojazdów wielocłonowych, oraz algorytm wyznaczania sił tarcia w połączeniach, stosujący odwrotny algorytm Newtona-Eulera. Modele jedno i wielocłonowe przedstawiono także w pracy [3], stosując tę samą metodę. W pracach tych pojazdy posiadały funkcjonalne modele zawiesznień i układów kierowniczych. Autor rozprawy [4] przedstawił modele pojazdów osobowych i ciężarowych, których równania ruchu wyprowadzono w oparciu o równania Lagrange'a II rodzaju, przy czym do wyznaczenia sił uogólnionych zastosowano metodę prac przygotowanych. Praca ta zawiera także szereg modeli uproszczonych i częściowych, stosowanych w modelowaniu wybranych zagadnień.

Prace wykorzystujące metody bazujące na współrzędnych absolutnych są reprezentowane przez niewspółmiernie większą grupę autorów. Wynika to z tego, iż metody te umożliwiają automatyczną generację równań ruchu oraz więzów, prowadząc do powstania układu równań różniczkowo-algebraicznego, dla którego opracowano szereg metod ich rozwiązywania, zapoczątkowanych pracą [5]. Poniżej wymieniono niektóre pozycje należące do tej grupy. W pracy [6] można znaleźć opis modelu zawierającego podatną bryłę nadwozia, wraz z analizą wpływu tej struktury na wyniki obliczeń. Szczegółowy opis budowy modeli przedstawiono w cyklu prac [7], [8], [9]. Zawierają one różne modele opon i układów zawiesznień. W pracy [10] został przedstawiony model pojazdu zawierający 510 równań różniczkowych i 110 równań alge-

braicznych, do rozwiązania którego zastosowano jedną z metod Gear'a. Prace te pokazują możliwości, jakie oferuje wykorzystanie formalizmu Lagrange'a i współrzędnych absolutnych.

W ostatnim czasie można zaobserwować wzrost zainteresowania badaniami nad nowymi metodami całkowania równań ruchu pojazdów przy zastosowaniu współrzędnych absolutnych. Przykładowo w [11] do rozwiązania równań ruchu układu z członami podatnymi zastosowano metodę Runge-Kutty-Rosenbrocka. Pewną modyfikację metody Rungego-Kutty, umożliwiającą efektywne całkowanie równań sztywnych, przedstawili autorzy referatu [12]. Metodę z grupy Rosenbrock'a dla układów sztywnych z więzami, wykorzystano w pracach [13] oraz [14], przedstawiając także zestaw współczynników do metody Rosenbrock'a-Nyström'a. Pojawiają się również prace nad przystosowaniami różnych metod do rozwiązywania równań ruchu układów wieloczłonowych, umożliwiających stosowanie obliczeń rozproszonych i równoległych. Przykładami takich prac mogą być: [15], [16], [17].

Trzecią dużą grupę prac stanowią te, które dotyczą różnych zagadnień sterowania w układach wieloczłonowych (pojazdach). Modele z tej grupy są jednak w większości znacznie uproszczone w porównaniu z poprzednimi, z uwagi na wymaganą efektywność numeryczną. Buduje się zarówno modele liniowe [18], jak i nieliniowe [19], [20]. Zastosowanie silników elektrycznych do napędu pojazdów przedstawiono w pracy [21], gdzie stosowano płaski model pojazdu do analizy jego ruchu na łuku drogi.

W następnych rozdziałach opisano model pojazdu stosowany do obliczeń symulacyjnych, wykonywanych za pomocą własnego oprogramowania komputerowego, wyniki obliczeń, weryfikację bezpośrednią i pośrednią oraz przedstawiono wnioski.

## 2. Model pojazdu

Modele stosowane do symulacji komputerowej zawierają szereg uproszczeń, które mają decydujący wpływ na jakość uzyskiwanych wyników. Podstawowy podział modeli może być dokonany ze względu na częstotliwość drgań elementów pojazdu, która może być odwzorowana w analizie numerycznej. Istotnym założeniem, dotyczącym modelu przedstawianego w niniejszej pracy, jest uwzględnienie częstości drgań w zakresie od 0 do 50 Hz. Analizowanie wyższych częstości wymaga uwzględnienia podatności brył, zwłaszcza nadwozia. Przedstawiony w pracy model złożony jest z szeregu ciał sztywnych tworzących otwarte i zamknięte łańcuchy kinematyczne, połączonych ze sobą elementami sprężysto-tłumiącymi. Do wyprowadzania równań ruchu zastosowano metodę przekształceń jednorodnych wraz z opisem we współrzędnych złączowych oraz równania Lagrange'a II rodzaju. Równania ruchu są generowane przez własny program komputerowy, w oparciu o algorytm uwzględniający strukturę oraz stopień złożoności modelu.

Celem stosowania stosunkowo złożonego modelu (tj. posiadającego co najmniej kilkadziesiąt stopni swobody), jest możliwość symulowania dynamiki poszczególnych ciał tworzących strukturę pojazdu. Przedstawiony dalej model pojazdu, charakteryzuje

się tym, iż zawiera strukturalne modele zawiesznień i układu kierowniczego oraz funkcjonalne modele opon i układu napędowego. Umożliwia to analizę sprzęgania się np. drgań skrętnych układu napędowego z drganiami elementów zawiesznień i układu kierowniczego, czy innych ciał pojazdu. Strukturalne modele zawiesznień umożliwiają uwzględnienie rzeczywistej budowy układu jezdnego pojazdu, w odróżnieniu od stosowanego często modelu funkcjonalnego [2], [3]. W modelu funkcjonalnym, dodatkowe przemieszczenia kół określane są na podstawie badań stanowiskowych i są uwzględniane w modelu w postaci odpowiednich charakterystyk. Pewną wadą modeli funkcjonalnych jest to, iż każda zmiana geometrii lub modyfikacja innych parametrów elementów zawiesznień, wymaga powtórnych badań stanowiskowych. Modele strukturalne potrzebują z kolei dużej liczby szczegółowych danych, do których dostęp bywa utrudniony. Pomimo tych niedogodności modele strukturalne, ze względu na liczne zalety i możliwość dokładniejszego modelowania układów niż w przypadku modeli funkcjonalnych, są powszechnie stosowane w profesjonalnych pakietach (ADAMS, DADS), równoległe z modelami funkcjonalnymi.

W przyjętym modelu pojazdu wyszczególnia się następujące podukłady:

- nadwozie,
- zawieszenie przednie (typu MacPhersona),
- zawieszenie tylne z wahaczami skośnymi,
- układ kierowniczy,
- układ napędowy,
- koła wraz z oponami.

Istotną cechą prezentowanego modelu jest również możliwość symulowania ruchu pojazdów z różnymi konfiguracjami układów napędowych (np. napędy niezależne realizowane za pomocą silników elektrycznych czy napędy klasyczne z mechanizmami różnicowymi).

Cechą wspólną układów kierowniczego i przeniesienia napędu, jest uwzględnienie:

- podatności skrętnej elementów – do dyskretyzacji zastosowano metodę sztywnych elementów skończonych, opisaną w [22], (wały, półosie napędowe, kolumna kierownicy),
- tarcia suchego w układach (pomiędzy listwą zębatą układu kierowniczego a jej obudową w układzie kierowniczym oraz w mechanizmie różnicowym w układzie przeniesienia napędu, jeżeli występuje).

Symulacja numeryczna ruchu pojazdu o strukturze przedstawionej na rys. 1. wymaga opracowania odpowiednich metod umożliwiających opis i analizę struktur łańcuchów kinematycznych (w tym zawierających podłańcuchy zamknięte), oraz generowania i całkowania równań ruchu pojazdu.

