

Wyznaczanie torów jazdy przyczep i pociągów drogowych

TADEUSZ MŁYNARSKI*, WITOLD TRZASKA**

*Politechnika Łódzka

**Politechnika Krakowska

W opracowaniu przedstawiono pewien sposób wyznaczania toru ruchu ciągniętych przyczep i pociągów drogowych. Przedstawiono zależności dla przypadku kiedy tor przegubu łączącego pojazd z przyczepą opisany jest dowolną krzywą. Omówiono trzy przypadki szczególnie kiedy tor przegubu łączącego ciągnik z przyczepą opisany jest sinusoidą, linią prostą oraz okręgiem.

1. Wstęp

Do transportu sprzętu i materiałów budowlanych używa się często przyczep ciągniętych i pociągów drogowych. Pojazdom tym na terenach budów należy zapewnić bezpieczne warunki eksploatacji. Wiąże się to z właściwym zaprojektowaniem skrzyżowań oraz dróg wewnętrznych, a także z określeniem optymalnej ich szerokości (szerokości pasa ruchu). Dlatego też niezbędna staje się znajomość torów po jakich poruszać się będą obrysowe punkty przyczepy i ciągników przy wykonywaniu powolnych skrętów. Zadanie dotyczące określenia równania linii po której porusza się ważki punkt ciągniony w płaszczyźnie poziomej i umocowany do końca napiętej nici, której drugi koniec porusza się po dowolnej prostej na tej płaszczyźnie, jako pierwszy sformułował w końcu XVII wieku Perrault. Problemem tym zajmował się Leibnitz, a następnie jego uogólnieniem zajął się Huygens wprowadzając dowolną krzywą zamiast prostej po której miał poruszać się drugi koniec nici. Tory opisywane przez ważki punkt zwane były „liniami trakcyjnymi” (tractrix). Rozwiązanie tego problemu w zastosowaniach praktycznych przez całe stulecie było trudne. Do wyznaczenia torów zostały opracowane metody graficzne (Kleritja i Heya, Haltera, Neuendorffa, Schrödera, Haina) [1]. Jedną z wygodniejszych w użyciu metoda Haina [2] opublikowana w 1952 roku, dowolną linię podstawową zastępowała odcinkami prostych lub łukami okręgów. Następnie wyznaczano graficznie linię trakcyjną wykonując niezbędne obliczenia przy wykorzystaniu trzech specjalnych wykresów.

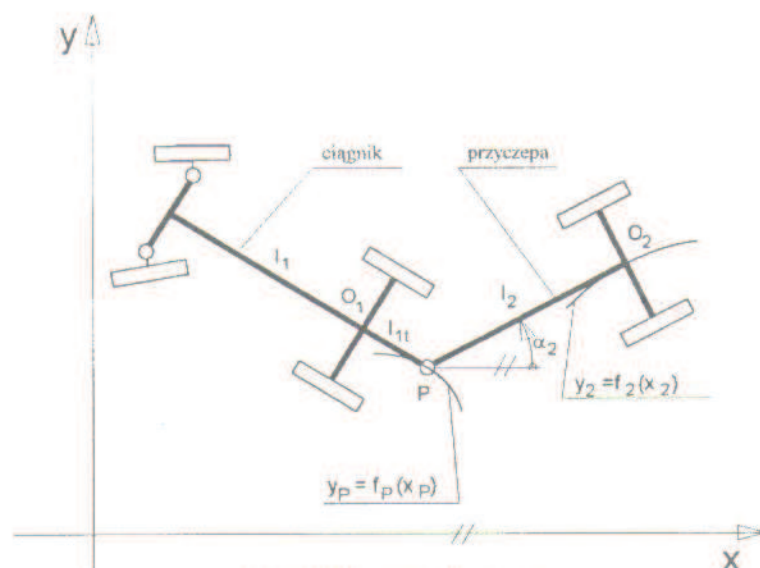
Dopiero rozwój metod numerycznych i komputeryzacji sprawił, że zagadnienie wyznaczania linii trakcyjnych stało się proste. Łatwość całkowania równań różniczkowych i ich układów spowodowało bardzo dynamiczny rozwój teorii ruchu pojazdów. Powstało wiele różnych opracowań i modeli służących do analizy oraz symulacji ruchu [3]. Stopień złożoności tych modeli jest dosyć różnorodny w zależności od liczby uwzględnionych czynników. Przy najbardziej złożonych dynamicznych

