

Uwagi na temat graficznej metody analizy wyrównoważenia wielocylindrowych silników rzędowych

RYSZARD MOSAKOWSKI

Katedra Silników Spalinowych i Sprężarek, Politechnika Gdańska

W pracy przedstawiono graficzne uzasadnienie na płaszczyźnie liczb zespolonych, na przykładzie silnika dwucylindrowego, słuszności metodyki analizy działania sił bezwładności w ruchu prostoliniowym postępowo-zwrotnym za pomocą zastępczych wektorów wirujących, przyczepionych do osi wału korbowego. Wskazano na błędy w tym zakresie spotykane w literaturze z dziedziny silników spalinowych, w postaci niezgodności z zasadami stosowanymi w matematyce i mechanice technicznej, przy jednoczesnym braku zaznaczania tych niezgodności. Przedstawioną w pracy metodykę analizy graficznej wyrównoważenia wielocylindrowych silników rzędowych, za pomocą zastępczych wektorów wirujących, całkowicie zgodną z zasadami mechaniki, zobrazowano na przykładzie silnika trzycylindrowego. Wskazano na łatwość wyprowadzenia tą drogą zależności na wartości wypadkowych momentów od sił bezwładności w ruchu prostoliniowym postępowo-zwrotnym i obrotowym.

1. Wstęp

Jednym ze słabszych punktów w koncepcji klasycznego tłokowego silnika spalinowego jest jego mechanizm korbowy, służący do zamiany ruchu prostoliniowego postępowo-zwrotnego tłoka na ruch obrotowy wału korbowego. W mechanizmie korbowym bowiem, oprócz sił bezwładności w ruchu obrotowym, generowane są również siły bezwładności w ruchu prostoliniowym postępowo-zwrotnym, pochodzące od mas zespołu tłoka oraz w ruchu złożonym korbowodu, w którym ponadto każda cząsteczka masy korbowodu porusza się po innym torze i doznaje innego przyspieszenia. Siły te, jak i powstałe od nich momenty, trudno jest niekiedy całkowicie wyrównoważyć.

Stąd liczne próby poszukiwania innych rozwiązań, w celu wyeliminowania klasycznego mechanizmu korbowego. Najbardziej znanym przykładem takich poszukiwań jest silnik Wankla z tłokami wirującymi, który jednak z wielu przyczyn nie zdołał zastąpić klasycznego silnika spalinowego.

Wyrównoważenie silników spalinowych można osiągnąć następującymi sposobami:

- przez przyjęcie odpowiedniego układu cylindrów oraz takiej konfiguracji wału korbowego („gwiazdy” korb), aby siły bezwładności oraz momenty od tych sił równoważyły się wzajemnie;

- przyłożenie za pomocą przeciwmas dodatkowych sił o modułach równych modułom sił wyrównoważanych o tych samych kierunkach, lecz o przeciwnych zwrotach,
- przyłożenie za pomocą przeciwmas dodatkowych momentów o modułach równych modułom momentów wyrównoważanych lecz o przeciwnych kierunkach.

Często te dwa pierwsze sposoby są stosowane jednocześnie. Jest zrozumiałe, że pierwszy sposób, który służy do wyrównoważenia zewnętrznego, bądź zmniejszenia stopnia zewnętrznego niewyrównoważenia, może być stosowany wyłącznie w silnikach wielocylindrowych.

Do analizy różnych konfiguracji wałów korbowych wielocylindrowych silników rzędowych pod kątem ich zewnętrznego wyrównoważenia, obok metod algebraicznych, bez lub z wykorzystaniem technik komputerowych, stosowana jest również metoda graficzna [2, 3]. Istnieje jednak pewna luka w metodzie graficznej, polegająca na braku teoretycznego uzasadnienia jej słuszności. Według tej metody analizę wyrównoważenia sił bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym prowadzi się za pomocą zastępczych (fikcyjnych) wektorów wirujących przyczepionych do osi obrotu wału korbowego, których składowe na kierunku osi cylindra są równe wektorom rzeczywistych sił bezwładności. Pomija się przy tym składowe wektorów zastępczych na kierunku prostopadłym do płaszczyzny przesuniętej przez osie cylindrów. Również sposób stosowania tej metody w polskiej literaturze z dziedziny silników spalinowych wzbudza zastrzeżenia natury formalnej, zwłaszcza z dydaktycznego punktu widzenia, ze względu na odstępstwa od zasad stosowanych w mechanice.

Zatem zasadniczym celem niniejszej pracy jest praktyczne uzasadnienie słuszności metody wektorowej w dziedzinie liczb zespolonych na przykładzie silnika dwucylindrowego, wskazanie na nieprawidłowości w praktycznym jej stosowaniu, spotykane w literaturze silnikowej, jak również podanie przykładu prawidłowego jej stosowania na płaszczyźnie liczb rzeczywistych, przy pełnym respektowaniu zasad stosowanych w mechanice.

2. Metoda zastępczych wektorów wirujących w analizie wyrównoważenia sił bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym

2.1. Interpretacje metody na płaszczyźnie zespolonej

W literaturze z dziedziny silników spalinowych [2 ÷ 9] do obliczania przyspieszeń tłoka w ruchu postępowo-zwrotnym stosuje się zależność uproszczoną, powstałą w wyniku rozkładu wyrażenia pierwiastkowego w zależności na drogę tłoka w szereg potęgowy. Zależność ta ograniczona do dwóch harmonicznych ma postać:

$$b = -R\omega^2(\cos\alpha + \lambda\cos 2\alpha) \quad (1)$$

Znak minus po prawej stronie zależności (1) wynika z usytuowania początku układu współrzędnych w osi obrotu wału korbowego. Wzór na przyspieszenie tłoka

Wyrównowazuje się do obliczania wartości sił bezwładności od mas poruszających się ruchem postępowo-zwrotnym zgodnie z zależnością

$$P_b = m_p R \omega^2 (\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha) \quad (2)$$

gdzie m_p oznacza masę elementów mechanizmu korbowego poruszających się ruchem postępowo-zwrotnym.

