

# BUDOWA I EKSPLOATACJA MASZYN

Rafał ŁUSZCZYNA\*  
Marian A. PARTYKA

## EFEKTYWNOŚĆ TYPÓW MODELI REGRESJI WIELOKROTNEJ W STATYSTYCZNEJ ANALIZIE DANYCH PARAMETRÓW POMPY ZĘBATEJ

*W opracowaniu porównano efektywność doboru modelu addytywnego i multiplikatywnego do statystycznej analizy danych parametrów pompy zębatej. Na podstawie analizy reszt regresyjnych wykazano zależność między addytywnym i multiplikatywnym sposobem eksploracji danych. W oparciu o wyniki końcowe udowodniono równoprawność modelu addytywnego i multiplikatywnego regresji wielokrotnej z punktu widzenia różnego doboru zmiennych niezależnych.*

**Słowa kluczowe:** regresja wielokrotna, analiza danych, ranga ważności parametrów, pompa zębata

### WSTĘP

Jedną z szeroko stosowanych metod wielowymiarowej analizy danych jest metoda regresji wielokrotnej. Pozwala ona na określenie wzajemnego oddziaływania kilku zmiennych niezależnych  $X_1, X_2, \dots, X_n$  na predykcje jednej zmiennej zależnej  $Y$ .

Każdy układ mechaniczny charakteryzuje się odpowiednimi parametrami konstrukcyjno-eksploatacyjnymi. Niektóre z nich, jak na przykład sprawność będąca parametrem porównawczym może być wyrażona w postaci równania funkcyjnego z parametrami niezależnymi. Tego typu podejście, z punktu widzenia metody regresji wielokrotnej, pozwala na określenie typu i ważności związku między danymi parametrami (zmiennymi).

---

\* mgr inż. Rafał ŁUSZCZYNA, prof. dr hab. Marian A. PARTYKA - Wydział Inżynierii Produkcji i Logistyki Politechniki Opolskiej

Bazując na przykładzie danych parametrów eksploatacyjnych pompy zębatej, przedstawiono w opracowaniu dwie metody definiowania danych zależności. Jako przykład przedstawionej treści umieszczono w artykule teoretyczną analizę sprawności pomp zębatych.

## 1. ANALIZA SPRAWNOŚCI POMP ZĘBATYCH [1, 4, 6]

Na sprawność całkowitą pomp wyporowych składają się parametry konstrukcyjne i eksploatacyjne oraz wzajemne relacje występujące między nimi. Oznacza to, że w procesie projektowania oraz eksploatacji pomp istnieje problem optymalnego doboru parametrów eksploatacyjnych dla konkretnej konstrukcji lub doboru parametrów konstrukcyjnych dla planowanych warunków eksploatacji.

Sprawność całkowitą pompy  $\eta_c$  określa się ilorazem mocy wyjściowej  $N_{wy}$  do mocy włożonej  $N_{we}$  lub jako iloczyn sprawności objętościowej i hydrauliczno-mechanicznej:

$$\eta_c = \frac{N_{wy}}{N_{we}} = \eta_v \cdot \eta_{hm}. \quad (1)$$

Sprawność objętościowa pompy  $\eta_v$  jest ilorazem wydajności rzeczywistej  $Q_{rz}$  do wydajności teoretycznej  $Q_t$ :

$$\eta_v = \frac{Q_{rz}}{Q_t}. \quad (2)$$

Na całkowite straty objętościowe w pompie składają się: niecałkowite wypełnienia komór roboczych w okresie ssania, ściśliwość cieczy, odkształcenia elementów pompy oraz przecieki wewnętrzne, proporcjonalne do lepkości i gęstości cieczy. Analizując wszystkie współczynniki oraz odpowiednie zależności między nimi, ostatecznie otrzymuje się wzór:

$$\eta_v = 1 - c_\mu \frac{p}{2\pi \cdot \mu \cdot n} - c_r \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \cdot \sqrt[3]{q^{-1}}, \quad (3)$$

gdzie:

- $c_\mu$  – współczynnik będący funkcją rozmiarów i liczby szczelin  $c_\mu = 2 \cdot 10^{-8}$ ,
- $c_r$  – współczynnik zależny od rodzaju i rozmiaru szczelin oraz od wydajności właściwej pompy  $c_r = 2 \cdot 10^{-4}$ ,
- $p$  – ciśnienie robocze [MPa],
- $q$  – wydajność właściwa  $q = 25 \cdot 10^{-12} [m^3/obr]$ ,
- $n$  – prędkość obrotowa wałka [ $s^{-1}$ ],
- $\mu$  – lepkość dynamiczna cieczy [ $Pa \cdot s$ ],
- $\rho$  – gęstość cieczy  $\rho = 900 [kg/m^3]$ .