modelach (składających się tylko z jednego dwuosiowego, czterokołowego pojazdu), ruch układu opisany jest przez kilkadziesiąt równań różniczkowych z czego część jest nieliniowa np. model V. Berkefelda opisany jest układem 47 równań różniczkowych rzędu drugiego i 4 rzędu pierwszego. Takie rozbudowanie modelu wymaga dokładnej znajomości parametrów i charakterystyk poszczególnych elementów układu (bardzo często nieliniowych). Jeśli nie dysponujemy danymi to nawet najlepsze układy równań o wysokim stopniu złożoności mogą doprowadzić nas do powstawania dużych błędów, a komplikacja modelu daje wręcz odwrotne skutki. W wielu sytuacjach do oszacowania toru ruchu zwłaszcza w przypadku ruchów manewrowych przebiegających z małymi prędkościami celowym wydaje się posłużenie prostymi kinematycznymi zależnościami. Problem wyznaczenia torów ruchu pojazdów przegubowych, przyczep ciągniowych czy pociągów drogowych jest szczególnie istotny dla określenia ich manewrowości oraz takich parametrów ruchu jak: minimalny promień skrętu, szerokość pasa ruchu czy wielkość zachodzenia [4], [5], [6].

2. Wyznaczanie torów jazdy przyczep

Do wyznaczenia toru ruchu przyczepy przyjęto następujące założenia upraszczające:

- ruch odbywa się z małymi prędkościami (do 1 m/s) na poziomej płaszczyźnie, pominięto siły dynamiczne,
- nie występuje poślizg kół jezdnych,
- przyjęto że koła jezdne oraz układ zawieszenia są sztywne (pominięto wpływ kątów zniosu kół ogumionych [7]),
- nie uwzględniono uwarunkowań siłowych,



Rys. 1. Schemat obliczeniowy
Fig. 1. Computational scheme

• przyjęto, że znany jest tor przegubu łączącego ciągnik z przyczepą, założenie to sprawia, że ciągnik może posiadać dowolną kinematykę skrętu, jedynym wymogiem jest realizowalność zadanego toru.

Na rys. 1 przedstawiono schemat obliczeniowy na którym zaznaczono podstawowe wielkości geometryczne. Jakkolwiek na rysunku znajduje się ciągnik kołowy to układ może się składać z dowolnego ciągnika i jednoosiowej przyczepy.

Dla danego dowolnego realizowalnego toru przegubu (P) łączącego jednoosiową przyczepę z ciągnikiem opisanego funkcją: $y_P = f_P(x_P)$ oraz warunków początkowych: dla $x_P = x_{P\text{pocz}}$, $\alpha_2 = \alpha_{2\text{pocz}}$ poszukujemy toru punktu O_2 opisanego równaniem $y_2 = f_2(x_2)$.

Z warunku więzów wynika że:

$$y_2 = y_P + l_2 \cdot \sin \alpha_2 \quad (1)$$

$$x_2 = x_P + l_2 \cdot \cos \alpha_2$$

z warunku aby oś wzdłużna przyczepy była styczna do krzywej $y_2 = f_2(x_2)$ można napisać:

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \operatorname{tg} \alpha_2 \quad (2)$$

Po zróżniczkowaniu po czasie zależności (1) otrzymano:

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{dy_P}{dx_P} \cdot \frac{dx_P}{dt} + l_2 \cdot \frac{d\alpha_2}{dt} \cdot \cos \alpha_2 \quad (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_P}{dt} - l_2 \cdot \frac{d\alpha_2}{dt} \cdot \sin \alpha_2$$

Po podzieleniu stronami zależności (3) i wykorzystaniu zależności (2) oraz po przekształceniach otrzymano:

$$\frac{d\alpha_2}{dx_P} = -\frac{1}{l_2} \left(\frac{dy_P}{dx_P} \cdot \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2 \right) \quad (4)$$

Równanie różniczkowe (4) możemy całkować numerycznie przy zadanych warunkach początkowych. W wyniku czego można otrzymać funkcję $\alpha_2 = f(x_P)$ w postaci dyskretnej. Następnie znając $y_P = f_P(x_P)$ wyznaczamy y_2 i x_2 z zależności (1).