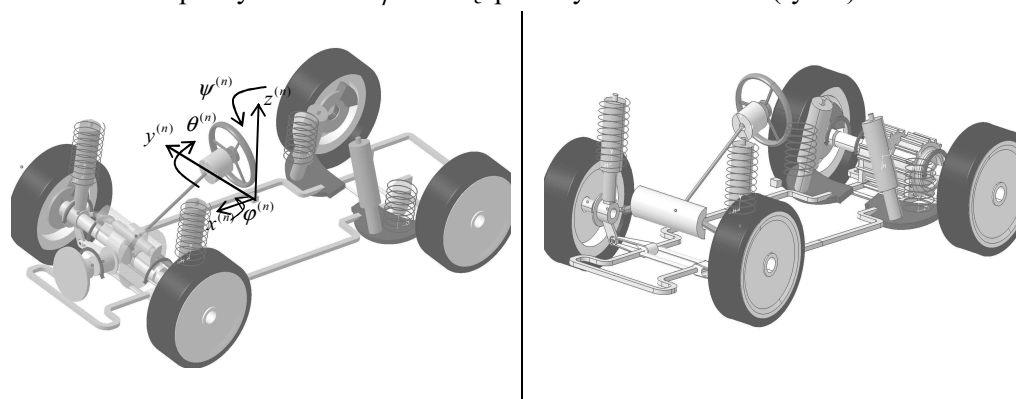
Rys. 1 przedstawia rozważany model w dwóch wersjach (przyjęto budowę i parametry odpowiadające samochodowi klasy *Fiat Seicento*): pojazd z klasycznym zespołem napędowym (silnik spalinowy z mechanizmem różnicowym) na rys. 1a), a także z wersją o napędzie niezależnym z silnikami elektrycznymi na rys. 1b).

Nadwozie pojazdu jest bryłą sztywną posiadającą sześć stopni swobody i jest ciałem stanowiącym o ruchu unoszenia (do niego dołączone są wszystkie gałęzie) pozostałych podukładów. Wektor współrzędnych uogólnionych nadwozia  $\mathbf{q}^{(n)}$  ma postać:

$$\mathbf{q}^{(n)} = [x^{(n)} \quad y^{(n)} \quad z^{(n)} \quad \psi^{(n)} \quad \theta^{(n)} \quad \varphi^{(n)}]^T \quad (2.1)$$

gdzie:

$x^{(n)}, y^{(n)}, z^{(n)}$  – współrzędne początku układu nadwozia w układzie inercjalnym,  
 $\psi^{(n)}, \theta^{(n)}, \varphi^{(n)}$  – kąty obrotu Eulera (Z-Y-X):  $\psi^{(n)}$  – kąt odchylenia,  $\theta^{(n)}$  – kąt pochylenia oraz  $\varphi^{(n)}$  – kąt przechylenia nadwozia (rys. 1).



Rys. 1. Model pojazdu:

a) z napędem klasycznym    b) napęd realizowany przez silniki elektryczne

Fig. 1. The model of the vehicle:

a) with classic drive system    b) powertrain with electric motors as drive system

Model przedniego zawieszenia pojazdu przedstawia rys. 2. Jest to zawieszenie typu MacPhersona, w skład którego wchodzi ( $k = 1,2$  - lewa bądź prawa strona pojazdu), elementy z rys. 2:

- kolumna zawieszenia, której ruch (obroty) względem nadwozia opisuje wektor:

$$\mathbf{q}^{(T,k)} = [\psi^{(T,k)} \quad \theta^{(T,k)} \quad \varphi^{(T,k)}]^T, \quad (2.2)$$

- zwrotnica, posiadająca dwa stopnie swobody względem kolumny:

$$\mathbf{q}^{(Z,k)} = [z^{(Z,k)} \quad \psi^{(Z,k)}]^T, \quad (2.3)$$

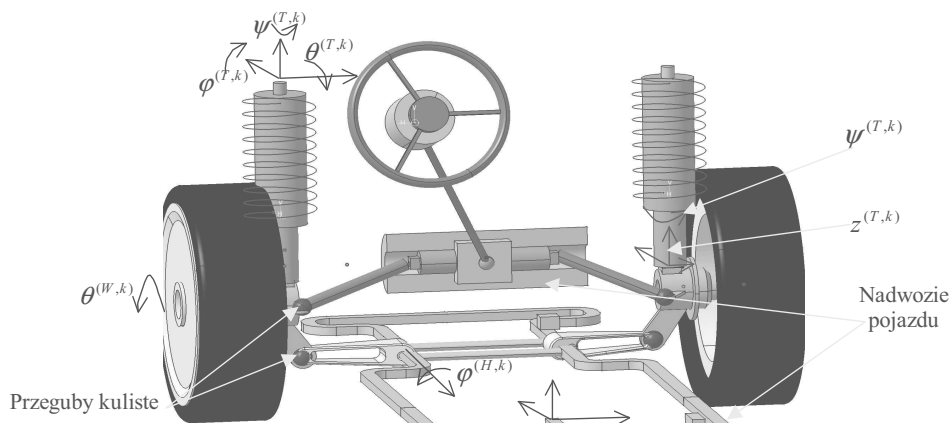
- koło (tylko obrót własny):

$$\mathbf{q}^{(W,k)} = [\theta^{(W,k)}], \quad (2.4)$$

- wahacz, którego ruch względem nadwozia określony jest przez:

$$\mathbf{q}^{(H,k)} = [\varphi^{(H,k)}], \quad (2.5)$$

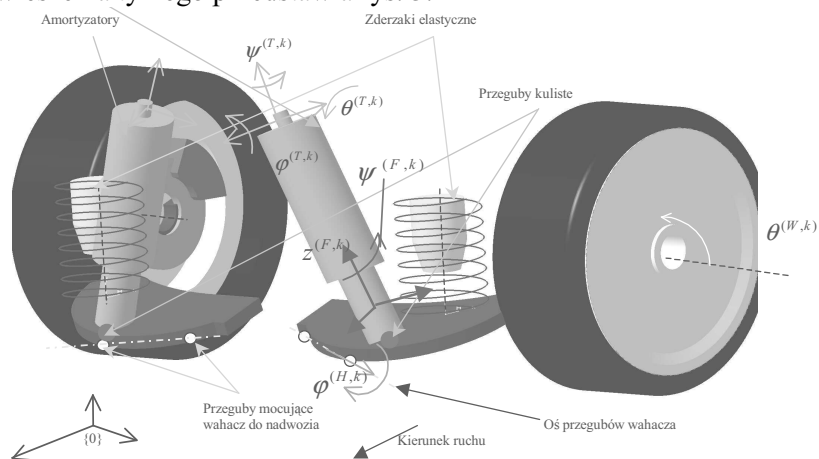
- przeguby kuliste, łączące drążki ze zwrotnicami oraz wahacze ze zwrotnicami (ich wprowadzenie powoduje powstanie podłańcuchów zamkniętych).



Rys. 2. Model zawieszenia przedniego typu MacPherson

Fig. 2. Model of the front MacPherson suspension

Model zawieszenia tylnego przedstawia rys. 3.



Rys. 3. Model zawieszenia tylnego z wahaczami skośnymi

Fig. 3. Model of the rear suspension with trailing arms

Jest ono oparte na wahaczach włączonych, o następujących elementach ( $k = 3,4$ ):

- amortyzator, możliwe są trzy obroty względem nadwozia:

$$\mathbf{q}^{(A,k)} = [\psi^{(A,k)} \quad \theta^{(A,k)} \quad \varphi^{(A,k)}]^T, \quad (2.6)$$

- tłocznik amortyzatora, posiadające dwa stopnie swobody względem obudowy:

$$\mathbf{q}^{(F,k)} = [z^{(F,k)} \quad \psi^{(F,k)}]^T, \quad (2.7)$$

- wahacz (ruch względem nadwozia):

$$\mathbf{q}^{(H,k)} = [\varphi^{(H,k)}], \quad (2.8)$$

- koło, ruch względny określa:

$$\mathbf{q}^{(W,k)} = [\theta^{(W,k)}], \quad (2.9)$$

- przeguby kuliste, łączące amortyzatory z wahaczami.