Najczęściej w pompach wyporowych nie wyodrębnia się strat mechanicznych i hydraulicznych, lecz traktuje się je łącznie, wprowadzając pojęcie sprawności hydrauliczno-mechanicznej.

Sprawność hydrauliczno-mechaniczna  $\eta_{hm}$  jest ilorazem momentu teoretycznego  $M_t$  do sumy momentu strat hydrauliczno-mechanicznych  $\Delta M$  i momentu teoretycznego  $M_t$ :

$$\eta_{hm} = \frac{M_t}{M_t + \Delta M}. \quad (4)$$

Uwzględniając odpowiednie współczynniki oraz zależności między nimi otrzymuje się wzór:

$$\eta_{hm} = \frac{1}{1 + c_v \frac{2\pi \cdot \mu \cdot n}{p} + c_p \frac{\rho \cdot n^2}{2p} \sqrt[3]{q^2} + c_p}, \quad (5)$$

gdzie:

$c_v$  – współczynnik konstrukcyjny zależny od rodzaju pompy  $c_v = 0,45 \cdot 10^5$ ,

$c_p$  – współczynnik proporcjonalności związany głównie z wydajnością właściwą pompy  $c_p = 160$ ,

$c_p$  – współczynnik zależny od rodzaju pompy, od jej gabarytów i sił, które obciążają jej łożyskowanie  $c_p = 0,045$ .

Ostatecznie sprawność całkowitą określa się wzorem:

$$\eta_c = \frac{1 - c_\mu \frac{p}{2\pi \cdot \mu \cdot n} - c_r \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \cdot \sqrt[3]{q^{-1}}}{1 + c_v \frac{2\pi \cdot \mu \cdot n}{p} + c_p \frac{\rho \cdot n^2}{2p} \sqrt[3]{q^2} + c_p}. \quad (6)$$

W opracowaniu przyjęto za funkcje celu sprawność objętościową, hydrauliczno-mechaniczną oraz całkowitą. Optymalizację sprawności przeprowadzono dla parametrów eksploatacyjnych, zakładając stałość parametrów konstrukcyjnych.

Poszukując optymalnej wartości funkcji celu przyjęto znane z [4] wartości arytmetyczne dla  $\mu$ ,  $n$ ,  $p$  oraz  $\eta_v$ ,  $\eta_{hm}$ ,  $\eta_c$  (tabela 1).

Tabela 1. Wartości arytmetyczne ustalonych parametrów eksploatacyjnych  $\mu$ ,  $n$ ,  $p$  i sprawności  $\eta_v$ ,  $\eta_{hm}$ ,  $\eta_c$  [4]

Lp.	$\mu$	$n$	$p$	$\eta_v$	$\eta_{hm}$	$\eta_c$
1	0,015	44	6,3	0,951223	0,914463	0,869858
2	0,015	44	10	0,928598	0,929732	0,863347
3	0,015	44	12	0,916740	0,934158	0,856380
4	0,015	48	6,3	0,955287	0,909234	0,868580
5	0,015	48	10	0,934548	0,926320	0,865690
6	0,015	48	12	0,923679	0,931286	0,860209
7	0,015	49,6	6,3	0,956730	0,907087	0,867837
8	0,015	49,6	10	0,936659	0,924915	0,866330
9	0,015	49,6	12	0,926141	0,930102	0,861405
10	0,018	44	6,3	0,956287	0,909536	0,869777