Dla ułatwienia analizy działania sił bezwładności przyjmuje się, że wektor P_b jest sumą dwóch wektorów jak niżej:

$$P_b = P'_b + P''_b \quad (3)$$

których wartości określają zależności:

$$\left. \begin{aligned} P'_b &= m_p R \omega^2 \cos \alpha \\ P''_b &= m_p R \omega^2 \lambda \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

gdzie P'_b — wektor siły bezwładności pierwszego rzędu,

P''_b — wektor siły bezwładności drugiego rzędu.

Ponad siłami bezwładności od mas poruszających się ruchem postępowo-zwrotnym, w mechanizmie korbowym działają również siły bezwładności od mas w ruchu obrotowym P_o , których wartości oblicza się na podstawie poniższej zależności:

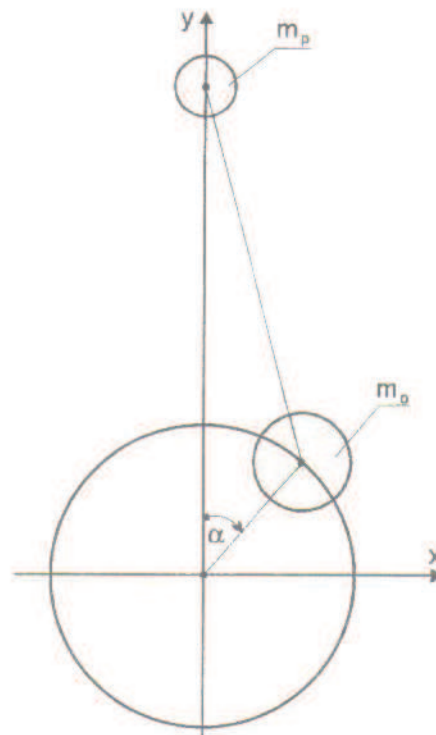
$$P_o = m_o R \omega^2 \quad (5)$$

gdzie m_o — oznacza masę poruszającą się w ruchu obrotowym.

W celu ułatwienia analizy wyrównowazania silnika jego mechanizm korbowy zastępuje się układem dwumasowym (rys. 1), w którym masa m_p porusza się w ruchu prostoliniowym postępowo-zwrotnym wzdłuż osi cylindra, a masa m_o porusza się ruchem obrotowym po torze o promieniu R . Sposób redukcji mas mechanizmu korbowego do układu dwumasowego jest szczegółowo opisany w literaturze, między innymi w [1].

Podczas analizy mechanizmów korbowych wielocylindrowych silników rzędowych, pod kątem ich zewnętrznego wyrównowazania i wyboru najlepszej konfiguracji wału korbowego, spośród wszystkich konfiguracji możliwych teoretycznie, stosuje się różne metody, w tym wykorzystujące rachunek wektorowy. Bardzo użyteczną jest metoda graficzna polegająca na analizie oddziaływania sił bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym, przy wykorzystaniu zastępczych wektorów wirujących przyczepionych do osi obrotu wału korbowego.

Do analizy działania sił bezwładności pierwszego rzędu P'_b oraz momentów od tych sił M'_b wykorzystuje się wektor zastępczy W' , o module $|W'| = m_p R \omega^2$, wirujący z prędkością kątową wału korbowego. Natomiast w celu przeprowadzenia analizy działania sił bezwładności drugiego rzędu P''_b oraz momentów od tych sił M''_b stosuje się wektor zastępczy W'' , o module $|W''| = m_p R \omega^2 \lambda$, wirujący z prędkością kątową dwa razy większą niż prędkość kątową wału korbowego.



Rys. 1

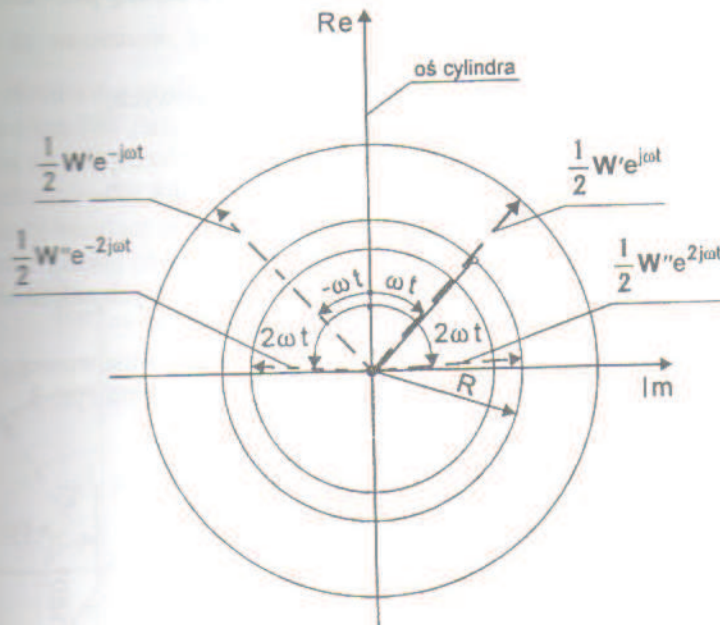
Jednak spotykana w literaturze z dziedziny silników spalinowych [2] metodyka analizy wyrównoważenia mechanizmów korbowych, wykorzystująca zastępcze wektory wirujące, wprowadza pewne zasady, które są niezgodne z zasadami stosowanymi, między innymi, w matematyce i mechanice technicznej [10, 11]. Brak jest również w literaturze silnikowej uzasadnienia słuszności analizy sił bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym za pomocą zastępczych wektorów wirujących.

Takie uzasadnienie można najłatwiej przeprowadzić przedstawiając zależność na siłę P'_{bi} w postaci zespolonej jak niżej [12]

$$P'_{bi} = W'_i \cos \alpha = \frac{1}{2} W'_i (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}), \quad \alpha = \omega t \quad (6)$$

gdzie: i — numer cylindra,
 j — liczba urojona,
 t — czas.

