

Zależności na parametry kinematyczne mechanizmu korbowego w nowym ujęciu

RYSZARD MOSAKOWSKI

Katedra Silników Spalinowych i Sprężarek, Politechnika Gdańska

W pracy przedstawiono, w znacznie wygodniejszej postaci niż spotykane dotychczas w literaturze silnikowej, zależności na drogę i przyspieszenie tłoka symetrycznego mechanizmu korbowego, wynikające z rozkładu wyrażenia pierwiastkowego, które spełnia warunki dwumianu Newtona, w szereg potęgowy. Wskazano na konieczność rezygnacji z przybliżonej zależności na drogę tłoka, ale podkreślono jednocześnie potrzebę zachowania uproszczonej zależności na jego przyspieszenie, powstałej przez ograniczenie liczby wyrazów w harmonicznym szeregu potęgowym. Wskazano również na potrzebę poszerzenia zależności na przyspieszenie tłoka w przypadku analizy mechaniki mechanizmów korbowych tkz. silników długoskokowych, w których stosunek długości promienia korby do długości korbowodu osiąga wartości bliskie 0,5. Wyznaczono zależności na względną maksymalną wartość sumy harmonicznych przyspieszeń o rzędzie wyższym od drugiego w funkcji stosunku promienia korby do długości korbowodu.

1. Wstęp

W literaturze książkowej z dziedziny silników spalinowych, na przykład w [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] do opisu kinematyki mechanizmu korbowego umieszcza się początek układu współrzędnych w GMP tłoka. W literaturze z dziedziny mechaniki, np. w [8] początek układu współrzędnych umieszcza się na osi obrotu wału korbowego, dotyczy to również zachodniej, książkowej literatury silnikowej [9, 10]. Na potrzebę takiego usytuowania układu współrzędnych zwraca uwagę autor prac [11, 12].

Takie usytuowanie układu współrzędnych jest szczególnie korzystne jeśli stosuje się rachunek wektorowy do opisu kinematyki mechanizmu korbowego, poza tym upraszcza to nieco zależność na drogę tłoka. Za wyjątkiem zależności na drogę tłoka pozostałe zależności (na prędkość i przyspieszenie) podawane są zwykle w formie uproszczonej w postaci dwóch wyrazów szeregu harmonicznego, powstałego w wyniku rozkładu wyrażenia pierwiastkowego w zależności na drogę tłoka w szereg potęgowy. Bardziej rozwinięte postaci tych zależności, jak np. przedstawione w pracy [1] są stosunkowo złożone i niewygodne w zapisie.

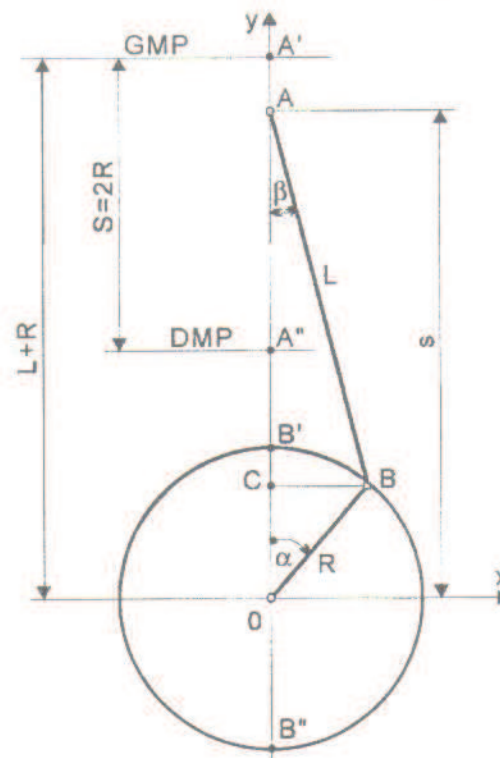
Jednym z celów tej pracy było opracowanie prostszej postaci matematycznej nieskończonego szeregu harmonicznego, stanowiącego dokładną zależność na drogę

łoka oraz wynikających z niej zależności na prędkość i przyspieszenie. Istotnym celem pracy jest również zbadanie potrzeby uwzględniania w uproszczonej zależności na przyspieszenia tłoka składowej czwartego rzędu, zwłaszcza dla silników o dużej wartości stosunku długości promienia korby do długości korbowału i ocena błędów powstałego przez stosowanie zależności ograniczonej do dwóch harmonicznych. Zagadnienie to nabrało szczególnego znaczenia od momentu pojawienia się w okrętownictwie tzw. silników długoskokowych, o stosunku skoku tłoka do średnicy bliskim 4. W silnikach tych stosunek długości promienia korby do długości korbowału wynosi około 0,5.