Lp.	$\mu$	$n$	$p$	$\eta_V$	$\eta_{hm}$	$\eta_c$
11	0,018	44	10	0,936636	0,926517	0,867809
12	0,018	44	12	0,926386	0,931452	0,862884
13	0,018	48	6,3	0,959929	0,903923	0,867702
14	0,018	48	10	0,941916	0,922839	0,869237
15	0,018	48	12	0,932521	0,928353	0,865708
16	0,018	49,6	6,3	0,961222	0,901626	0,866662
17	0,018	49,6	10	0,943790	0,921330	0,869542
18	0,018	49,6	12	0,934697	0,927079	0,866538
19	0,025	44	6,3	0,963376	0,898243	0,865345
20	0,025	44	10	0,947889	0,919101	0,871206
21	0,025	44	12	0,939890	0,925198	0,869584
22	0,025	48	6,3	0,966428	0,891767	0,861829
23	0,025	48	10	0,952232	0,914819	0,871120
24	0,025	48	12	0,944899	0,921579	0,870800
25	0,025	49,6	6,3	0,967511	0,889134	0,860247
26	0,025	49,6	10	0,953773	0,913071	0,870862
27	0,025	49,6	12	0,946677	0,920101	0,871038

Źródło: [4]

## 2. PORÓWNANIE TYPÓW MODELI REGRESJI WIELOKROTNEJ NA PRZYKŁADZIE EKSPLOACJI DANYCH PARAMETRÓW POMPY ZĘBATEJ

### 2.1. Analiza addytywna

Przed porównaniem efektywności doboru modelu addytywnego i multiplikatywnego do statystycznej analizy danych parametrów pompy zębatej warto zauważyć, że statystyczne procedury analizy regresji dwóch i więcej zmiennych niezależnych oparte są na procedurach analizy regresji jednej zmiennej niezależnej. Statystyczny model regresji prostej postaci addytywnej określa równanie [5]:

$$Y = \hat{Y} + \xi_{(a)}, \quad (7)$$

gdzie:

$\hat{Y} = f(X) = E(Y/X)$  oznacza teoretyczne poziomy zmiennej zależnej, odczytane z funkcji regresji  $f(X)$  i określane jako warunkowe wartości oczekiwane zmiennej  $Y$  na ustalonym poziomie zmiennej  $X$ ;  $\xi_{(a)} = Y - \hat{Y}$  jest zmienną losową (addytywny składnik przypadkowy), co do której formułuje się założenie normalności rozkładu z parametrami [5]:

$$\xi_{(a)} \Rightarrow N[m_{\xi_{(a)}} = E(\xi_{(a)}) = 0, \sigma_{\xi_{(a)}}^2 = \sqrt{E(\xi_{(a)}^2)} > 0], \quad (8)$$

gdzie:

$\sigma_{\xi_{(a)}}^2$  jest stała i niezależna od  $X$  [5].

W przedstawionej addytywnej analizie statystycznej oznaczono poszczególne parametry eksploatacyjne pompy zębatej za pomocą następujących zmiennych

niezależnych:  $\mu - X_1$ ,  $n - X_2$ ,  $p - X_3$ , i zmiennej zależnej  $\eta_c - Y$ . Związek funkcyjny parametrów eksploatacyjnych i funkcji celu można przedstawić w następujący sposób:

$$\eta_c = f(\mu, n, p), \quad (9)$$

natomiast model:

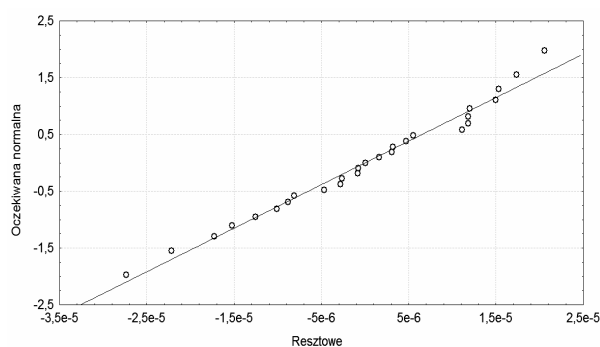
$$Y = a_0 + a_1 \cdot X_1 + a_2 \cdot X_2 + a_3 \cdot X_3 + a_4 \cdot X_1^2 + a_5 \cdot X_2^2 + a_6 \cdot X_3^2 + a_7 \cdot X_1 \cdot X_2 + a_8 \cdot X_1 \cdot X_3 + a_9 \cdot X_2 \cdot X_3 + a_{10} \cdot X_1^2 \cdot X_2 + a_{11} \cdot X_1 \cdot X_2^2 + a_{12} \cdot X_1^2 \cdot X_3 + a_{13} \cdot X_1 \cdot X_3^2 + a_{14} \cdot X_2^2 \cdot X_3 + a_{15} \cdot X_2 \cdot X_3^2 + a_{16} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3. \quad (10)$$

Postać modelu addytywnego (10) została założona na podstawie otrzymania możliwie najwyższego współczynnika determinacji  $R^2$ . Procentowe przedstawienie tego współczynnika  $100 \cdot R^2$  odpowiada na pytanie, jaki procent zmienności  $Y$  został wyjaśniony zmiennością  $X$ . Warunkiem decydującym o przyjęciu poprawności modelu jest jednak analiza jego własności predykcyjnych, którą poprzedza operacja oszacowania wartości parametrów.