3. Przypadki szczególne

3.1. Tor przegubu (P) jest sinusoidą opisaną równaniem (5)

$$y_P = A \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} x_P \right) \quad (5)$$

gdzie: A – amplituda, λ – okres

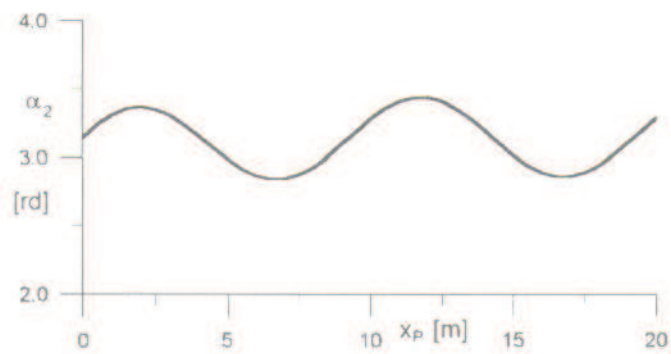
wówczas:

$$\frac{dy_P}{dx_P} = \frac{2A\pi}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x_P\right) \quad (6)$$

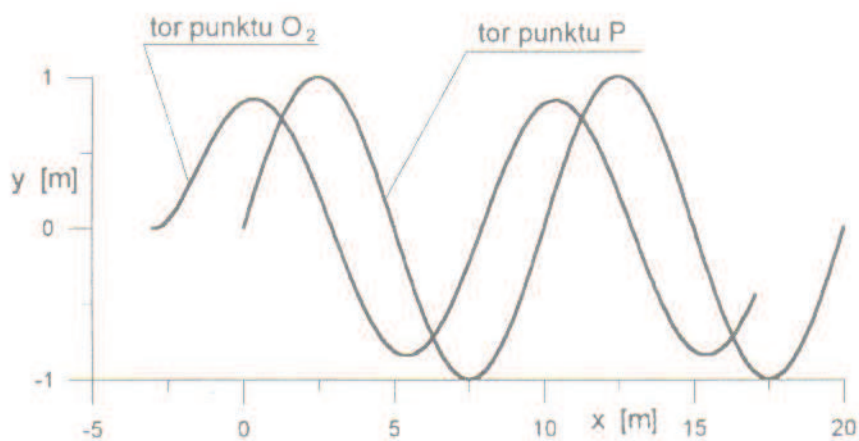
a po podstawieniu zależności (6) do (4) otrzymano:

$$\frac{d\alpha_2}{dx_P} = -\frac{1}{l_2} \left[\frac{2\pi A}{\lambda} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x_P\right) \cdot \cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_2) \right] \quad (7)$$

Na rys. 2 przedstawiono zależność kąta α_2 od x_P dla danych $A=1$ m; $\lambda=10$ m, $l_2=3$ m oraz warunków początkowych $x_{P\text{pocz}}=0$, $\alpha_{2\text{pocz}}=\pi$. Na rys. 3 przedstawiono natomiast torzy punktów O_2 i P .