2. Opis kinematyki mechanizmu korbowego

2.1. Dokładne zależności na drogę, prędkość i przyspieszenie tłoka

Schemat kinematyczny symetrycznego mechanizmu korbowego, powszechnie stosowanego w silnikach spalinowych i sprężarkach tłokowych, pokazano na rys. 1.



Rys. 1. Schemat kinematyczny symetrycznego mechanizmu korbowego

Dokładną zależność na przemieszczenie tłoka w funkcji kąta obrotu wału korbowego, w nieco prostszej postaci niż zamieszczana w literaturze książkowej z dziedziny silników spalinowych przedstawia równanie

$$s = R \left(\cos \alpha + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \right), \quad \lambda = \frac{R}{L} \quad (1)$$

gdzie: s — droga tłoka,

R — promień wykorbienia,

L — długość korbowodu, a dokładniej odległość pomiędzy osią sworznia tłokowego a osią czopa korbowego,

α — kąt obrotu wału korbowego.

Prędkość c i przyspieszenie tłoka b , stanowiąc odpowiednio pierwszą i drugą pochodną wyrażenia (1), przedstawiają następujące zależności:

$$c = -R\omega \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \lambda \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} \right) \quad (2)$$

$$b = \frac{d^2 s}{dt^2} = -R\omega^2 \left[\cos \alpha + \frac{\lambda \cos 2\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{\frac{\lambda^3}{4} \sin^2 2\alpha}{\sqrt{(1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha)^3}} \right] \quad (3)$$

gdzie ω oznacza prędkość kątową wału korbowego a t czas.

Przyspieszenie tłoka jest ważnym parametrem kinematycznym mechanizmu korbowego wykorzystywanym, między innymi, do analizy wyrównoważenia silników.

2.2. Zależności na drogę, prędkość i przyspieszenie tłoka w postaci nieskończonego szeregu harmonicznego

Złożoność i forma zależności (3), wynikające z występowania wyrażenia pierwiastkowego w zależności (1), utrudniają jej praktyczne wykorzystanie do analizy wyrównoważenia silników wielocylindrowych.

Wobec powyższego rezygnuje się z wykorzystania w tym celu zależności (3) a wyrażenie pierwiastkowe w zależności (1) rozkłada się w szereg potęgowy, zgodnie z rozkładem dwumianu Newtona. W rezultacie wyrażenie (1) można zastąpić równoważną zależnością o następującej postaci:

$$s = R \left(\cos \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos 2n\alpha \right) \quad (4)$$

Po wyznaczeniu kolejno pierwszej a następnie drugiej pochodnej zależności (4) wyrażenia na prędkość i przyspieszenie tłoka przyjmą następujące postacie

$$c = -R\omega \left(\sin \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} 2n A_{2n} \sin 2n\alpha \right) \quad (5)$$

$$b = -R\omega^2 \left(\cos \alpha + \sum_{n=0}^{\infty} 4n^2 A_{2n} \cos 2n\alpha \right) \quad (6)$$

przy czym wyrażenia na współczynniki A_{2n} , występujące w wyrażeniach (4), (5) i (6), nieco zmodyfikowane w stosunku do zawartych w [1], przedstawiają następujące zależności:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{64}\lambda^3 - \frac{5}{256}\lambda^5 + \dots \\ A_2 &= \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{16}\lambda^3 + \frac{15}{512}\lambda^5 + \dots \\ A_4 &= -\left(\frac{1}{64}\lambda^3 + \frac{5}{256}\lambda^5 + \dots\right) \\ A_6 &= \frac{1}{512}\lambda^5 + \dots \end{aligned} \right\}$$

Zaproponowana postać zależności (4) i wynikające z niej zależności (5) i (6) są prostsze i wygodniejsze w zapisie niż spotykane w literaturze [1], chociaż są całkowicie równoważne.