Estymację parametrów modelu (10) przeprowadzono metodą quasi-Newtona, a otrzymane wartości przedstawiono poniżej:

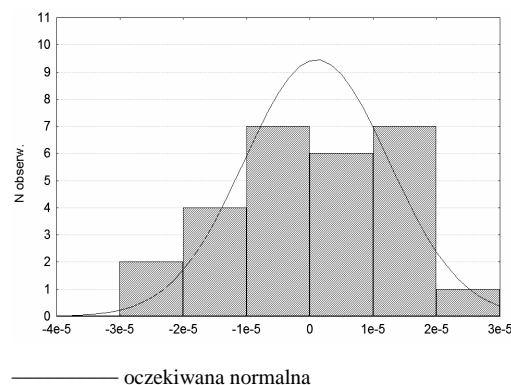
$a_0=0,901668$ ;  $a_1=4,021897$ ;  $a_2=0,001439$ ;  $a_3=-0,031951$ ;  $a_4=-90,237481$ ;  $a_5=-0,000027$ ;  $a_6=0,000374$ ;  $a_7=-0,202335$ ;  $a_8=0,997735$ ;  $a_9=0,000606$ ;  $a_{10}=2,059910$ ;  $a_{11}=0,000790$ ;  $a_{12}=-9,997644$ ;  $a_{13}=-0,012305$ ;  $a_{14}=-0,000002$ ;  $a_{15}=-0,000011$ ;  $a_{16}=-0,001418$ .

Pierwiastek kwadratowy współczynnika determinacji ma wartość  $R=0,999995$ ; która spełnia požądane założenie jakości modelu. Tak jak już wcześniej wspomniano, podstawą przyjęcia modelu do wnioskowania statystycznego jest określenie jego własności predykcyjnych na podstawie analizy rozkładu reszt regresyjnych [3]. W tym celu sporządzono wykres normalności reszt (rys. 1) oraz histogram reszt (rys. 2):



Rys. 1. Wykres normalności reszt

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 2. Histogram reszt

Źródło: Opracowanie własne

Wracając do warunku normalywnego o rozkładzie normalnym reszt, należy stwierdzić w wyniku oceny przebiegu graficznego (rys. 1 i rys. 2), że nie ma większych odstępstw od danego założenia.

Jeżeli reszty nie miałyby rozkładu normalnego, to punkty odchyłyby się od linii prostej. W omawianym przypadku punkty układają się wzdłuż prostej reprezentatywnie (rys. 1). Zbliżonych informacji, jak wykres normalności prawdopodobieństwa, dostarcza

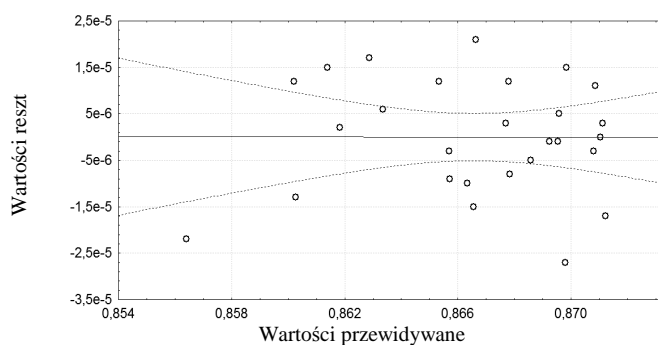
również histogram reszt (rys. 2). W sytuacji idealnej linia krzywej normalnej powinna przechodzić przez środki górnych krawędzi słupków. Niewielkie odchylenie od normalności (zwłaszcza dla liczebnie dużych prób) nie jest niebezpieczne [7]. Jeśli ocena przebiegu graficznego budzi wątpliwości, co do normalności rozkładu reszt regresyjnych, wówczas można wykorzystać test Shapiro-Wilka. Należy w tym celu postawić dwie hipotezy:

- hipotezę zerową  $H_0$ : składnik losowy  $\zeta$  ma rozkład normalny  $N(m, \sigma)$ ;
- hipotezę alternatywną  $H_1$ : składnik losowy  $\zeta$  nie ma rozkładu normalnego  $N(m, \sigma)$ .