Z punktu widzenia interpretacji geometrycznej liczb zespolonych na płaszczyźnie liczba $\frac{1}{2} W' e^{j\omega t}$ jest wektorem $\frac{1}{2} W'$ obracającym się zgodnie z kierunkiem obrotu wału korbowego z prędkością kątową ω , zaś liczba $\frac{1}{2} W' e^{-j\omega t}$ jest takim samym



Rys. 2

wektorem $\frac{1}{2} W'_i$ obracającym się również z prędkością kątową ω , ale w stronę przeciwną (rys. 2). Suma składowych obu wektorów wzdłuż osi rzeczywistej jest równa wektorowi P''_{bi} , natomiast składowe obu wektorów wzdłuż osi urojonej wzajemnie się równoważą. W podobny sposób można przedstawić zależność na siłę bezwładności drugiego szeregu P''_{ki} w postaci zespolonej, a mianowicie:

$$P''_{bi} = W''_i \cos 2\alpha = \frac{1}{2} W''_i (e^{2j\alpha t} + e^{-2j\alpha t}), \quad \alpha = \omega t \quad (7)$$

Liczba $\frac{1}{2} W''_i e^{2j\alpha t}$ jest wektorem $\frac{1}{2} W''_i$ wirującym zgodnie z kierunkiem obrotu wału korbowego z prędkością kątową 2ω , zaś liczba $\frac{1}{2} W''_i e^{-2j\alpha t}$ jest wektorem $\frac{1}{2} W''_i$ wirującym również z prędkością kątową 2ω , ale w stronę przeciwną. Podobnie jak w przypadku P'_b również w tym przypadku, dla dowolnej chwili t , suma składowych wektorów na osi rzeczywistej jest równa wektorowi P''_{bi} , natomiast suma ich rzutów na osi urojonej jest równa zero. Dla pełnej ilustracji graficznej posłużymy się przykładem silnika dwucylindrowego.

W silnikach wielocylindrowych rzędowych kąt pomiędzy wykorbieniami δ najczęściej dobiera się w taki sposób, aby zachować zasadę równego odstępu pomiędzy

zapłonami kolejno po sobie pracujących cylindrów. Tę zasadę pozwalają zachować następujące zależności:

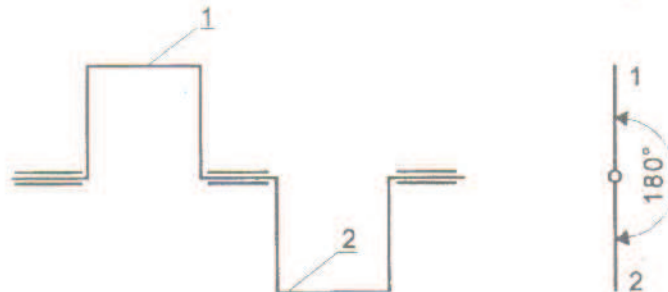
$$\delta_{2-s} = \frac{360^\circ}{z} \quad \text{— dla silników dwusuwowych,}$$

$$\delta_{4-s} = \frac{760^\circ}{z} \quad \text{— dla silników czterosuwowych,}$$

gdzie z oznacza liczbę cylindrów.

Przyjmowanie kątów pomiędzy wykorbieniami z powyższych zależności zapewni bardziej równomierny przebieg momentu obrotowego.

Kąt pomiędzy wykorbieniami silnika dwucylindrowego dwusuwowego, wyznaczony z zależności (8), posiada wał korbowy o konfiguracji jak na rys. 3.



Rys. 3

Sily bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym w tym silniku, w postaci zespolonej, wyrażają następujące zależności:

$$P'_{b1} = \frac{1}{2} W'_1 (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \quad (10)$$

$$P'_{b2} = \frac{1}{2} W'_2 (e^{j(\omega t + \pi)} + e^{-j(\omega t + \pi)}) \quad (11)$$

$$P''_{b1} = \frac{1}{2} W''_1 [e^{2j\omega t} + e^{-2j\omega t}] \quad (12)$$

$$P''_{b2} = \frac{1}{2} W''_2 [e^{2j(\omega t + \pi)} + e^{-2j(\omega t + \pi)}] \quad (13)$$

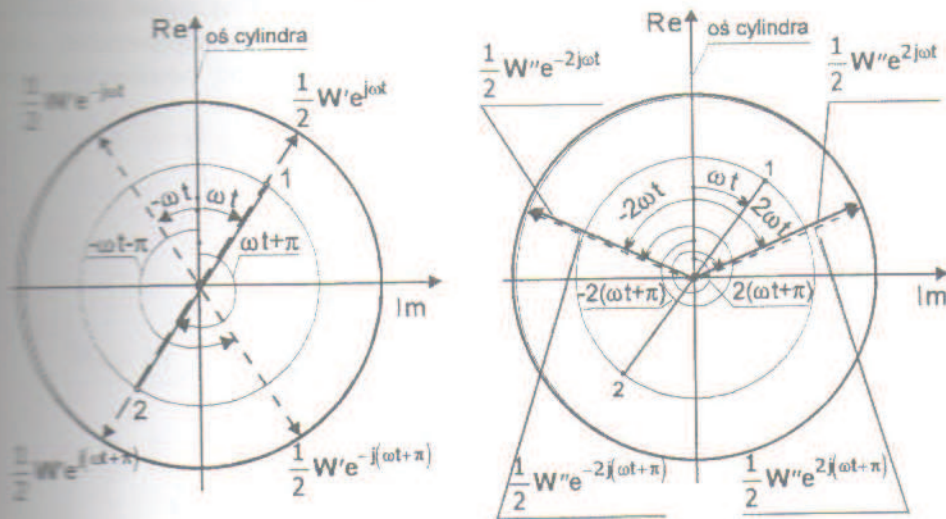
przy czym przyjmuje się, że

$$W'_1 = W'_2 = W'_i, \quad i \in \langle 1, z \rangle$$

$$W''_1 = W''_2 = W''_i, \quad i \in \langle 1, z \rangle$$

Wyrażenia ujęte zależnościami (10) do (13) przedstawiono w postaci wektorowej na płaszczyźnie liczb zespolonych na rys. 4. Jak wynika z rysunku, wektory

Wzajemnie się znoszą, zaś wektory $\frac{1}{2}W''_i$ dodają się. Jest to wystarczający dowód na to, że w silniku dwucylindrowym z wałem korbowym, w którym wykorbienia są przesunięte o kąt 180° , siły bezwładności pierwszego rzędu równoważą się, a drugiego znoszą się. W przedstawionym przykładzie mamy więc do czynienia z dwoma przeciwległymi wektorami wirującymi. Z tego przykładu wynika również oczywisty wniosek, że jeśli wektory wirujące w jednym z tych układów znoszą się wzajemnie to muszą się również znosić również wektory wirujące w stronę przeciwną.