Ruch samochodu (jego nadwozia wraz z zawieszzeniami) jest określony, jeśli wyznaczy się na drodze całkowania numerycznego równań ruchu następujące elementy:

- a) składowe wektora współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q}^{(S)}$ :

$$\mathbf{q}^{(S)} = \left[ \left( \mathbf{q}^{(n)} \right)^T \quad \left( \mathbf{q}^{(S,1)} \right)^T \quad \dots \quad \left( \mathbf{q}^{(S,4)} \right)^T \right]^T, \quad (2.10.1)$$

gdzie:

$$\mathbf{q}^{(S,k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(T,k)} \\ \mathbf{q}^{(Z,k)} \\ \mathbf{q}^{(W,k)} \\ \mathbf{q}^{(H,k)} \end{bmatrix}, \text{ gdy } k = 1, 2, \quad \mathbf{q}^{(S,k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(A,k)} \\ \mathbf{q}^{(F,k)} \\ \mathbf{q}^{(W,k)} \\ \mathbf{q}^{(H,k)} \end{bmatrix}, \text{ gdy } k = 3, 4,$$

- b) reakcje w przegubach kulistych:

$$\mathbf{R}^{(S)} = \left[ \left( \mathbf{R}_p^{(i,j)} \right)^T \right]^T, \quad p = 1, \dots, n_j \quad (2.10.2)$$

gdzie:

$i, j$  - numery ciał tworzących połączenie,

$$\mathbf{R}_p^{(i,j)} = \begin{bmatrix} p F_X^{(i,j)} & p F_Y^{(i,j)} & p F_Z^{(i,j)} \end{bmatrix}^T,$$

$n_j$  - liczba połączeń kulistych (w analizowanym modelu  $n_j = 6$ ).

Istotną zaletą metody użytej w pracy (opartej na współrzędnych złączowych) do opisu ruchu układów wieloczłonowych jest to, iż nie trzeba wprowadzać równań więzów dla połączeń kolejnych członów łańcucha kinematycznego. Dodatkowe reakcje więzów są niezbędne jedynie tam, gdzie tworzy się zamknięte łańcuchy kinematyczne. Modele rozważane w pracy posiadają przeguby kuliste, które powodują powstawanie konfiguracji z zamkniętymi łańcuchami. Reakcje więzów są nieznane w fazie formowania równań ruchu, dlatego dla każdego przegubu kulistego wprowadza się dodatkowe równania więzów, które dla tego typu połączenia można zapisać w postaci [23]:

$$\mathbf{B}^{(i)} \cdot \mathbf{r}_p^{(i)} - \mathbf{B}^{(j)} \cdot \mathbf{r}_p^{(j)} = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

gdzie:

$\mathbf{B}^{(i)}, \mathbf{B}^{(j)}$  – macierze transformacji współrzędnych z układów lokalnych ciał  $i, j$  do układu globalnego,

$\mathbf{r}_p^{(i)}, \mathbf{r}_p^{(j)}$  – współrzędne punktów położenia przegubu w układzie lokalnym ciała  $i$  oraz  $j$ ,

$i, j$  – numery ciał połączonych przegubem kulistym,

$P$  – numer przegubu kulistego w układzie.

Uwzględniając postać (2.10) można obliczyć liczbę składników wektora  $\mathbf{q}^{(S)}$ :

$$n_S = 6 + 2(3 + 2 + 1 + 1) + 2(3 + 2 + 1 + 1) = 34. \quad (2.12)$$

Zastosowany model układu kierowniczego pokazano na rys. 4. Jest to przestrzenny model, zbudowany z następujących elementów:

- listwy zębatej, której ruch względem nadwozia określa wektor:

$$\mathbf{q}^{(L)} = [y^{(L)}], \quad (2.13)$$

- drażków kierowniczych, posiadających możliwość dowolnego obrotu względem listwy:

$$\mathbf{q}^{(D,k)} = [\psi^{(D,k)} \quad \theta^{(D,k)} \quad \varphi^{(D,k)}]^T, \quad (2.14)$$

- kolumny kierownicy, modelowanej jako wał o podatności skrętnej; ruch jej elementów jest określony wektorem:

$$\mathbf{q}_\varphi^{(W)} = [\varphi_0^{(W)} \quad \dots \quad \varphi_{n_w}^{(W)}]^T, \quad (2.15)$$

gdzie:

$n_w + 1$  – liczba elementów (ses), na które podzielono kolumnę, połączonych poprzez  $n_w$  elementów sprężysto-tłumiących (est),

$\varphi_i^{(W)}$  – kąt obrotu  $i$ -tego elementu kolumny (ses o numerze 0 oznacza koło kierownicy).

Wektor współrzędnych uogólnionych kolumny określony w (2.15), uzupełnia wektor współrzędnych uogólnionych określający ruch brył tworzących model pojazdu.

Równanie ruchu podatnej kolumny z kołem kierownicy można zapisać w postaci:

$$\mathbf{A}^{(W)} \mathbf{q}_\varphi^{(W)} - \mathbf{D}_{n_w}^{(W)} S_L = \mathbf{F}^{(W)}, \quad (2.16)$$

gdzie:

$S_L$  – siła oddziaływania listwy na kolumnę kierownicy,

$$\mathbf{D}_{n_w}^{(W)} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -r_L^{(W)}]^T,$$

$r_L^{(W)}$  – promień podziałowy zębniaka,

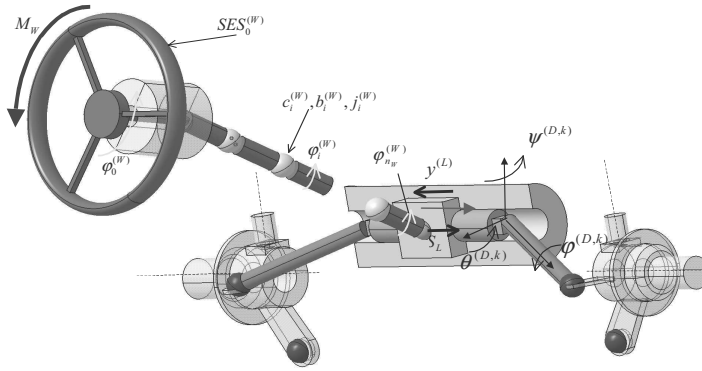
$$\mathbf{F}^{(W)} = -\mathbf{B}^{(W)} \mathbf{q}_\varphi^{(W)} - \mathbf{C}^{(W)} \dot{\mathbf{q}}_\varphi^{(W)} + \mathbf{D}_0^{(W)} M_W,$$

$M_W$  – moment przyłożony do kierownicy,

$\mathbf{A}^{(W)}$ ,  $\mathbf{B}^{(W)}$ ,  $\mathbf{C}^{(W)}$  – macierze mas, sztywności i tłumienia kolumny, określone w pracy [22],

$$\mathbf{D}_0^{(W)} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0]^T.$$





Rys. 4. Założony model układu kierowniczego

Fig. 4. Steering system assumed

Równanie więzów łączące ruch listwy z kolumną kierownicy ma postać:

$$-\mathbf{D}_L^{(V,W)} \dot{\mathbf{q}}^{(V)} - (\mathbf{D}_{n_w}^{(W)})^T \dot{\mathbf{q}}_\phi^{(W)} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

gdzie:  $\mathbf{D}_L^{(V,W)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & y^{(L)} & & & \end{bmatrix}^T$ .