Weryfikacją hipotez jest wynik testu Shapiro-Wilka. W rozpatrywanym przypadku wartość tej statystyki jest następująca:  $W=0,9743$ .

Uwzględniając dwustronną lokalizację przedziałów krytycznych, wartości  $W^*$  przy założonym poziomie istotności  $\alpha=0,1$  i liczebności próby  $n=27$  przedstawiają się następująco:  $W^*(\alpha/2)=0,923$  oraz  $W^*(1-\alpha/2)=0,985$ ; gdzie  $W^*$  jest wartością krytyczną odczytaną z tablic dla testu Shapiro-Wilka. Ponieważ obliczona wartość  $W$  nie zawiera się w przedziałach krytycznych, a znajduje się w przedziale:  $W^*(0,05) < W < W^*(0,95)$ , to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy  $H_0$ .

Aby jeszcze dokładniej przeanalizować proponowany model, można skorzystać z założenia homoscedastyczności mówiącego o stałości wariancji reszt regresyjnych [2, 3, 8]. Najlepiej w tym celu sporządzić wykres rozrzutu reszt względem wartości przewidywanych (rys. 3).



Rys. 3. Wykres rozrzutu wartości reszt względem wartości przewidywanych dla modelu addytywnego

*Źródło: Opracowanie własne*

Otrzymany rozrzut punktów nie charakteryzuje się wyraźną tendencją wzrostu lub spadku wariancji reszt przy wzroście wartości przewidywanej, tzn. reszty nie tworzą żadnego wyraźnego wzoru. Pożądanym jest rozrzut punktów w postaci równomiernej chmury, zatem założenie o stałości wariancji składnika losowego zostało w tym przypadku spełnione.

Niespełnienie tego warunku świadczyłoby o heteroscedastyczności i autokorelacji reszt. Jest to zjawisko niepożądane i ma z reguły sens tylko wtedy, gdy obserwacje w próbie są uporządkowane czasowo lub przestrzennie. W sytuacjach wątpliwych (przy spełnieniu odpowiednich założeń) można posłużyć się testem Durбина-Watsona [2, 7].

Na podstawie wyników powyższej analizy można dopuścić proponowany model addytywny (10) jako poprawny do statystycznego wnioskowania zależności (9).

## 2.2. Analiza multiplikatywna

Model regresji może mieć również postać multiplikatywną [5]:

$$Y = \hat{Y} \cdot \xi_{(m)}, \quad (11)$$

gdzie:

$\xi_{(m)} = Y : \hat{Y}$ , przy utrzymaniu założenia normalności rozkładu multiplikatywnego składnika przypadkowego, ale z parametrami [5]:

$$\xi_{(m)} \Rightarrow N[m_{\xi_{(m)}} = E(\xi_{(m)}) = 1, \sigma_{\xi_{(m)}} = \sqrt{E(\xi_{(m)} - 1)^2} > 0], \quad (12)$$

i tak jak poprzednio  $\sigma_{\xi_{(m)}}^2$  jest stała i niezależna od  $X$  [5].

Dla potrzeb multiplikatywnej analizy statystycznej przyjęto następujące zmienne niezależne:  $\eta_V - X_1$ ,  $\eta_{hm} - X_2$  i zmienną zależną  $\eta_c - Y$ . Związek funkcyjny zmiennych niezależnych i funkcji celu można zapisać:

$$\eta_c = f(\eta_V, \eta_{hm}) \quad (13)$$

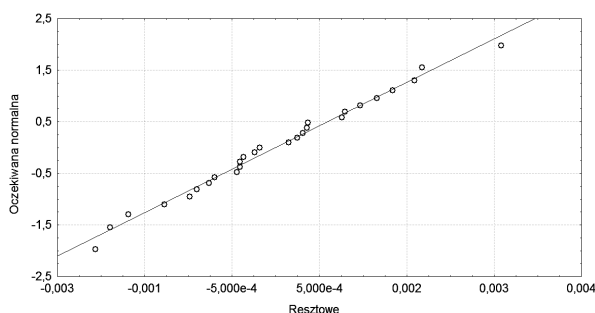
Przed ustaleniem typu multiplikatywnego modelu regresji wielokrotnej, należy przeanalizować charakter zależności poszczególnych zmiennych niezależnych  $X_i$  i zmiennej zależnej  $Y$ . Mając na uwadze wcześniej omówione założenia, można opisać zależność  $Y=f(X_1)$  następującym modelem:

$$Y = a \cdot (a_1 \cdot X_1^2 + b_1 \cdot X_1 + c_1) / (X_1 \cdot (1/\exp(d_1)) + f_1). \quad (14)$$