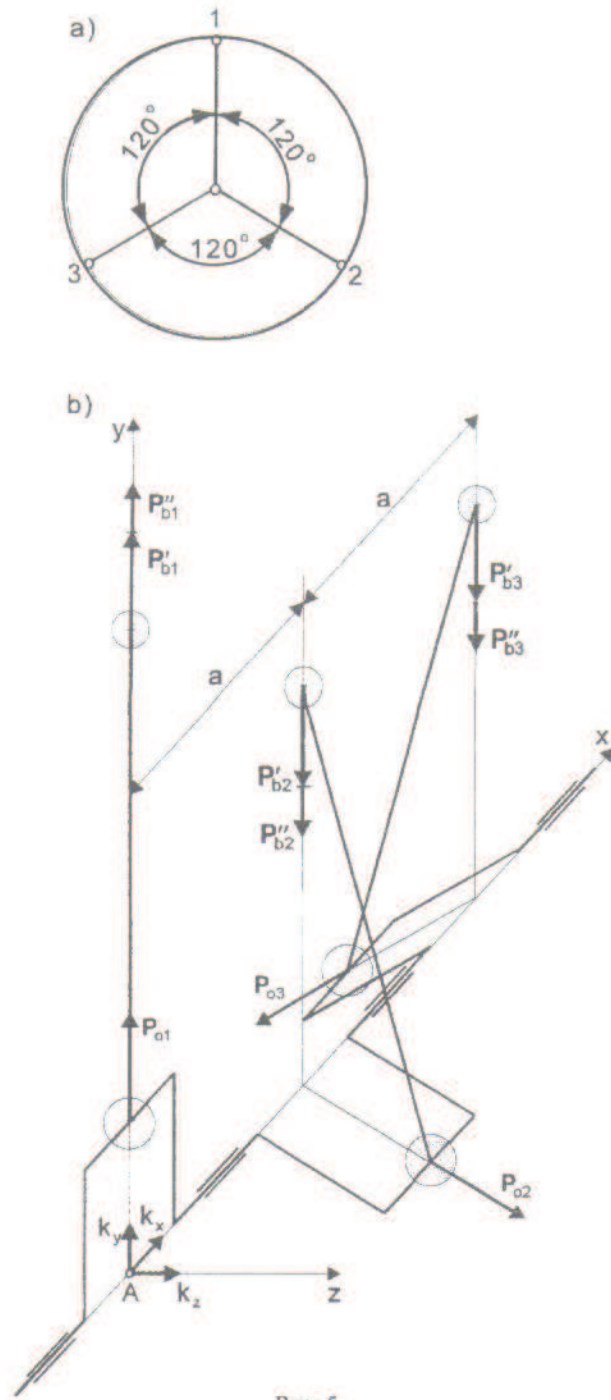


Rys. 4

Wobec powyższego, zamiast posługiwać się dwoma wektorami $\frac{1}{2}W'_i$ wirującymi z prędkością kątową ω w przeciwne strony, można posłużyć się jednym wektorem W'_i o module $m_p R\omega^2$, wirującym z prędkością kątową ω , którego składowa wzdłuż osi cylindra wynosi P_{bi} . Podobnie dla analizy wyrównowazania sił P''_{bi} można posłużyć się wektorem W''_i o module $m_p R\omega^2\lambda$, wirującym z prędkością kątową 2ω . Potrzeba posługiwania się pełnymi wektorami zastępczymi W' i W'' na płaszczyźnie liczb zespolonych, zamiast wektorami połówkowymi, wynika z konieczności spełnienia warunku równości składowych tych wektorów wzdłuż osi cylindra z wektorami odpowiednich sił bezwładności. W wyniku takiego założenia, w silniku wielocylindrowym, składowe wypadkowych wektorów zastępczych $\Sigma W'$ i $\Sigma W''$ na kierunku równoległym do osi cylindra, dla każdego położenia wału korbowego, będą równe wektorom wypadkowym sił bezwładności, odpowiednio $\Sigma P'_b$ i $\Sigma P''_b$.

2.2. Metoda wektorowa na płaszczyźnie liczb rzeczywistych na przykładzie silnika trzycylindrowego

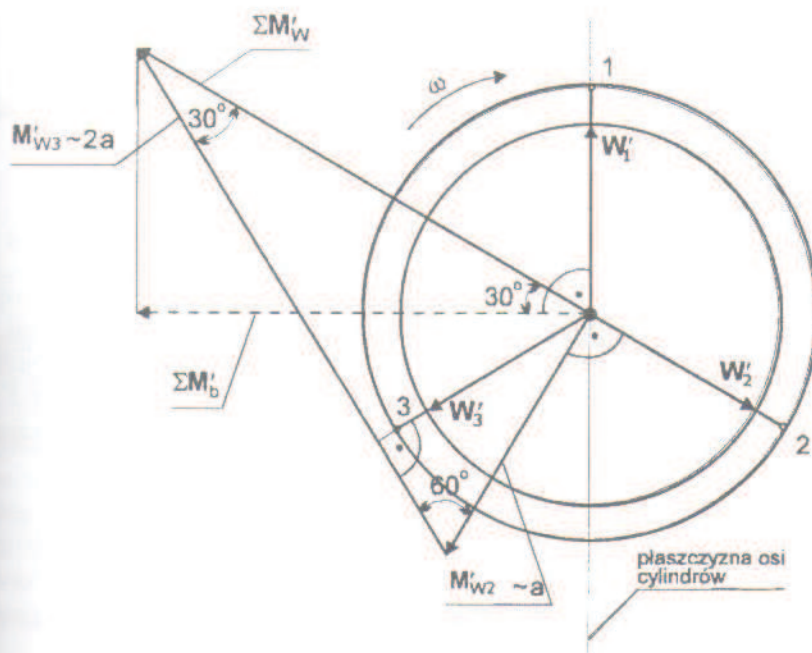
Dla zobrazowania metodyki analizy sił bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym, polegającej na wykorzystaniu zastępczych wektorów wirujących, niżej zostanie



przeprowadzona analiza silnika trzycylindrowego o „gwiazdzie” promieni korb jak na rys. 5a. Zgodnie z zależnościami (8) i (9) kąt pomiędzy wykorbieniami wynosi 120° . Liczby 1, 2 i 3 na rys. 5a oznaczają przyporządkowanie wykorbień wału poszczególnym cylindrom. Na rys. 5b przedstawiono układ zastępczy mechanizmu korbowego, składający się z mas poruszających się ruchem postępowo-zwrotnym wzdłuż osi poszczególnych cylindrów, generujących siły bezwładności na kierunku osi cylindra P_{bi}' i P_{bi}'' oraz mas poruszających się ruchem obrotowym po torach o promieniu równym promieniowi wykorbienia i generujących siły bezwładności w ruchu obrotowym P_{bi} .