Po dodaniu do wektora określonego w (2.10) współrzędnych uogólnionych elementów układu kierowniczego (tj. listwy oraz drążków), otrzymuje się:

$$\mathbf{q}^{(V)} = \left[ (\mathbf{q}^{(S)})^T \quad y^{(L)} \quad (\mathbf{q}^{(D,1)})^T \quad (\mathbf{q}^{(D,2)})^T \quad (\mathbf{q}_\phi^{(W)})^T \right]^T, \quad (2.18.1)$$

oraz, uwzględniając wzór (2.12), wyznacza się liczbę współrzędnych uogólnionych:

$$n_V = n_S + 1 + 2 \cdot 3 + n_W + 1 = n_S + n_W + 8, \quad (2.18.2)$$

gdzie:

$n_V$  – jest liczbą współrzędnych uogólnionych opisujących ruch brył sztywnych użytych do budowy łańcuchów kinematycznych tworzących model pojazdu, wraz z układem kierowniczym.

Modele zastosowanych układów napędowych opisano szczegółowo w pracy [24]. W przypadku modelu z napędem niezależnym, moment napędowy przekazywany jest na koło  $k$  z silnika elektrycznego poprzez podatną półoś napędową. Alternatywnie można zastosować model klasycznego układu przeniesienia napędu z silnikiem spalinowym i mechanizmem różnicowym.

Ogólnie, równania ruchu elementów układu napędowego przyjmują postać:

$$\mathbf{A}^{(D)} \ddot{\mathbf{q}}^{(D)} - \mathbf{D}^{(D)} \dot{\mathbf{M}}^{(D)} = \mathbf{F}^{(D)}, \quad (2.19.1)$$

gdzie:

$$\mathbf{q}^{(D)} = \left[ [\mathbf{q}_\phi^{(L)}]^T \quad [\mathbf{q}_\phi^{(R)}]^T \quad [\mathbf{q}_\phi^{(D)}]^T \right]^T - \text{wektory współrzędnych uogólnionych},$$

$\mathbf{q}_\varphi^{(m)} = [\varphi_0^{(m)} \quad \dots \quad \varphi_{n_m}^{(m)}]^T$  – wektor współrzędnych uogólnionych półosi napędowej o numerze  $m = L, R$ ,

$n_m$  – liczba elementów *ses* użytych do dyskretyzacji półosi  $m$ ,

$\mathbf{q}_\varphi^{(D)} = \begin{cases} [\emptyset] & \text{– w przypadku napędu niezależnego,} \\ [\varphi_0^{(D)} \quad \dots \quad \varphi_{n_D}^{(D)} \quad \varphi^{(MR)}]^T & \text{– w przypadku napędu klasycznego,} \end{cases}$

$\mathbf{F}^{(D)}$  – wektor prawych stron,

$\mathbf{A}^{(D)}$  – macierz mas,

$\mathbf{D}^{(D)}$  – macierz współczynników reakcji więzów,

$\mathbf{M}^{(D)} = [M_1^{(D)} \quad \dots \quad M_{m_D}^{(D)}]^T$  – wektor reakcji więzów, których elementy przedstawiono w pracach [23], [24].

Z punktu widzenia funkcjonalności układu kierowniczego oraz mechanizmu różnicowego, istotne znaczenie ma uwzględnienie tarcia suchego. Uwzględnienie tego rodzaju tarcia komplikuje modele matematyczne a także obliczenia, ze względu na konieczność rozpatrywania faz tarcia statycznego i kinetycznego. Gdy uwzględni się tarcie statyczne (brak ruchu względnego w połączeniach), wektor nieznanych reakcji należy uzupełnić składowymi:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_L \\ M_T^{(L,R)} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

gdzie:  $T_L$  – siła tarcia listwy o obudowę,

$M_T^{(L,R)}$  – moment tarcia wewnętrznego w mechanizmie różnicowym.

Do obliczenia składowych wektora  $\mathbf{T}$  zastosowano odpowiednie algorytmy sterujące, które umożliwiają sprawdzanie i przełączanie faz tarcia, opracowane podobnie jak w pracy [25].

Aby podsumować rozważania, poniżej przedstawiono otrzymaną strukturę równań ruchu i więzów dla modelu pojazdu przedstawionego na rys. 1b) przy założeniu, że uwzględnia się układ napędowy z mechanizmem różnicowym oraz zakłada się tarcie nierozwinięte w mechanizmie różnicowym i układzie kierowniczym:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}\mathbf{R} = \mathbf{F}, \quad (2.21.1)$$

$$-\mathbf{D}^T \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Gamma} \quad (2.21.2)$$

gdzie:

$\mathbf{Q}_k^{(V)}$  – wektor sił uogólnionych, odpowiadających siłom i momentom reakcji jezdni na koła pojazdu, przyjętych zgodnie ze stosowanym modelem opon (do obliczeń stosowano model Dugoffa-Uffelmanna, opisany w pracy [26] lub Pacejki [27]),

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(V)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(L)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(R)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(D)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(W)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{(V)} \\ \mathbf{q}_\varphi^{(L)} \\ \mathbf{q}_\varphi^{(R)} \\ \mathbf{q}^{(D)} \\ \mathbf{q}_\varphi^{(W)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{(V)} + \sum_{k=1}^4 \mathbf{Q}_k^{(V)} (F_X^{(k)}, F_Y^{(k)}, F_Z^{(k)}, M_X^{(k)}, M_Y^{(k)}, M_Z^{(k)}) \\ \mathbf{F}^{(L)} \\ \mathbf{F}^{(R)} \\ \mathbf{F}^{(D)} \\ \mathbf{F}^{(W)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^{(V)} & \mathbf{D}^{(V,L)} & \mathbf{D}^{(V,R)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(V,L)} & -\mathbf{D}_T^{(V,L)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_0^{(L)} & \mathbf{0} & -\frac{1}{2} \mathbf{D}_{n_L}^{(L)} & -\mathbf{D}_{n_L}^{(L)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_0^{(R)} & -\frac{1}{2} \mathbf{D}_{n_R}^{(R)} & +\mathbf{D}_{n_R}^{(R)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^{(D)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{n_W}^{(W)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^{(V)} \\ M_0^{(L)} \\ M_0^{(R)} \\ M_D^{(L,R)} \\ M_T^{(L,R)} \\ S_L \\ T_L \end{bmatrix},$$

$\mathbf{\Gamma}$  – wektor prawych stron równań więzów,

$M_0^{(k)}$  – nieznane momenty sprzęgające ruch kół i elementów układu napędowego,  
 $k = L, R,$

$M_D^{(L,R)}$  – moment działający na obudowę mechanizmu różnicowego.

Rozmiar układu równań (2.21) jest zdeterminowany liczbą  $n_V$  oraz liczbą pozostałych składowych wektora współrzędnych uogólnionych  $\mathbf{q}$  oraz liczbą nieznanymi reakcji  $n_R$ . Dla modelu pojazdu z rys. 1b) wynosi ona:

$$\begin{aligned}
 n_V + n_\varphi^{(L)} + 1 + n_\varphi^{(R)} + 1 + n_\varphi^{(D)} + 2 + n_R + 6 &= \\
 = 46 + n_\varphi^{(L)} + n_\varphi^{(R)} + n_\varphi^{(D)} + n_W + 24 + 6 &= \\
 = 76 + n_\varphi^{(L)} + n_\varphi^{(R)} + n_\varphi^{(D)} + n_\varphi^{(W)} &
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

W szczególnych przypadkach (brak mechanizmu różnicowego, sztywne półosie:  $n_\varphi^{(L)} = n_\varphi^{(R)} = 0$ , bądź w fazie tarcia kinetycznego w mechanizmie różnicowym lub układzie kierowniczym), równania otrzymuje się poprzez skreślenie odpowiednich

równań ruchu i więzów, oraz przeniesienie niektórych wektorów na prawą stronę (jako znanych). Szczegółowe wyprowadzenia równań ruchu można znaleźć w [23].