Wartości estymowanych parametrów modelu (14) mają następujące wartości:

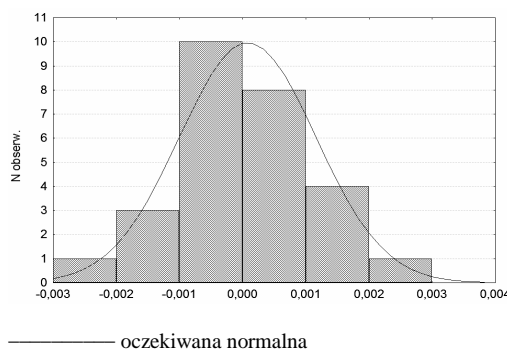
$a=1,872980$ ;  $a_1=-19,136230$ ;  $b_1=36,248200$ ;  $c_1=-16,242500$ ;  $d_1=3,576300$ ;  $f_1=1,960420$ .

Pierwiastek kwadratowy współczynnika determinacji ma zadowalającą wartość  $R=0,958439$ ; a rozkład reszt regresyjnych modelu (14) jest przedstawiony na rysunku 4 i rysunku 5:



Rys. 4. Wykres normalności reszt

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 5. Histogram reszt

Źródło: Opracowanie własne

Na podstawie powyższych wykresów (rys. 4 i rys. 5) należy stwierdzić, że rozkład reszt regresyjnych modelu (14) ma charakter normalny. Sugeruje to dobre własności predykcyjne wyestymowanych wartości parametrów modelu.

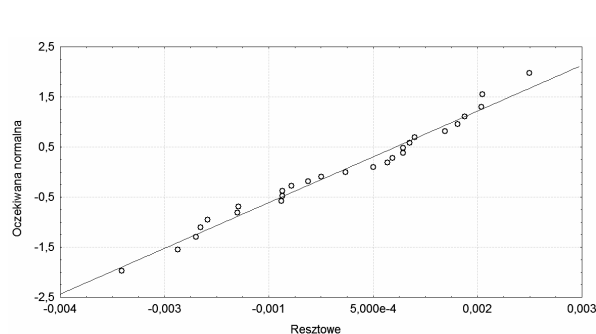
Model drugiej zależności  $Y=f(X_2)$  przedstawiono w postaci wielomianu drugiego stopnia:

$$Y=a_2 \cdot X_2^2 + b_2 \cdot X_2 + c_2. \quad (15)$$

Oszacowane parametry modelu (15) mają wartości:

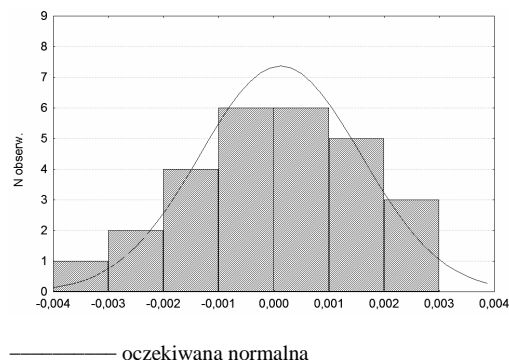
$$a_2=-23,520570; b_2=42,913750; c_2=-18,703470.$$

Prosta postać modelu (15) pozwoliła na uzyskanie zadowalającej wartości współczynnika determinacji, gdyż  $R=0,920047$ .



Rys. 6. Wykres normalności reszt

Źródło: Opracowanie własne



Rys. 7. Histogram reszt

Źródło: Opracowanie własne

Ocena wykresów (rys. 6 i rys. 7) jest zgodna z warunkiem normalnym o rozkładzie normalnym reszt regresyjnych modelu (15).