Wektory zastępcze W'_i , zgodnie z rys. 6, tworzą symetryczną „gwiazdę” wektorów, pokrywającą się z „gwiazdą” promieni korb. Wobec tego, wyrażenie na wektor wypadkowy przedstawia zależność

$$\sum_{i=1}^3 W'_i = W'_1 + W'_2 + W'_3 = 0, \quad W'_1 = W'_2 = W'_3 = W' \quad (14)$$



Rys. 6

Wzajemne równowazenie się wektorów W'_b , zgodnie z zależnością (14), stanowi wystarczający dowód na to, że również wektor $\Sigma P'_{bi}$ jest wektorem zerowym. W takim przypadku suma momentów od sił bezwładności pierwszego rzędu P'_{bi} lub od sił W'_i nie zależy od punktu odniesienia.

Do analizy momentów od wektorów zastępczych W'_i , jako punkt odniesienia wygodnie jest przyjąć punkt przecięcia się osi jednego z cylindrów z osią obrotu wału korbowego, na przykład punkt A na rys. 5b.

W takim wypadku wektor sumy momentów $\Sigma M'_{Wi}$ od sił W'_i wyraża poniższą zależność:

$$\sum_{i=1}^3 M'_{Wi} = \sum_{i=1}^3 a_i \times W'_i = 0 \times W'_1 + ak_x \times W'_2 + 2ak_x \times W'_3 \quad (15)$$

gdzie a_i oznacza wektor odległości wektora W'_i od punktu odniesienia (rys. 5) zdefiniowany jak niżej

$$a_i = (i-1)ak_x \quad (16)$$

gdzie: k_x — wektor jednostkowy wzdłuż osi x ,
 a — odległość pomiędzy osiami cylindrów.

Ponieważ zgodnie z założeniami moduł wektora W' jest równy maksymalnej wartości siły P'_b i wynosi $m_p R \omega^2$, to słuszny jest poniższy związek

$$\left| \sum_{i=1}^3 M'_{Wi} \right| = \left| \sum_{i=1}^3 M'_{bi} \right|_{\max} \quad (17)$$

Na podstawie rys. 6 dla wieloboku momentów, który w tym przypadku jest trójkątem prostokątnym, można napisać:

$$\left| \sum_{i=1}^3 M'_{bi} \right|_{\max} = \sqrt{(2W'a)^2 - (W'a)^2} = \sqrt{3} m_p R \omega^2 a \quad (18)$$

Siły bezwładności P'_b działają w płaszczyźnie utworzonej przez osie poszczególnych cylindrów, wobec tego kierunek wektora wypadkowego momentu od tych sił jest prostopadły do tej płaszczyzny. Stąd chwilowa wartość momentu wypadkowego od sił bezwładności pierwszego rzędu $\Sigma M'_{bi}$ jest modułem rzutu wektora $\Sigma M'_{Wi}$ na kierunek prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez osie poszczególnych cylindrów i może być przedstawiona zależnością

$$\sum_{i=1}^3 M'_{bi} = \sqrt{3} m_p R \omega^2 a \cos(\alpha + 30^\circ) \quad (19)$$

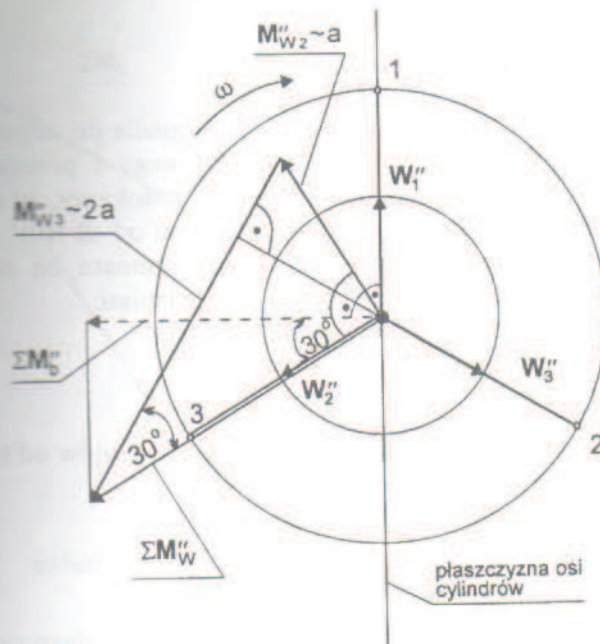
Maksymalna wartość momentu występuje wówczas, gdy spełniony jest warunek

$$\cos(\alpha + 30^\circ) = \pm 1 \quad (20)$$

stąd

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

W przypadku sił bezwładności drugiego rzędu „gwiazda” wektorów W'' nie pokrywa się z „gwiazdą” promieni korb (rys. 7). Wynika to z faktu, iż wektory W''_i wirują z prędkością kątową dwa razy większą niż prędkość kątowa wału korbowego. Nanosząc zgodnie z kierunkiem promienia korb pierwszego cylindra



Rys. 7

wektor W_1'' , wektor W_2'' będzie wyprzedzał wektor W_1'' (zgodnie z kierunkiem obrotu osi korbowego) o kąt 240° OWK a jego kierunek będzie pokrywał się z promieniem wykorbienia trzeciego cylindra. Kąt pomiędzy wektorami W_1'' i W_2'' wynika z faktu, że wykorbienie drugiego cylindra wyprzedza wykorbienie pierwszego cylindra o kąt 120° , a ponieważ wektor W_2'' wiruje z prędkością kątową 2ω , to kąt między wektorami wynosi: $2 \cdot 120^\circ = 240^\circ$.