Rys. 2. Zależność $\alpha_2 = f(x_P)$
Fig. 2. Relationship $\alpha_2 = f(x_P)$



Rys. 3. Tory punktów O_2 i P
Fig. 3. Trajectories of the points O_2 and P

3.2. Tor punktu P jest linią prostą opisaną równaniem (8)

$$y_P = 0 \quad (8)$$

Odpowiada to przemieszczaniu się przegubu łączącego ciągnik z przyczepą wzdłuż osi odciętych. Wówczas:

$$\frac{dy_P}{dx_P} = 0 \quad (9)$$

a po podstawieniu zależności (9) do (4) można napisać:

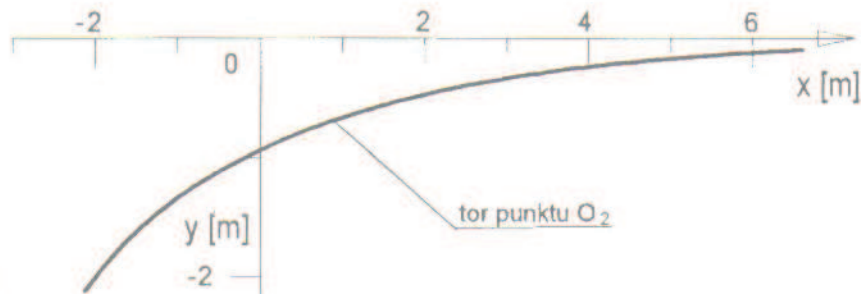
$$\frac{d\alpha_2}{dx_P} = \frac{\sin(\alpha_2)}{l_2} \quad (10)$$

po rozdzieleniu zmiennych i przyjęciu warunków początkowych dla $x_{P\text{pocz}} = 0$, $\alpha_{2\text{pocz}} = 1,25\pi$ otrzymano rozwiązanie:

$$\alpha_2 = 2\pi - 2\text{arctg} \left[e^{\left(\frac{x_P}{l_2} + \ln \left| \lg \frac{\alpha_{2\text{pocz}}}{2} \right| \right)} \right] \quad (11)$$

dla $x_P \rightarrow \infty$, $\alpha_2 \rightarrow \pi$ a więc tor punktu O_2 asymptotycznie zmierza do linii prostej. Współrzędne punktu O_2 opisane są zależnością:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_P + l_2 \cdot \cos\alpha_2 \\ y_2 &= l_2 \cdot \sin\alpha_2 \end{aligned} \quad (12)$$

Rys. 4. Tor punktu O_2 ($l_2 = 3$ m)Fig. 4. Trajectory of the point O_2 ($l_2 = 3$ m)3.3. Punkt P porusza się po okręgu o promieniu R_P .

Tor przegubu (P) po przyjęciu początku układu współrzędnych w środku okręgu (rys. 5) można opisać za pomocą następujących zależności:

$$\begin{aligned} y_P &= R_P \cdot \sin\alpha_1 \\ x_P &= R_P \cdot \cos\alpha_1 \end{aligned} \quad (13)$$

wówczas:

$$y_P = \sqrt{R_P^2 - x_P^2} \quad (14)$$

po zróżniczkowaniu:

$$\frac{dy_P}{dx_P} = \frac{-x_P}{\sqrt{R_P^2 - x_P^2}} \quad (15)$$

po podstawieniu (15) do (4) otrzymamy:

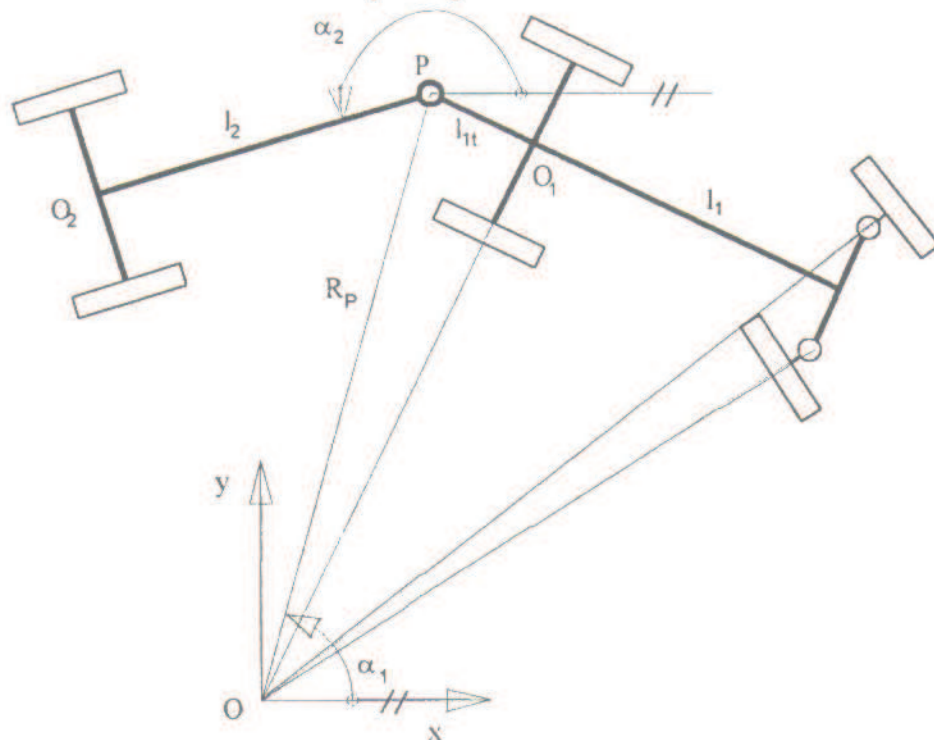
$$\frac{d\alpha_2}{dx_P} = -\frac{1}{l_2} \left(\frac{-x_P}{\sqrt{R_P^2 - x_P^2}} \cdot \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \right) \quad (16)$$

po zróżniczkowaniu po czasie zależności na x_P otrzymano:

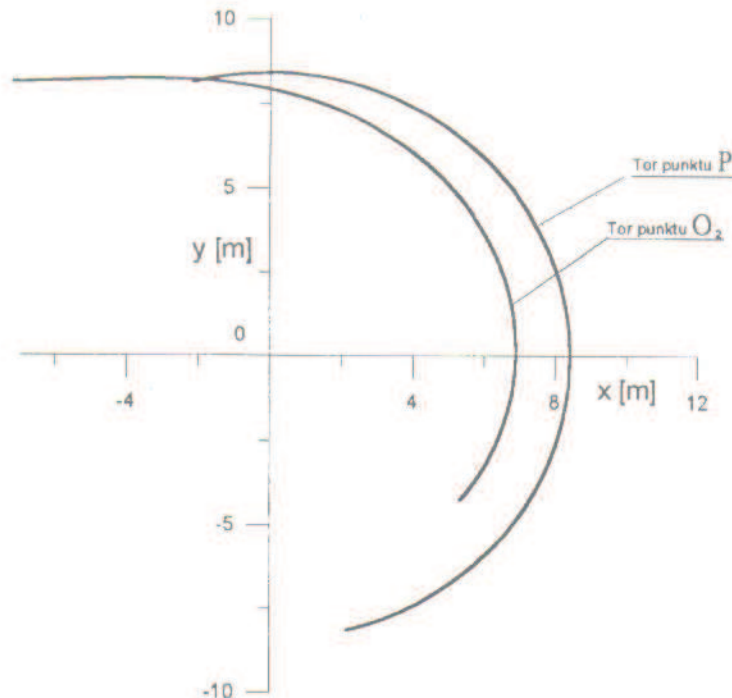
$$\frac{dx_P}{dt} = -R_P \cdot \sin\alpha_1 \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} \quad (17)$$

podstawiając (13) i (17) do (16) można otrzymać zależność kąta α_2 do α_1 opisaną następującym równaniem różniczkowym:

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = -\frac{R_P}{l_2} \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (18)$$



Rys. 5. Schemat obliczeniowy dla przypadku poruszania się przegubu (P)
 Fig. 5. Computational scheme for case of the circumferential movement of the joint (P)



Rys. 6. Tor punktu P i O_2 dla danych $l_2 = 5$ m; $R_p = 8,4$ m; $\alpha_{1pocz} = \pi/2$, $\alpha_{2pocz} = \pi$

Fig. 6. Trajectory of the points P and O_2 for the data; $l_2 = 5$ m; $R_p = 8,4$ m, $\alpha_{1pocz} = \pi/2$, $\alpha_{2pocz} = \pi$