2.3. Uprozczone zależności na drogę, prędkość i przyspieszenie tłoka

W praktyce zamiast zależności (4), (5) i (6) stosuje się wzory przybliżone, powstałe w wyniku odrzucenia w wyrażeniach na współczynniki A_{2n} wyrazów zawierających parametr λ w potęgach trzeciej i wyższej. W przypadku takiego uproszczenia zmienia się górna granica sumowania w zależnościach (4), (5) i (6) z $n = \infty$ na $n = 1$, a zależności (7) na współczynniki A_{2n} zostają zredukowane do następujących postaci:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{4}\lambda \\ A_2 &= \frac{1}{4}\lambda \\ \wedge_{n>1} A_{2n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Zależność na drogę tłoka wynikająca z uwzględnienia wyrażen (8) w zależności (4) ma postać jak niżej

$$s = R \left[\frac{1}{\lambda} + \cos \alpha + \frac{\lambda}{4} (\cos 2\alpha - 1) \right] \quad (9)$$

Spotykana powszechnie w literaturze z dziedziny silników spalinowych, na przykład w [2, 3, 4, 5, 6, 7], uproszczona zależność na przemieszczenie tłoka ma nieco inną postać wynikającą z braku bądź innego, mniej wygodnego usytuowania układu współrzędnych.

W związku z szybkim rozwojem technik obliczeniowych zależność ta straciła swoje praktyczne znaczenie [2] i zamiast przybliżonej zależności (9) powinno się stosować dokładną zależność wyrażoną wzorem (1).

W przypadku prędkości i przyspieszenia, zamiast dokładnych wyrażen (5) i (6) stosuje się najczęściej zależności uproszczone przy założeniu, że $n \leq 1$, a mianowicie:

$$c = -R\omega^2(\sin \alpha + 2A_2 \sin 2\alpha) \quad (10)$$

$$b = -R\omega^2(\cos\alpha + 4A_2\cos 2\alpha) \quad (11)$$

W wykorzystując zależność (8), zgodnie z którą $A_2 = 0,25\lambda$, wyrażenia na prędkość i przyspieszenie tłoka przyjmą następujące postacie:

$$c = -R\omega^2(\sin\alpha + 0,5\lambda \sin 2\alpha) \quad (12)$$

$$b = -R\omega^2(\cos\alpha + \lambda \cos 2\alpha) \quad (13)$$

Zależność (13) jest bardzo użyteczna w praktyce i dlatego jest powszechnie stosowana do analizy wyrównoważenia silników spalinowych i sprzężarek tłokowych. Zależność ta bowiem daje identyczne wyniki jak uzyskane z dokładnych zależności (8) w skrajnych położeniach tłoka, czyli przy tych położeniach wału korbowego, przy których dokładność obliczeń przyspieszeń tłoka ma istotne znaczenie praktyczne.

Od połowy lat 80. dwie największe firmy zajmujące się produkcją silników okrętowych Sulzer (obecnie Wärtsilä) i Burmeister & Wain włączyły do zakresu swojej produkcji tzw. silniki długoskokowe, charakteryzujące się dużym stosunkiem skoku tłoka do średnicy, w których parametr λ osiąga wartości bliskie 0,5. W celu badania wpływu wartości parametru mechanizmu korbowego λ na względną maksymalną wartość sumy harmonicznych przyspieszenia od czwartego rzędu wzwyż, odrzuconych w zależności (13), wprowadzono zależność:

$$\Delta b^* = -R\omega^2 \frac{\lambda}{1+\lambda} \left[\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \alpha}} + \frac{\frac{\lambda^2}{4} \sin^2 2\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2 \sin^2 \alpha}} - \cos 2\alpha \right] \quad (14)$$