Korzystając z przeanalizowanych modeli składowych (14), (15) można zapisać zależność (13) w postaci iloczynowej  $Y=a \cdot f(X_1) \cdot f(X_2)$ . Multiplikatywny model regresji ma postać:

$$Y=a \cdot ((a_1 \cdot X_1^2 + b_1 \cdot X_1 + c_1) / (X_1 \cdot (1/\exp(d_1)) + f_1)) \cdot (a_2 \cdot X_2^2 + b_2 \cdot X_2 + c_2). \quad (16)$$

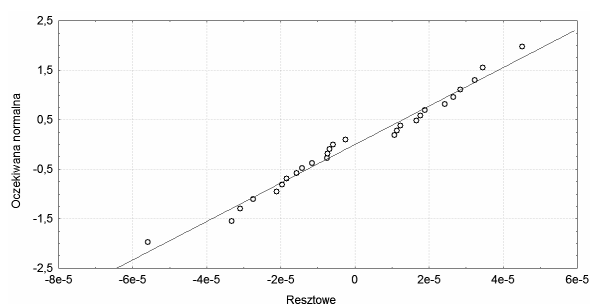
Oszacowane wartości parametrów modelu (16) przyjmują wartości:

$$a=0,806436; a_1=0,697821; b_1=0,338219; c_1=-0,088754; d_1=0,240482; f_1=0,156171; a_2=0,449705; b_2=0,421889; c_2=0,366291.$$

Pierwiastek kwadratowy współczynnika determinacji modelu (16) ma wysoką wartość  $R=0,999981$ ; a wykres normalności reszt – wartości różnic (rys. 8) oraz histogram (rys. 9) podtrzymują założenie o normalności rozkładu składnika losowego.

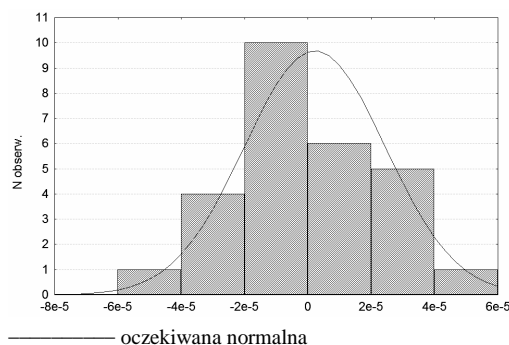
Weryfikacja hipotezy zerowej  $H_0$  o normalności rozkładu składnika losowego przy założonym poziomie istotności  $\alpha=0,1$  i liczebności próby  $n=27$  dla modelu multiplikatywnego (16) przedstawia się następująco:  $W^*(\alpha/2)=0,923 < W=0,9744 < W^*(1-\alpha/2)=0,985$ . Tak więc, podobnie jak w przypadku modelu addytywnego (10) w oparciu o wyniki przeprowadzonej weryfikacji nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy  $H_0$ .





Rys. 8. Wykres normalności reszt

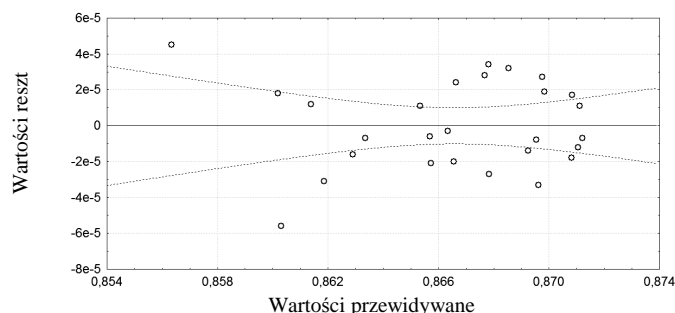
Źródło: Opracowanie własne



Rys. 9. Histogram reszt

Źródło: Opracowanie własne

Wykres rozrzutu wartości reszt (wartości różnic) względem przewidywanych (rys. 10) nie ma postaci charakterystycznej równomiernej chmury punktów, ale nie wykazuje również wcześniej opisanych tendencji wzrostu lub spadku wariancji reszt przy wzroście wartości przewidywanej. Zatem i w tym przypadku, można przyjąć założenie o stałości wariancji reszt (spełnieniu warunku homoscedastyczności).



Rys. 10. Wykres rozrzutu wartości reszt względem wartości przewidywanych dla modelu multiplikatywnego

Źródło: Opracowanie własne

Podsumowując, wyżej wymienione modele regresji wielokrotnej tj. addytywny (10) i multiplikatywny (16) można stwierdzić, że są one równoprawne i nadają się do statystycznej analizy danych parametrów pompy zębatej z punktu widzenia różnego doboru zmiennych niezależnych.