W podobny sposób wyznacza się położenie wektora W_3'' . Wykorbienie trzeciego cylindra wyprzedza wykorbienie pierwszego cylindra o kąt 240° , wobec tego kąt pomiędzy wektorami W_1'' i W_3'' będzie wynosił $2 \cdot 240^\circ = 480^\circ$, co oznacza, że kierunek wektora W_3'' pokrywa się z kierunkiem promienia korby drugiego cylindra.

A więc wektory W_i'' , podobnie jak wektory W_i' , tworzą symetryczną „gwiazdę” wektorów, wobec tego ich wektor wypadkowy spełnia równanie

$$\sum_{i=1}^3 W_i'' = W_1'' + W_2'' + W_3'' = 0 \quad (22)$$

stąd wynika jednoznaczny wniosek, że także $\Sigma P_{bi} = 0$.

Wektor wypadkowy sumy momentów od wektorów W_i'' , względem punktu A (rys. 5b) można przedstawić poniższą zależnością:

$$\sum_{i=1}^3 M_{Wi}'' = \sum_{i=1}^3 a_i \times W_i'' = ak_x \times W_2'' + 2ak_x \times W_3'' \quad (23)$$

ponieważ

$$\mathbf{0} \times \mathbf{W}'' = \mathbf{0}$$

Nanosząc wektory momentów M''_{W_2} i M''_{W_3} prostopadle do odpowiednich płaszczyzn wyznaczonych przez oś obrotu wału korbowego i promienie wykrętności drugiego i trzeciego cylindra otrzymamy trójkąt prostokątny, w którym dłuższa przyprostokątna stanowi wektor wypadkowy momentu od sił W''_i .

Podobnie jak to miało miejsce w przypadku momentu od sił bezwładności pierwszego rzędu, również w tym przypadku można napisać

$$\left| \sum_{i=1}^3 M''_{W_i} \right| = \left| \sum_{i=1}^3 M''_{b_i} \right|_{\max} \quad (24)$$

Korzystając z rys. 7, maksymalną wartość sumy momentów od sił bezwładności drugiego rzędu można wyznaczyć z zależności

$$\left| \sum_{i=1}^3 M''_{b_i} \right|_{\max} = \sqrt{(2W'' \cdot a)^2 - (W'' \cdot a)^2} = \sqrt{3} m_p R \omega^2 \lambda a \quad (25)$$

Moduł rzutu wektora $\Sigma M''_{W_i}$ na kierunek prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez osie cylindrów stanowi wartość chwilową sumy momentów od sił bezwładności drugiego rzędu. Stąd ogólną zależność na moduł wektora sumy momentów od sił P''_{b_i} w funkcji kąta obrotu wału korbowego można przedstawić w następującej postaci:

$$\sum_{i=1}^3 M_{b_i} = \sqrt{3} m_p R \omega^2 \lambda a \cos 2(\alpha - 15^\circ) \quad (26)$$

Zgodnie z zależnością (26) maksymalna wartość $|\Sigma M''_{b_i}|$ wystąpi wówczas, gdy spełniony będzie warunek

$$\cos 2(\alpha - 15^\circ) = \pm 1 \quad (27)$$

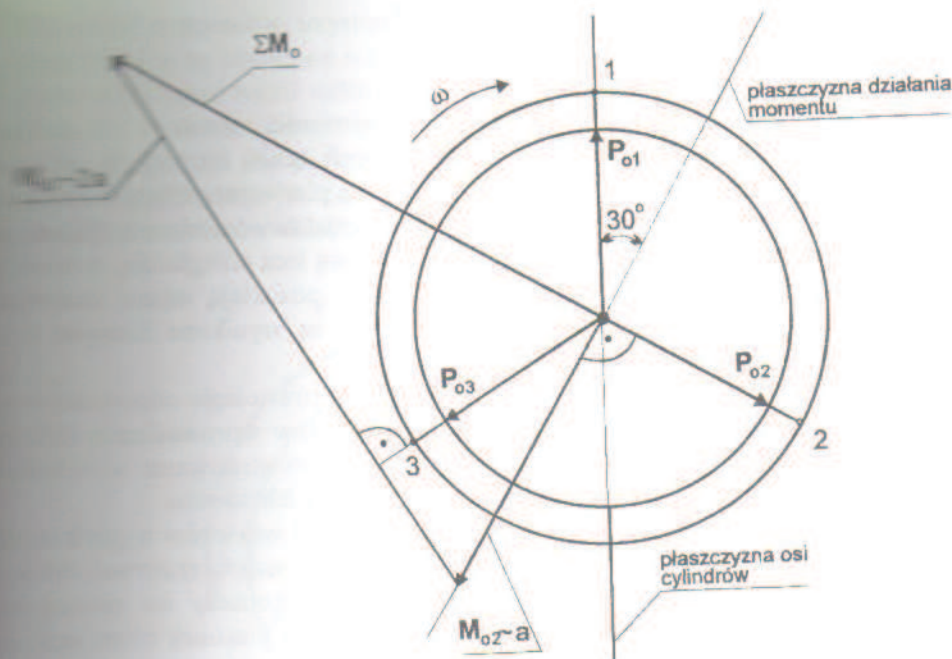
stąd

$$\alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{k}{2} \pi \quad (28)$$

Na rys. 8 przedstawiono „gwiazdę” wektorów sił bezwładności w ruchu obrotowym P_{oi} oraz wielobok wektorów momentów M_{oi} od tych sił. Zarówno gwiazda wektorów P_{oi} jak i wielobok momentów od tych sił są podobne odpowiednio do „gwiazdy” wektorów W''_i i wieloboku momentów od tych sił.

Wartość modułu wektora wypadkowego momentu od sił odśrodkowych, posługując się rys. 8, można wyznaczyć z następującej zależności

$$\left| \sum_{i=1}^3 M''_{oi} \right| = \sqrt{(2P_o \cdot a)^2 - (P_o \cdot a)^2} = \sqrt{3} m_o R \omega^2 \cdot a \quad (29)$$



Rys. 8

Wektor momentu wypadkowego od sił odśrodkowych ΣM_{oi} ma stały moduł, zaś jego kierunek jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez oś obrotu wału korbowego i wyprzedzającej wykorbienie pierwszego cylindra o kąt 30° . Umieszczając w tej płaszczyźnie przeciwmasy, o odpowiednim momencie statycznym, związane ze skrajnymi ramionami wału korbowego, można najprościej całkowicie wyrównować moment od sił bezwładności w ruchu obrotowym oraz zmniejszyć wypadkowy moment wypadkowy od sił bezwładności pierwszego rzędu.