Z równania (2.21.1) można obliczyć:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{A}^{-1}[\mathbf{F} + \mathbf{DR}], \quad (2.23)$$

a po podstawieniu  $\ddot{\mathbf{q}}$  do (2.21.2), uzyskać równanie:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{DR} = -\mathbf{\Gamma} - \mathbf{D}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F}, \quad (2.24)$$

które jest układem równań algebraicznych liniowych z niewiadomymi, będącymi składowymi wektora  $\mathbf{R}$ . Po rozwiązaniu tego układu równań i wyznaczeniu  $\mathbf{R}$ , można obliczyć składowe wektora  $\ddot{\mathbf{q}}$  ze wzoru (2.23). Takie postępowanie zastosowano w opracowanych programach komputerowych.

Istotnym elementem modelu pojazdu jest model opony, którego wpływ na wyniki obliczeń zależy w dużym stopniu od rodzaju analizowanych testów symulacyjnych. Najpopularniejsze modele opon stosowane w programach obliczeniowych to: Dugoffa-Uffelmanna [26] oraz Pacejki [27], oba są zastosowane w obliczeniach przedstawionych dalej. Drugi z tych modeli opisuje dokładniej zjawiska generowania sił pochodzących od nawierzchni jezdni, wymaga jednak większej liczby parametrów. Istotną kwestią jest problem drgań opony wywołanych przejazdem przez nierówności o długościach śladu tego rzędu, co długość śladu opony. Mając na uwadze to, iż częstotliwości drgań własnych opony prawie zawsze znacznie przekraczają 50 [Hz], wspomniane modele opon mogą być stosowane, jednak wyniki obliczeń są obciążone pewnym błędem [28]. W szczególności należy uwzględnić wpływ tych częstotliwości na drgania elementów: układu kierowniczego (np. przyspieszenie styczne na kole kierownicy), oraz w pewnym stopniu, zawiesznień w płaszczyźnie koła. Jest to istotne w symulacjach określających poziom drgań wywołanych nierówną nawierzchnią.

Do całkowania równań postaci (2.23), uzupełnionych odpowiednimi warunkami początkowymi, stosowano głównie metodę Rungego-Kutty IV rzędu ze stałym krokiem całkowania [29]. Stosowano również metody z automatycznym doбором kroku całkowania (Rungego-Kutty-Fehlberga, Bulirsch-Stoera) oraz metody dla układów różniczkowych sztywnych: Rosenbrock'a, Bulirsch-Stoera- Deuflhard'a [30], [31]. Przy stosowanej metodzie modelowania – współrzędne węzłowe i przekształcenia jednorodne – macierz mas układu równań ruchu jest pełna. Ma to bezpośredni wpływ na czas symulacji – efekt przyspieszenia obliczeń poprzez wykorzystanie wspomnianych metod całkowania (przy założeniu odpowiedniej dokładności obliczeń) maleje w stosunku do „prostej” metody Rungego-Kutty, wraz ze wzrostem złożoności modelu oraz pojawianiem się zjawisk o skokowo zmiennych wartościach (np. przejazd przez przeszkodę). Porównanie efektywności numerycznego całkowania równań ruchu dla omawianego modelu oraz jego uproszczonych wersji przedstawiono w pracy [32].

### 3. Wyniki symulacji numerycznych, weryfikacja modelu

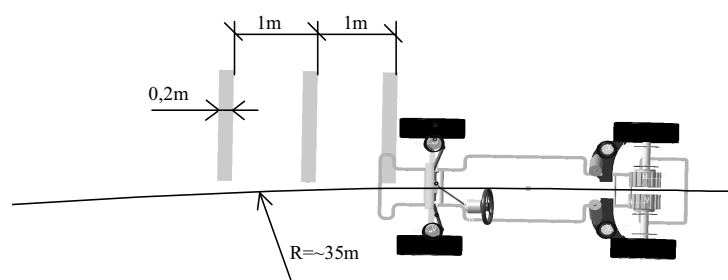
Modele matematyczne i programy komputerowe powinny zostać zweryfikowane odpowiednimi pomiarami drogowymi, będącymi najlepszą metodą sprawdzenia ich

poprawności. W dalszej części rozdziału przedstawiono również porównanie z wynikami obliczeń uzyskanymi z systemu MSC.ADAMS, jako drugą, pośrednią metodę weryfikacji.

Identyfikacji parametrów modelu dokonano na podstawie analizy szczegółowej dokumentacji technicznej pojazdu *Fiat Seicento*, jak również pewne wielkości określono na podstawie literatury (np. [3]). W nielicznych przypadkach braku szczegółowych danych, posłużono się metodą rekonstrukcji geometrii za pomocą narzędzi CAD, umożliwiającej dokładne wyznaczenie np. parametrów bezwładnościowych.

### 3.1. Weryfikacja pomiarowa

Wykonane zostały pomiary drogowe w czasie przejazdu przez przeszkody umieszczone na jezdni. Przeszkody (deski o przekroju poprzecznym w kształcie prostokąta) miały wysokość 2.5 cm, zostały umieszczone w ten sposób, aby pokonywały je koła tylko jednej strony pojazdu (rys. 5).



Rys. 5. Wymiary i usytuowanie przeszkód na drodze

Fig. 5. Obstacles on the road - dimensions and location

W skład aparatury pomiarowej wchodziły następujące urządzenia:

- dwa czujniki przyspieszeń (zamocowane na nadwoziu oraz zwrotnicy przedniego koła, pokonującej przeszkodę),
- czujnik *Correvit* mierzący prędkość liniową samochodu w osiach x i y,
- kierownica elektryczna do pomiaru kąta obrotu oraz momentu na kole kierownicy,
- żyroskop do pomiaru prędkości kątowych nadwozia,
- czujniki kątów skrętu kół kierowanych,
- komputer sterujący pracą układu pomiarowego,
- urządzenie analogowo-cyfrowe rejestrujące i przetwarzające sygnały.

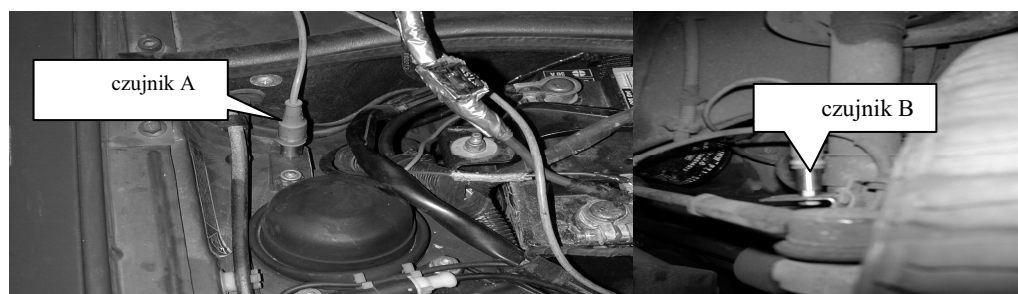
Wyniki pomiarów rejestrowano na komputerze zbierającym dane z przetwornika. Układ pomiarowy, czujniki oraz pojazd badawczy przedstawiono na rys. 6. i 7. Decydujące znaczenie miał pomiar oddziaływania przeszkód o ostrych krawędziach na drgania elementów pojazdu. Zamontowano czujniki przyspieszeń rejestrujące drgania pionowe nadwozia (czujnik A zamontowany w uchwycie kolumny MacPhersona) oraz zawieszenia (czujnik B umieszczony na zwrotnicy) po prawej stronie pojazdu. Inne

wielkości mierzone służyły do kontroli warunków jazdy (prędkość liniowa i kątowa pojazdu, kąty skrętu kół, itp.).