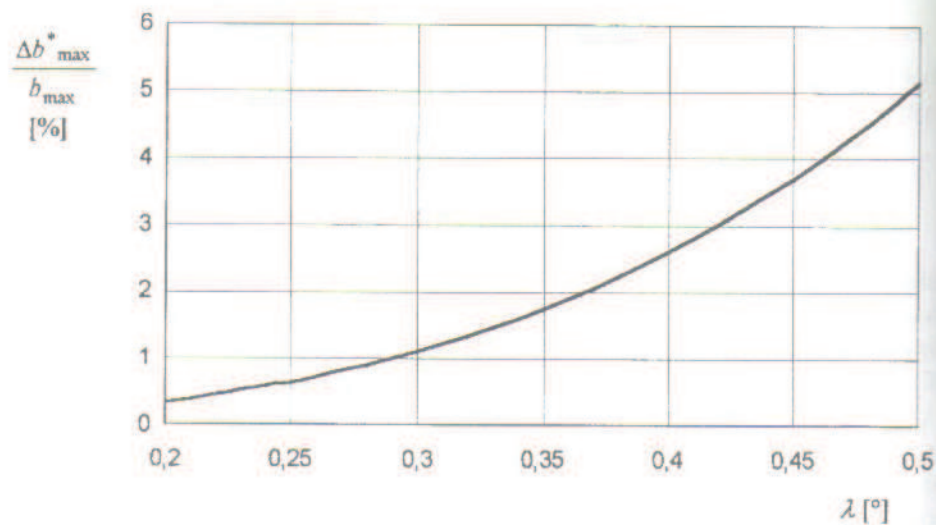
Wyrażenie (15) osiąga bezwzględne ekstremum dla kątów α wynikających z poniższej zależności:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi. \quad (15)$$

Po uwzględnieniu w zależności (14) zależności (15), i podzieleniu przez b_{\max} otrzymamy:

$$\frac{\Delta b_{\max}^*}{b_{\max}} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1 \right) \quad (16)$$

Wyniki obliczeń wartości przyspieszenia $\Delta b_{\max}^*/b_{\max}$ na podstawie zależności (16), przedstawiono graficznie na rys. 2. Jak wynika z przebiegu krzywej na rys. 2, dla wartości λ spotykanych we współczesnych silnikach samochodowych, błąd przy obliczaniu przyspieszeń tłoka na podstawie zależności (13), zamiast na podstawie zależności (3), jest stosunkowo niewielki i nieznacznie przekracza 1% dla $\lambda=0,3$. Jednak błąd ten szybko rośnie wraz ze wzrostem λ przekraczając 5% dla $\lambda=0,5$. Zależność (13) jest więc mało dokładna dla tak dużych wartości λ . Wobec powyż-



Rys. 2. Zależność względnej maksymalnej wartości sumy harmonicznego przyspieszenia od parametru mechanizmu korbowego λ

szego, gdy parametr λ przyjmuje duże wartości, bądź gdy wymagana jest większa dokładność obliczeń należy w wyrażeniach na współczynniki A_{2n} w zależności (7) odrzucić wyrazy zawierające λ w potęgach piątej i wyższych. Przy takim uproszczeniu zmieni się górna granica sumowania w zależności (6) z $n = \infty$ na $n = 2$ a zależność (7) zostanie zredukowana do postaci

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{4}\lambda - \frac{3}{64}\lambda^3 \\ A_2 &= \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{16}\lambda^3 \\ A_4 &= -\frac{1}{64}\lambda^3 \\ \wedge_{n>2} A_{2n} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Uwzględniając w zależności (6) wyrażenia na współczynniki A_{2n} ujęte zależnością (17) otrzymamy następującą postać zależności na przyspieszenie tłka:

$$b = R\omega^2 \left[\cos\alpha + \left(\lambda + \frac{1}{4}\lambda^3 \right) \cos 2\alpha - \frac{1}{4}\lambda^3 \cos 4\alpha \right] \quad (18)$$

Zależność (18) posiada podobną własność, jak zależność (13), tzn. daje dokładne wyniki w skrajnych położeniach tłka, czyli przy tych położeniach wału korbowego, przy których wyniki obliczeń mają istotne znaczenie praktyczne.