3. Nieprawidłowości w praktycznym stosowaniu metody analizy wyrównowazania za pomocą zastępczych wektorów wirujących

W literaturze z dziedziny silników spalinowych, na przykład w [2, 3], jest przedstawiony skrótowo i bez odpowiedniego uzasadnienia nieco odmienny od przedstawionego w poprzednim rozdziale sposób analizy momentów od sił bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym, który wzbudza pewne kontrowersje, zwłaszcza z praktycznego punktu widzenia. Chociaż wyniki końcowe są podobne jak uzyskane według zasad zawartych w rozdziale drugim tej pracy, to jednak zastosowana metodyka zawiera znaczące odstępstwa od zasad formalnych stosowanych, między innymi, w mechanice technicznej.

Po pierwsze, traktując odległości a_i wektorów W'_i i W''_i od punktu odniesienia jako wielkości skalarne w pracy [2] definiuje się wektory momentów od tych sił jak następuje:

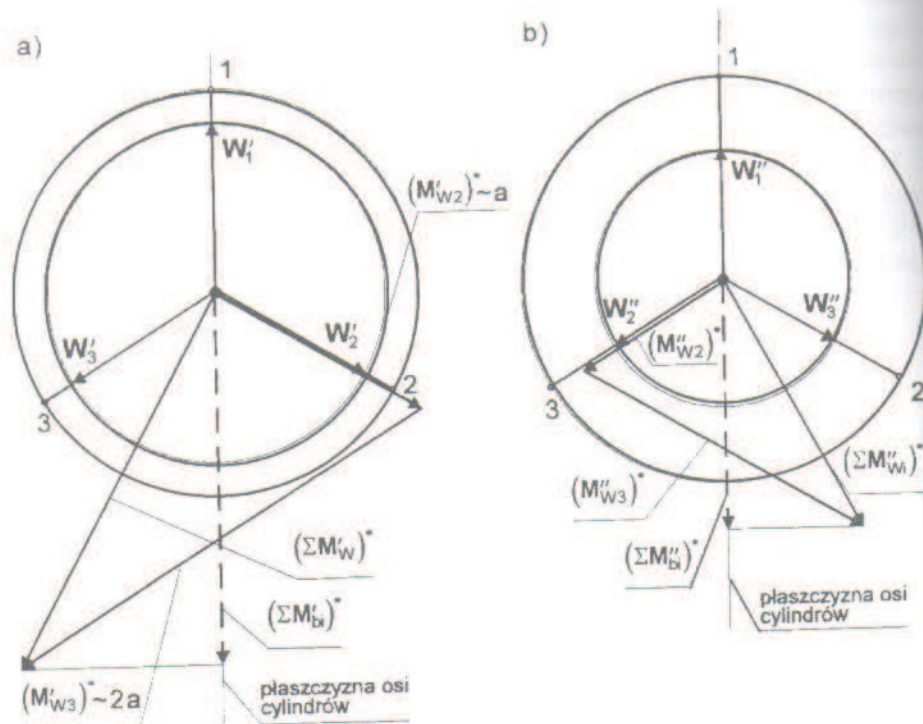
$$(M'_{wi})^* = W'_i \cdot a_i$$

$$(M''_{wi})^* = W''_i \cdot a_i$$

Zgodnie z teorią wektorów [10], taki sposób definiowania momentu jest bardzo zbliżony do iloczynu wektora przez liczbę. Jako wynik takiej operacji na wektorze powinno się otrzymać inny wektor o kierunku wektora pierwotnego, lecz o module razy większym. Tymczasem wektory powstałe na podstawie zależności (30) nie są wektorami sił, gdyż a_i nie jest wielkością bezwymiarową lecz odległością, w związku z czym moduły wektorowe $|W'_i \cdot a_i|$ i $|W''_i \cdot a_i|$ posiadają miano momentu. Wektory te nie są wektorami momentów, gdyż nie są wynikiem iloczynu wektorowego wektora siły i wektora odległości.

Po drugie, kierunki wektorów $(M'_{wi})^*$ i $(M''_{wi})^*$ są równoległe odpowiednio do wektorów W'_i i W''_i , co prawdopodobnie leżało u podstaw wprowadzenia definiujących zależności (30) i (31). Ułatwia to bowiem konstruowanie wieloboków wektorów momentu, gdyż odpada konieczność ustalania ich zwrotu.

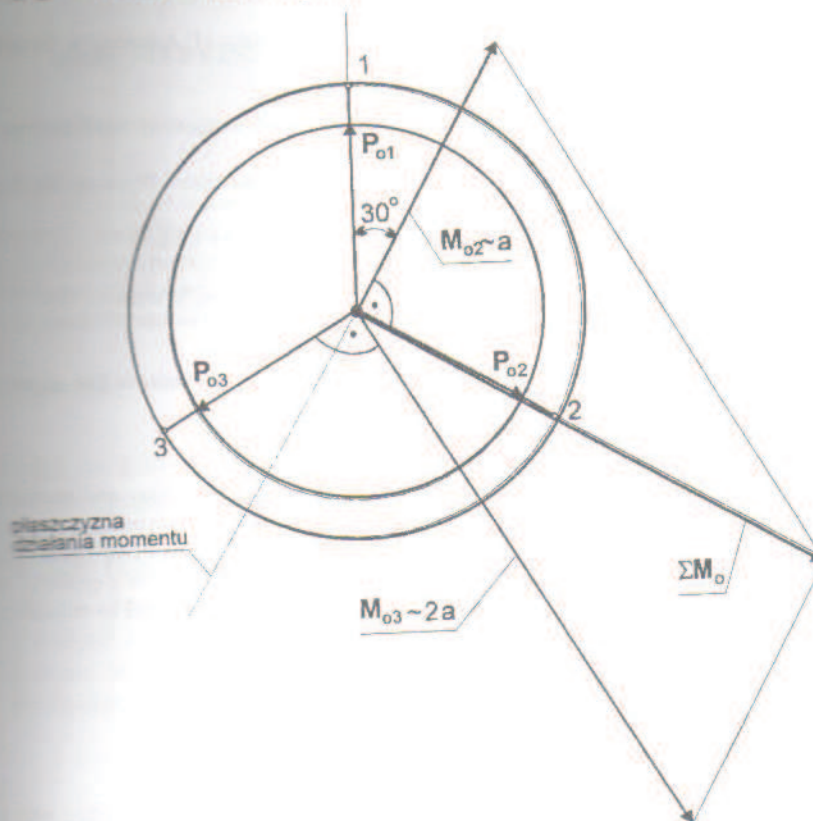
Po trzecie, aby uzyskać prawidłowe chwilowe wartości wektorów wypadkowych od sił bezwładności w ruchu postępowo-zwrotnym P'_b i P''_b należy rzutować wektory wypadkowe $(\Sigma M'_{wi})^*$ i $(\Sigma M''_{wi})^*$, nie na kierunek prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez osie poszczególnych cylindrów, lecz na kierunek równoległy do tych osi.