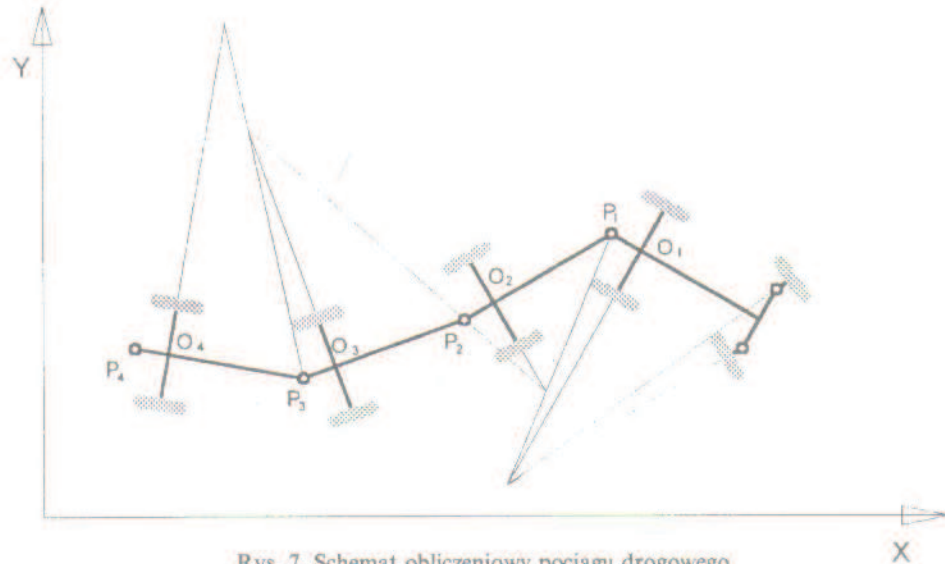
Na rys. 6 przedstawiono tor punktu O_2 w przypadku poruszania się przegubu (P) po okręgu.

4. Wyznaczanie torów jazdy pociągów drogowych

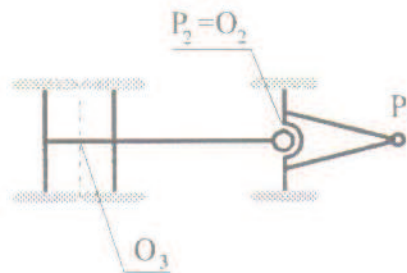
Na rys. 7 przedstawiono pociąg drogowy składający się z ciągnika i trzech przyczep jednoosiowych. Założono że znany jest tor przegubu P_1 . W szczególnym przypadku tor ten może odpowiadać poruszaniu się z minimalnym promieniem skrętu.

Przy znanym torze punktu P_1 korzystając z wyprowadzonych powyżej zależności wyznaczamy tor punktu O_2 . Znając położenie dwóch punktów bryły sztywnej poruszającej się ruchem płaskim można wyznaczyć położenie dowolnych innych punktów tej bryły. Możemy więc wyznaczyć położenie przegubu P_2 oraz położenie dowolnych charakterystycznych punktów obrysowych przyczepy. Następnie wyznaczamy tor punktu O_3 itd. Oczywiście bezsporne jest narastanie błędu w wyznaczeniu położenia dla każdej kolejnej przyczepy.

Przedstawiony sposób postępowania może być również wykorzystany dla przyczep dwuosiowych z obrotnicą oraz przyczep wieloosiowych. Dla dwuosiowych przyczep z obrotnicą wystarczy przyjęcie, że przegub pokrywa się z położeniem środka osi (np. $P_2 = O_2$), natomiast dla przyczep wieloosiowych konieczne są pewne założenia upraszczające (rys. 8).



Rys. 7. Schemat obliczeniowy pociągu drogowego
Fig. 7. Computational scheme of the trailer-truck



Rys. 8. Schemat przyczepy 3 osiowej
Fig. 8. Scheme of the three-axes trailer

5. Podsumowanie

1. Metoda wyznaczania torów jazdy przyczep z wykorzystaniem kinematycznych zależności nie daje dokładnej odpowiedzi jaka jest rzeczywista ich trajektoria, co wiąże się głównie z pominięciem uwarunkowań siłowych oraz nie uwzględnieniem kątów zniosu kół ogumionych. Umożliwia nam jednak poprzez zastosowanie przejścia granicznego ocenę poprawności modeli dynamicznych (dla sztywności poszczególnych elementów dążących do nieskończoności, przy braku poślizgu toru punktów powinny dążyć do torów wyliczonych metodą kinematyczną).