Rys. 6. Widok aparatury pomiarowej wewnątrz pojazdu

Fig. 6. View of the measurement devices used in experimental verification of the models

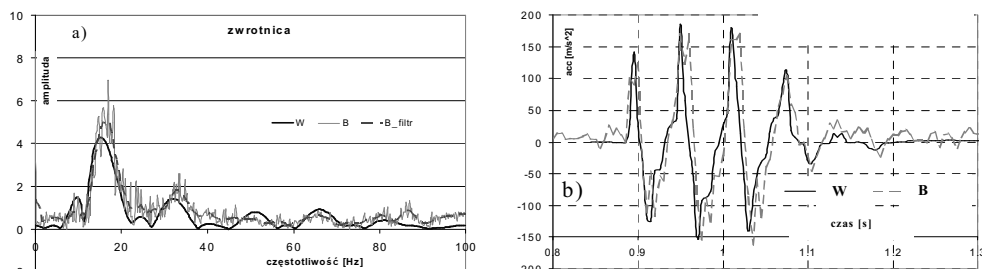


Rys. 7. Miejsce zamontowania czujników przyspieszeń

Fig. 7. The location of the accelerometers

Symbolem „W” na prezentowanych dalej wykresach oznaczono wyniki obliczeń, natomiast „B” wyniki uzyskane z pomiarów. Widoczne różnice pomiędzy pomiarami i wynikami obliczeń, można wytłumaczyć istniejącymi uproszczeniami w modelu: zarówno modelu opony (nie uwzględniono w modelu obliczeniowym możliwości ruchu opony względem obręczy), jak również podatności wzdłużnej zawieszenia (elementów stalowo-gumowych mocujących wahacze do podwozia samochodu). Główny charakter zjawiska (amplituda, częstość drgań) są jednak, zdaniem autora zadowalająco zgodne.

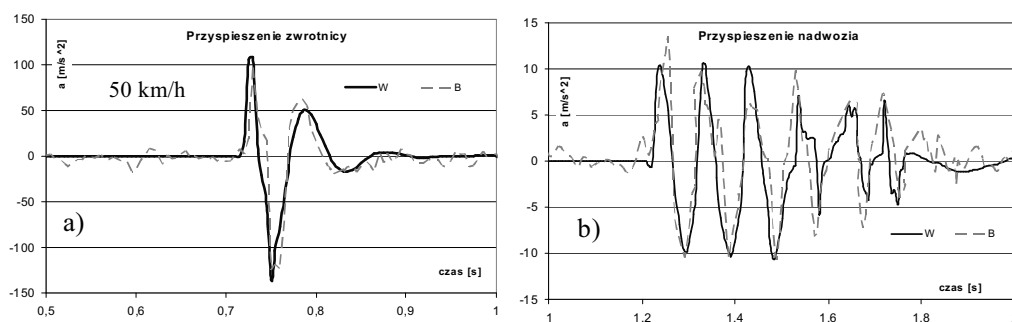
Analizując wykresy na rys. 8. i 9, można zauważyć lokalne różnice w uzyskiwanych przebiegach przyspieszeń. Są one spowodowane zarówno uproszczeniami przyjętego modelu obliczeniowego, jak również zakłóceniami, które powstają w trakcie wykonywania badań. Zjawiska te to między innymi: nierówna nawierzchnia, błędy identyfikacji parametrów (szczególnie charakterystyki tarcia, tłumienia, luzy powstałe na wskutek zużycia) oraz niepowtarzalność manewrów (kierowca nie jest w stanie wykonać idealnej, zamierzonej trajektorii przy przejeździe przez przeszkody).



Rys. 8. Trzy przeszkody w jeździe na wprost: pionowe przyspieszenia masy nie resorowanej, a) FFT przebiegu czasowego, b) przebieg czasowy

Fig. 8. Three obstacles while straight-line motion: vertical accelerations of the unsprung mass, a) FFT on the time history, b) the time history

Niektóre wyniki dotyczące przejazdu przez przeszkody w czasie jazdy po okręgu ze stałą prędkością, zamieszczono na rys. 9.



Rys. 9. Przejazd przez przeszkody podczas jazdy po okręgu  
 a) pionowe przyspieszenia masy nie resorowanej przy przejeździe przez 1 przeszkodę,  
 b) pionowe przyspieszenia nadwozia, przejazd przez 3 przeszkody

Fig. 9. Obstacles on the circular path  
 a) vertical acceleration of the non-suspended mass while running over 1 obstacle,  
 b) vertical acceleration of the car body while running over 3 obstacles

Należy też podkreślić, że wybrane testy obliczeniowe, które postanowiono zweryfikować, cechują się znacznie większą „wrażliwością” na pewne czynniki, inne niż przedstawiane np. w pracach [2], czy [3], gdzie weryfikowano wielkości globalne, takie jak prędkości kątowe odchyłania. Stąd błąd względny między obliczeniami oraz pomiarami, obliczony wg zależności:

$$\varepsilon = \frac{\int_{t_1}^{t_2} |p(t) - o(t)| dt}{\int_{t_1}^{t_2} |p(t)|} \cdot 100\% \tag{3.1}$$

gdzie:

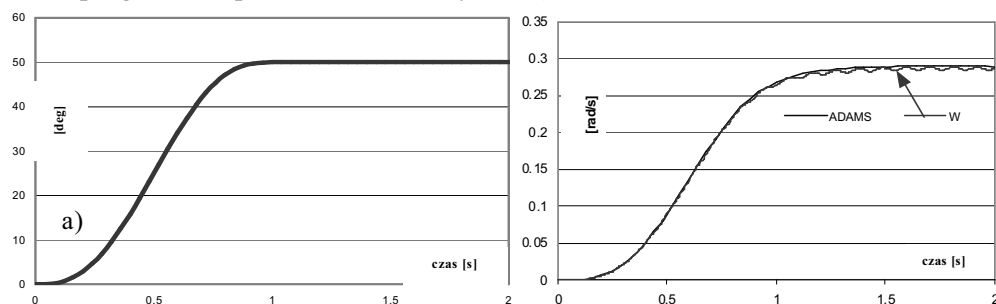
$p(t), o(t)$  – przebiegi uzyskane z pomiarów i obliczeń,

wynosi maksymalnie 10% i jest większy od uzyskanych (1–2 %) w wymienionych pracach. Wyniki badań, choć w pewnym stopniu różnią się od wyników obliczeń, zdaniem autora, świadczą o poprawnie zbudowanym modelu matematycznym pojazdu.

### 3.2. Weryfikacja pośrednia

Drugi etap weryfikacji przeprowadzono stosując porównanie wyników obliczeń uzyskanych z własnego oprogramowania, z wynikami systemu MSC.ADAMS, sprawdzonego, powszechnie używanego w wielu ośrodkach narzędzia do wirtualnego prototypowania pojazdów.

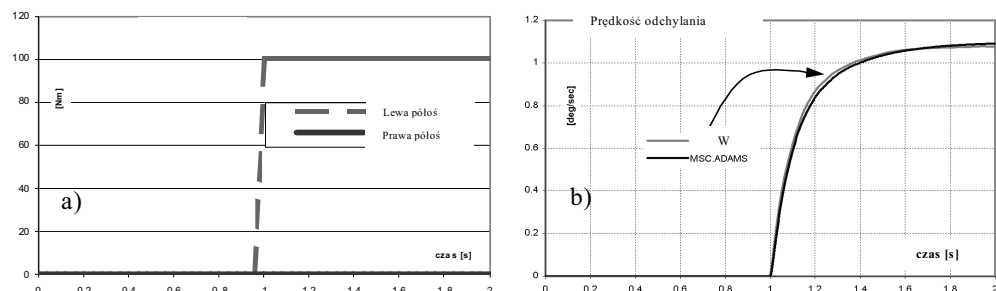
Na rys. 10a) przedstawiono funkcję kąta obrotu kierownicy, którą przyjęto jako wymuszenie w obu modelach (symbolem „W” oznaczono wyniki obliczeń otrzymane z własnego oprogramowania). Prędkość kątową odchylenia nadwozia, obliczoną w obu programach, przedstawiono na rys. 10b).