Rys. 9

Wieloboki momentów, uzyskane na podstawie tej metodyki, pokazano na rys. 9a. Wieloboki te są obrócone o kąt 90° w stosunku do sporządzonych przy pełnym uwzględnieniu zasad teorii wektorów i pokazanych na rys. 6 i 7.

Na rys. 10 przedstawiono graficznie wektory momentów od sił bezwładności w ruchu obrotowym na podstawie [2, 8]. Jak wynika z rysunku zwrot wektora momentu wypadkowego jest określony nieprawidłowo na skutek błędnego określenia zwrotów jego wektorów składowych.



Rys. 10

4. Uwagi końcowe

Przedstawiona w pracy metoda graficzna wykorzystująca zastępcze wektory wращające do analizy działania sił bezwładności i ich momentów została opracowana przy przyjęciu stosowanej obecnie najczęściej definicji wektora momentu jako iloczynu wektorowego wektora odległości i wektora siły. Spotykane w literaturze z dziedziny silników spalinowych odstępstwa od zasad przyjętych w dziedzinie mechaniki, przy stosowaniu tej metody, które trudno w sposób racjonalny uzasadnić, wprowadzają niepotrzebne zamieszanie pojęciowe.

Literatura

- [1] JĘDRZEJOWSKI J.: *Mechanika układów korbowych silników samochodowych*. WKŁ, Warszawa 1972.
- [2] NIEWIAROWSKI K.: *Tłokowe silniki spalinowe*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1982.
- [3] WAJAND J.A., WAJAND G.T.: *Tłokowe silniki spalinowe średnio i szybkoobrotowe*. WNT, Warszawa 1993.
- [4] WAJAND J.A.: *Mikrokomputerowe obliczanie silnika spalinowego*. WNT, Warszawa 1990.
- [5] BERNHARDT M., DOBRZYŃSKI S., LOTH E.: *Silniki samochodowe*. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1978.
- [6] STONE R.: *Introduction to Internal Combustion Engines*. Society of Automotive Engineers, Inc. Warrendale.
- [7] GIACOSA D.: *Motori endotermici*. Italian Hoepli. Milano 1990.
- [8] CZYSTIAKOW W.K.: *Dinamika porszniewych i kombinowanych dwigatielej wnutriennowo spalinowych*. Maszynostrojenie, Moskwa 1989.
- [9] POPYK K.G.: *Dinamika awtomobilnych i traktornych dwigatielej*. Izdatelstwo Wysszaja Szkoła, Moskwa 1970.
- [10] KRAŚKIEWICZ E.: *Zarys teorii wektorów i tensorów*. PWN, Warszawa 1971.
- [11] LEYKO J.: *Mechanika ogólna*. PWN, Warszawa 1996.
- [12] KOŹEŚNIK J.: *Dynamika maszyn*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1963.

Comments on graphical method of analysis of balancing of multicylinder in-line engines

Summary

A graphical justification of correctness of the method of analysis of primary and secondary inertia forces in to-and-fro motion by supplementary (fictitious) rotating vectors is presented in the paper. The justification was carried out in the complex numbers plane by defining the inertia forces according to relations (6) and (7). The symbols used in relations (6) and (7) denote: i — number of a cylinder, j — complex number, ω — engine angular speed, α — angle, t — time, W' and W'' are defined by relations:

$$W' = m_p R \omega^2, \quad W'' = m_p R \omega^2 \lambda$$

where:

- m_p — mass in to-and-fro motion,
- R — crank radius,
- λ — ratio between the crank radius and connecting rod length.

The number $0.5W'e^{j\omega t}$ is treated as a vector $0.5W'_i$ rotating in the clockwise direction with rotational speed ω , while the number $0.5W'e^{-j\omega t}$ as the vector $0.5W''_i$ rotating with the same speed but in opposite direction. In the same way relation (7) is interpreted. The only difference is that vectors $0.5W''_i$ rotate with angular speed 2ω . For two-cylinder engine the relations depicting inertia forces in the complex form are presented by relations (10) to (13) and illustrated in Fig. 5. For the purposes of analysis of primary and secondary inertia forces P'_b and P''_b vectors W' and W'' were introduced. The vectors rotate with angular speed ω and 2ω respectively. Vertical projections of vectors W' and W'' (along cylinder axis) equal values of P'_b and P''_b respectively. Moments M'_w and M''_w are defined as vector products, their horizontal projections equal values of real moments of inertia forces M'_b (first order) and M''_b (second order). The method of analysis of the inertia forces in to-and-fro motion and their moments are presented graphically in Fig. 6 and 7. As it follows from Fig. 6 and 7 the resultant vectors $\Sigma W'$ and $\Sigma W''$ are zero vectors, therefore, resultant vectors $\Sigma P'_b$ and $\Sigma P''_b$ must also be zero vectors. Making use of Fig. 6 and 7 one can easily derive simple relations for $\Sigma M'_b$ and $\Sigma M''_b$ in the form of relations (19) and (26). The centrifugal inertia forces are analysed in Fig. 8. The mistakes made by some authors of textbooks on internal combustion engines in the form of discrepancy from the rules adopted in mechanics in applying this method of analysis of balancing of multicylinder in-line engines are also indicated in the paper by citing Fig. 9a and b and Fig. 10.