3. Uwagi końcowe i wnioski

W związku z rozwojem technik komputerowych uproszczone zależności na drogę przemieszczenia tłoka straciły obecnie swoje praktyczne znaczenie. Uproszczona zależność na przyspieszenie tłoka jest jednak wciąż aktualna i niezbędna do analizy wyrównania sił bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym. Dla zapewnienia odpowiedniej dokładności obliczeń sił bezwładności w tzw. silnikach długoskokowych niezbędne jest jednak zmodyfikowanie tej zależności, poprzez uwzględnienie w niej składnika zawierającego harmoniczną czwartego rzędu. Wprowadzone w pracy zależności na drogę, prędkość i przyspieszenie tłoka w postaci nieskończonego szeregu harmonicznego mają prostszą i wygodniejszą w zapisie postać niż spotykana dotychczas w literaturze silnikowej.

Literatura

- [1] BOCHEWICKI J.: *Mechanika układów korbowych silników samochodowych*. WKŁ, Warszawa 1972.
- [2] KOWALOWSKI K.: *Tłokowe silniki spalinowe*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1983.
- [3] BEHNHARDT M., DOBRZYŃSKI S., LOTH E.: *Silniki samochodowe*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1978.
- [4] WAGAN J.A., WAJAND G.T.: *Tłokowe silniki spalinowe średnio i szybkoobrotowe*. WNT, Warszawa 1993.
- [5] WAGAN J.A.: *Mikrokomputerowe obliczanie silnika spalinowego*. WNT, Warszawa 1990.
- [6] POPPEL K.G.: *Dynamika awtomobilnych i traktornych dwigatelej*. Izdatelstwo Wyszaja Szkoła, Moskwa 1976.
- [7] CZYŻAKOW W.K.: *Dynamika porszniewych i kombinirowanych dwigatelej wnutriennowo sgorania*. Maszynostrojnie, Moskwa 1989.
- [8] LEVKO J.: *Mechanika ogólna*. PWN, Warszawa 1996.
- [9] STONE R.: *Introduction to Internal Combustion Engines*, Society of Automotive Engineers, Warrendale, USA, 1995.
- [10] GOCOSA D.: *Motori endotermici*. Italian Hoepli, Milano 1990.
- [11] CICHY M.: *Mechanika układu korbowego w ujęciu wektorowym* (Opis programów komputerowych). Praca wykonana w ramach projektu KBN nr 7 044 9102.
- [12] CICHY M., NASO V.: *A New Approach to the Calculations of Inertia Forces in the Crank Mechanism*, Proceedings of 7th International Conference on Stirling Cycle Machines, November 5–8, 1995, Waseda University, Tokyo.

New form of relations for calculating kinematic parameters of crank mechanism

Summary

Accurate relations (1), (2) and (3) for determining the travel, velocity and acceleration of the piston in a symmetrical crank mechanism are given in the paper. Owing to placing the cartesian co-ordinates system in axes of the crankshaft rotation the relation (1) has somewhat simpler form than one met in the relevant literature.

The relations for determining the above mentioned parameters, following from the expanding the square root expression of the Newton binomial type into the power series, are also presented in the paper [relations (4), (5) and (6)]. Their form, however is simpler and more convenient in notation than those used in text books on internal combustion engines.

Relations (7) for calculating coefficients A_n have been modified in comparison with those presented in [1]. The necessity of abandoning the approximate relation for piston travel calculation have been

underlined, and instead using accurate relation (1) recommended. The simplified relation (14) for determining piston acceleration is very useful and should be preserved for calculating and analysing inertia forces in to-and-fro motion.

The introduction, however, in 80 in shipbuilding industry of super long-stroke engines with the ratio between the stroke and bore of the piston close to 4, and the ratio between the crank radius and connecting rod length $\lambda \approx 0.5$ necessitates introduction of some modifications to relation (14). As it follows from relation (17) illustrated graphically in Fig. 2 the total maximum relative value of the acceleration components neglected in relation (14) for $\lambda > 0.5$ exceeds 5% and rises quickly with λ increase. Therefore, in such applications, or when higher accuracy of calculating piston acceleration is required it is recommended to use relation (19) instead of (14). The relation (19) was derived by neglecting in relations (7) components with λ having powers 5 and bigger, reducing that way relations (7) for coefficients A_{2n} to the form of relation (18).