2. Zaproponowany sposób wyznaczenia torów został zweryfikowany przez badania obiektów rzeczywistych (autobusów przegubowych). Dla małych prędkości ruchu obliczane toro wybranych punktów nadwozia miały odchylenia około 10% od torów rzeczywistych.

3. Ten prosty sposób określania torów jazdy przyczep umożliwia nam oszacowanie parametrów ruchu takich jak szerokość pasa ruchu i zachodzenie co ma duże znaczenie przy projektowaniu nowych konstrukcji pojazdów oraz podnoszenia bezpieczeństwa ruchu drogowego.

4. Metoda kinematyczna umożliwia określenie wymaganych parametrów dróg dojazdowych dla wielkogabarytowych pociągów drogowych. Ze względu na bezpieczeństwo ruchu zaleca się powiększenie wyliczonej w powyższy sposób wymaganej szerokości pasa ruchu o 10–20%.

5. Otrzymane zależności są na tyle proste, że można je wykorzystać bez specjalistycznego oprogramowania, a zależności opisujące tor punktu O_2 dla jazdy prostoliniowej pojazdu są w postaci jawnej.

6. Podobnie jak w metodzie Haina dowolny tor przegubu (P) można rozłożyć na odcinki prostych lub łuki i obliczenia toru punktu O_2 wykonać w sposób przybliżony.

Praca wpłynęła do Redakcji 1998.02.09

Literatura

- [1] K. SZYMAŃSKI: *Zagadnienie skrętu pociągu drogowego*, Technika Motoryzacyjna, z. 8, 10, 12, 1961, str. 255–257, 350–353, 423–427.
- [2] K. HAIN: *Schleppkurvenbestimmung mit Hilfe von Kurventafeln*, Automobiltechnische Zeitschrift t. 54, 1952, str. 248–251.
- [3] J. STRUSKI: *Quasi-statyczne modelowanie sterowności samochodu*, Politechnika Krakowska, Monografia nr 144, Kraków 1993, str. 17–24.
- [4] T. MLYNARSKI, A. LISTWAN, G. TORA: *A description of the Phenomenon of Articulated Bus Overlap During Different Manoeuvres*, The paper of XVIII Meeting of Bus and Coach Experts. Budapest 1987, str. 285–291.
- [5] A. LISTWAN, T. MLYNARSKI, *Analiza ruchu tylnych członów autobusów przegubowych w aspekcie wypadków drogowych*. Materiały Konferencji „Problemy rekonstrukcji wypadków drogowych” Kraków 1985, str. 118–124.
- [6] T. MLYNARSKI, A. LISTWAN, S. SZŁĘZAK: *Analiza porównawcza zjawiska zachodzenia eksploatowanych autobusów przegubowych*. Materiały IV Międzynarodowej Konferencji „Badania symulacyjne w technice samochodowej” Lublin 1993, str. 197–202.
- [7] H. DAJNIAK: *Ciągniki. Teoria ruchu i konstruowanie*. WKiŁ, Warszawa 1985, str. 68–70, 690.

Determining the trailers' and trailertrucks' trajectories

Summary

The paper presents a method for finding the trajectories of trailers and trailertrucks. The relationships were derived for the case when the trajectory of the joint connecting the truck with the vehicle is described with a curve. Three specific cases were discussed, that is when the trajectory of the connecting joint is described as a sinusoidal, straight line or as a circle. Although the method does not allow to exactly determine the real trailer paths since the drift angles are not considered, still it possible to evaluate such parameters as the width of the traffic lane and the overlap. The authors recommend that thus computed minimal width of the traffic lane should be increased by 10–20% when the inner roads on the construction sites are designed. The method presented here was verified during the testing of the articulated buses.