Rys. 10. a) Wymuszenie kierownicy, b) prędkość odchylenia samochodu

Fig.10. a) Steering wheel angle, b) yaw velocity of the vehicle

Przykład następnym przedstawia wyniki symulacji ruchu pojazdu z układem napędowym niezależnym ze skokową zmianą wartości momentu napędowego (rys. 11a), przy czym zmiana momentu następuje tylko z jednej strony (w jednym silniku elektrycznym). Przebieg prędkości kątowej odchylenia, w wyniku działania tego momentu, zamieszczono na rys. 11b):

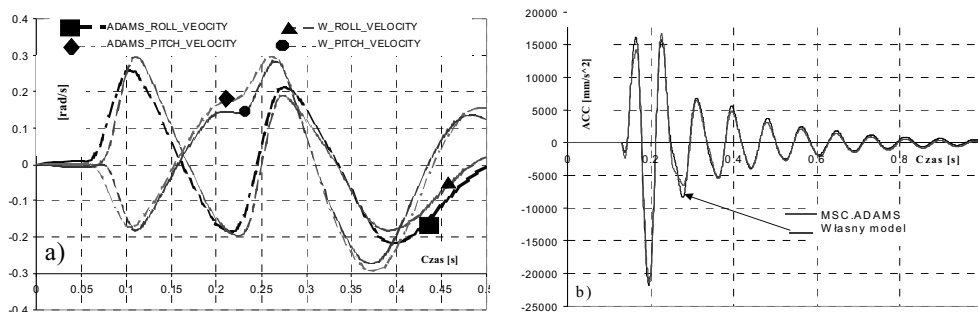


Rys. 11. a) Momenty napędowe silników, b) prędkość kątowna pojazdu

Fig. 11. a) Drive torques on electric motors, b) yaw velocity of the car body



Kolejny przykład, pokazujący różnice pomiędzy systemem MSC.ADAMS oraz wynikami uzyskiwanymi z własnego programu, przedstawiono na rys. 12. Przedstawiają one wybrane wielkości uzyskane w czasie przejazdu przez przeszkodę o ostrych krawędziach kołami jednej strony. Kąty przechylenia i pochylenia nadwozia przedstawiają wykresy na rys. 12a), natomiast na rys. 12b) zamieszczono przebieg czasowy przyspieszenia stycznego koła kierownicy.



Rys. 12. Przejazd przez przeszkody o ostrych krawędziach:

a) prędkości pochylenia i przechylenia nadwozia b) przyspieszenie styczne punktu na kole kierownicy

Fig. 12. Running over obstacles with sharp edges:

a) pitch and roll velocity of the car body b) tangential acceleration of the steering wheel

Porównanie wyników obliczeń uzyskiwanych z własnego oprogramowania, z wynikami systemu MSC.ADAMS również, zdaniem autora, potwierdza jednoznacznie poprawność zastosowanych metod, algorytmów i programów. Widoczne różnice przebiegów, nie przekraczają kilku procent. Warto tu zaznaczyć, iż oba programy różnią się zasadniczo sposobem modelowania oraz równaniami opisującymi ruch układów wieloczłonowych.

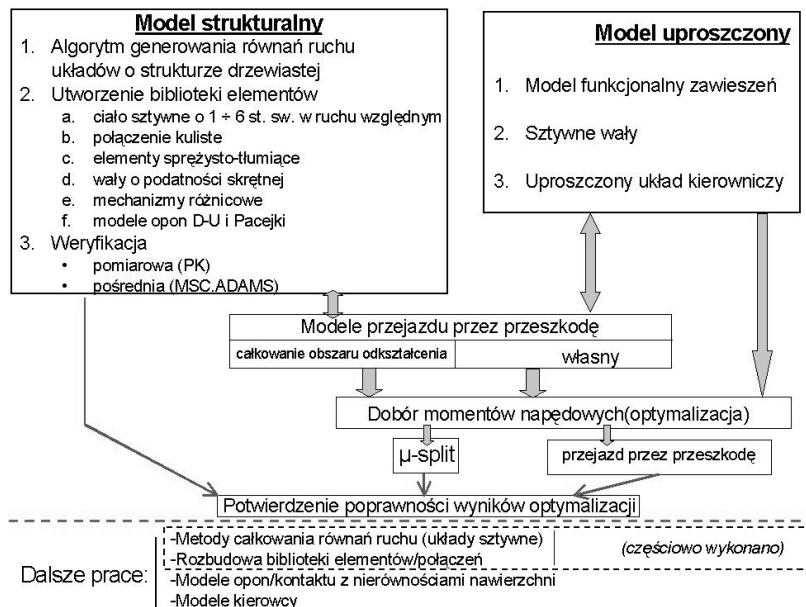
#### 4. Podsumowanie

Artykuł przedstawia zastosowanie współrzędnych złączowych i przekształceń jednorodnych do formułowania równań ruchu pojazdów. Uwzględniono możliwość drzewiastej struktury modeli pojazdów, poprzez wprowadzenie połączeń kulistych, umożliwiających łączenie podukładów. Przedstawiono model matematyczny małego samochodu (typu Fiat Seicento), w którym uwzględniono strukturalne modele zawiesznień i układu kierowniczego. Zaletą proponowanego sposobu modelowania, wykorzystującego współrzędne złączowe, jest otrzymywanie układów równań o małych wymiarach, w porównaniu z metodami stosującymi współrzędne absolutne. Zaleta ta nie przekłada się wprost na skrócenie czasu obliczeń komputerowych, z uwagi na to, że otrzymuje się równania ruchu, w których macierz mas jest pełna i ma zmienne współczynniki. Ogranicza natomiast problemy związane z realizacją równań więzów.

Przeprowadzono weryfikację poprawności opracowanych modeli, algorytmów i programów komputerowych. Wyniki obliczeń wykonanych według własnych metod i programów komputerowych, porównano z wynikami badań drogowych. Uzyskano akceptowalną zgodność wyników pomiarów i obliczeń. Przeprowadzono również

pośrednią weryfikację poprawności własnych modeli i programów, poprzez zbudowanie równoważnych modeli w systemie ADAMS i porównanie wyników. Również w tym przypadku zgodność wyników była zadowalająca. Weryfikacje te są podstawą przyjęcia tezy o poprawności przedstawionych w pracy autorskich modeli i programów.

Na rys. 13 przedstawiono schemat poszczególnych składników opracowanego oprogramowania, w skład którego wchodzi m. in. (nie opisane w tym artykule) modele uproszczone, moduły przeznaczone do optymalizacji przebiegów momentów napędowych silników elektrycznych, modele opon i kontaktu z przeszkodami oraz inne elementy składowe, które są obecnie w fazie rozbudowy (oznaczone jako dalsze prace).



Rys. 13. Elementy oprogramowania do symulacji dynamiki pojazdów i doboru napędów

Fig. 13. The library developed as simulation tool for vehicle dynamics and optimisation analysis

Istniejące oprogramowanie jest aktualnie rozbudowywane o dalsze elementy, takie jak: odpowiedniejsze modele współpracy opony z nierównościami drogi o długościach porównywalnych z długością śladu kontaktu (uwzględnienie drgań obręczy opony), modele kierowcy, podatności brył, itp. Szczególnie interesujące byłoby uogólnienie stosowanych metod na dowolnego typu pojazdy, zawierające różnorodne konfiguracje podukładów.

### Podziękowania

Autor składa podziękowanie prof. dr hab. Stanisławowi Wojciechowi z Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej za wiele cennych uwag przekazanych w trakcie wykonywania niniejszej pracy oraz dr hab. inż. Witoldowi Grzegózkowi, prof. Politechniki Krakowskiej za pomoc w realizacji badań eksperymentalnych.

### Literatura

- [1] KIM S.: *A Subsystem Synthesis method for Efficient Vehicle Multibody Dynamics*. Multibody System Dynamics, Vol.7 Nr 2, 189-207, 2002.
- [2] ADAMIEC- WÓJCIK I.: Modelling dynamics of multibody systems using homogenous transformations. Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Rozprawy Naukowe, Zeszyt nr 3, Bielsko-Biała, 2003.
- [3] GRZEGOŹEK W., ADAMIEC-WÓJCIK I., WOJCIECH S.: *Komputerowe modelowanie dynamiki pojazdów samochodowych*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej. Kraków 2003.
- [4] LOZIA Z.: *Analiza ruchu samochodu dwuosiowego na tle modelowania jego dynamiki*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Prace Naukowe, Transport z. 41. (in polish), 1998.
- [5] GEAR C. W.: *Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations*. Circuit Theory, 18, 89-95, 1971.
- [6] AMBROSIO J. A., GONCALVES J. P. C.: *Complex Flexible Multibody Systems with Application to Vehicle Dynamics*. Multibody System Dynamics, Vol.6, Nr 2, 163-182, 2001.
- [7] BLUNDELL M. V.: *The modeling and simulation of vehicle handling. Part 1: analysis method, Part 2: vehicle modelling*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 213, Part K, 103-134, 1999.
- [8] BLUNDELL M. V.: *The modeling and simulation of vehicle handling. Part 3: tyre modelling*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 214, Part K, 1-32, 1999.
- [9] BLUNDELL M. V.: *The modeling and simulation of vehicle handling. Part 4: handling simulation*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 214, Part K, 71-94, 2000.
- [10] HEGAZY S., RAHNEJAT H., HUSSAIN K.: *Multi-Body Dynamics in Full-Vehicle Handling Analysis under Transient Manoeuvre*. Vehicle System Dynamics, 34, 1-24, 2000.
- [11] MEJAARD J. P.: *Application of Runge-Kutta-Rosenbrock Methods to the Analysis of Flexible Multibody Systems*. Multibody System Dynamics, 10, 263-288, 2003.
- [12] NEGRUT D., HAUG E. J., GERMAN H. C.: *An Implicit Runge-Kutta Method for Integration of Differential Algebraic Equations of Multibody Dynamics*. Multibody System Dynamics, 9, 121-142, 2003.
- [13] SANDU A., NEGRUT D., HAUG E. J., POTRA F. A., SANDU C.: *A Rosenbrock-Nystom state space implicit approach for the dynamic analysis of mechanical systems: I – theoretical formulation*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol 215, Part K, Journal of Multibody Dynamics, 263-271, 2003.
- [14] NEGRUT D., SANDU A., HAUG E. J., POTRA F. A., SANDU C.: *A Rosenbrock-Nystom state space implicit approach for the dynamic analysis of mechanical systems: I – theoretical formulation*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol 215, Part K, Journal of Multibody Dynamics, 273-281, 2003.
- [15] DUAN S., ANDERSON K. S.: *Parallel Implementation of Low Order Algorithm for Dynamics of Multibody Systems on a Distributed Memory Computing System*. Engineering with Computers, 16, 96-108, 2000.
- [16] NEGRUT D.: *Linear Algebra Considerations for the Multi-Threaded Simulation of Mechanical Systems*. Multibody System Dynamics, 10, 61-80, 2003.
- [17] RODRIGUEZ J. I., JIMENEZ J. M., FUNES F. J., DE JALON J. G.: *Dynamic Simulation of Multi-Body Systems on Internet Using CORBA, Java and XML*. Multibody System Dynamics, 10, 177-199, 2003.
- [18] CHU T. W., JONES R. P., WHITTAKER L. M. T.: *A System Theoretic Analysis of Automotive Vehicle Dynamics and Control*. Vehicle System Dynamics Supplement 37, 83-95, 2002.
- [19] YU K.K., LUO A. C. J., HE Y.: *Stability and vibration of a non-linear vehicle and passenger system*. Journal of Multi-body Dynamics, Vol. 16, 109-116, 2002.
- [20] WAN Y., SCHIMMELS J. M.: *Improved Vibration Isolating Seat Suspension Designs Based on Position-Dependent Nonlinear Stiffness and Damping Characteristics*. Transactions of ASME, Vol. 125, 330-338, 2003.
- [21] ESMALIZADEH E., GODARZI A., VOSSOUGH G. R.: *Directional stability and control of four-wheel independent drive electric vehicle*. Journal of Multi-Body Dynamics, 303-313, 2002.

- [22] KRUSZEWSKI J., SAWIAK S., WITTBRODT E.: *Metoda sztywnych elementów skończonych w dynamicie konstrukcji*. WNT, Warszawa 1999.
- [23] SZCZOTKA M.: *Modelowanie ruchu pojazdu przy uwzględnieniu różnych układów przeniesienia napędu*. Praca doktorska, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, 2004.
- [24] SZCZOTKA M., WOJCIECH S.: *Model for simulation of vehicle dynamics*, The Archive of Mechanical Engineering, Vol. L, 2003, 4, str. 347-362.
- [25] HARLECKI A.: Metoda analizy dynamicznej mechanicznych układów wieloczłonowych z tarciem suchym w parach kinematycznych, Akademia Techniczno-Humanistyczna w Bielsku-Białej, Rozprawy Naukowe nr 2, Bielsko-Biała, 2002.
- [26] DUGOFF H., FANCHER P. S., SEGEL L.: *An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamics performance*. In: Proceedings FISTA Int. Auto. Safety Conf., SAE Paper 700377, 1970.
- [27] BAKKER E., NYBORG L., PACEJKA H. B.: *Tire Modeling for Use in Vehicle Dynamics Studies*. SAE Paper 870421, 1987.
- [28] ZEGELAAR P. W., PACEJKA H. B.: *The In-Plane Dynamics of Tyres on Uneven Roads*, Proceedings of 13th IAVSD Symposium on the Dynamics of Vehicles on Roads and Tracs, Suppl. Vehicle System Dynamics, 25, 714-730, 1996
- [29] LEGRAS J.: *Praktyczne metody analizy numerycznej*. WNT, Warszawa 1974.
- [30] BARON B., MARCOL A., PAWLIKOWSKI S.: *Metody numeryczne w Delphi 4*. Wydawnictwo HELION, Gliwice 1999.
- [31] PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W. T., FLANNERY B. P.: *Numerical Recipes in C*. Second Edition. Cambridge University Press, 1992.
- [32] WOJCIECH S., SZCZOTKA M.: *Some numerical aspects of solving the equations of vehicle motion*. Proceedings of KONMOT-AUTOPROGRES '2004.

### **Numerical analysis of the dynamic of vehicle: mathematical model and its verification**

#### S u m m a r y

The paper presents the model of small vehicle (of the class A) dynamics. The structural models of suspensions, the steering and drive systems in two versions are presented. The homogenous transformations and joint coordinates as well as Lagrange second order equations were applied in order to derive equations of motion. Special attention was paid to modelling of closed kinematic chains. In the method (based on joint coordinates), that situation takes place, when joint equations have to be formulated. In second part of the paper, some verification of the models and developed computer programm are presented. In the first step direct road measurements were carried out (comparision between calculated and measured accelerations of car elements while passing obstacles are compared). In second step, indirect verification is proposed: adequate model of the vehicle in the MSC.ADAMS environment was developed and another simulations were performed. In both direct and indirect verifications, acceptable correspondence was achieved.