### 3. ANALIZA RESZT MODELU ADDYTYWNEGO I MULTIPLIKATYWNEGO

W celu wykazania zależności między powyższymi modelami zaproponowano graficzne zestawienie wartości resztowych modelu addytywnego i wartości różnic modelu multiplikatywnego. W danej analizie reszt zrezygnowano z klasycznej analizy składnika losowego postaci multiplikatywnej. Pojęcie wartości różnic modelu multiplikatywnego należy tutaj rozumieć jako różnicę między wartością rzeczywistą i przewidywaną (identycznie jak dla modelu addytywnego). Dla ułatwienia interpretacji w obydwu przypadkach zastosowano pojęcie wartości resztowych. Dane wartości przedstawiono w tabeli 2.

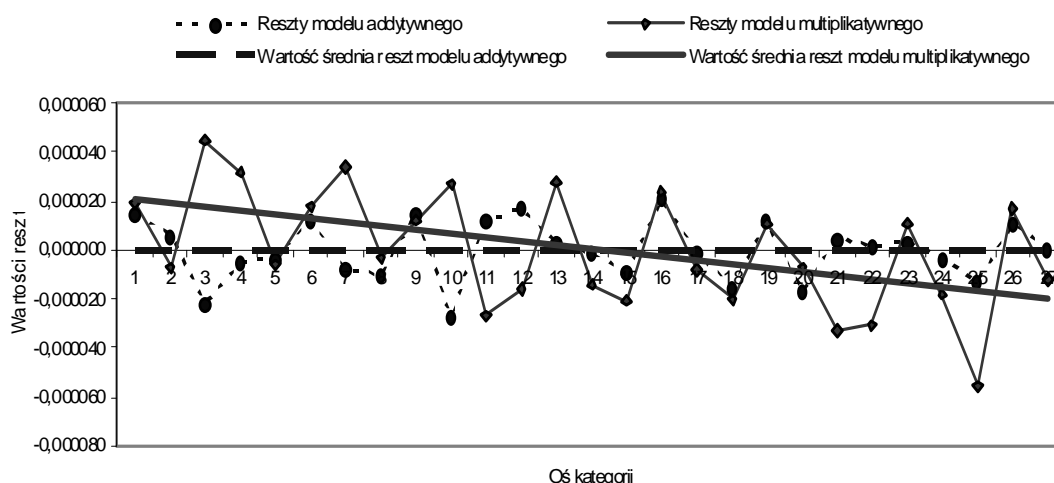
Tabela 2. Zestawienie wartości przewidywanych i reszt dla modelu addytywnego (10) oraz wartości przewidywanych i wartości różnic dla modelu multiplikatywnego (16)

Lp.	Model addytywny		Model multiplikatywny	
	Wartości przewidywane	Reszty	Wartości przewidywane	Reszty
1	0,869842	0,000015	0,869839	0,000019
2	0,863341	0,000006	0,863354	-0,000007
3	0,856403	-0,000022	0,856335	0,000045
4	0,868585	-0,000005	0,868547	0,000032
5	0,865693	-0,000003	0,865696	-0,000006
6	0,860197	0,000012	0,860191	0,000018
7	0,867845	-0,000008	0,867803	0,000034
8	0,866340	-0,000010	0,866333	-0,000003
9	0,861390	0,000015	0,861393	0,000012
10	0,869804	-0,000027	0,869750	0,000027
11	0,867797	0,000012	0,867836	-0,000027
12	0,862867	0,000017	0,862900	-0,000016
13	0,867699	0,000003	0,867673	0,000028
14	0,869238	-0,000001	0,869252	-0,000014
15	0,865717	-0,000009	0,865729	-0,000021
16	0,866642	0,000021	0,866638	0,000024
17	0,869542	-0,000001	0,869549	-0,000008
18	0,866553	-0,000015	0,866558	-0,000020
19	0,865333	0,000012	0,865334	0,000011
20	0,871223	-0,000017	0,871213	-0,000007
21	0,869580	0,000005	0,869618	-0,000033
22	0,861827	0,000002	0,861860	-0,000031
23	0,871117	0,000003	0,871109	0,000011
24	0,870802	-0,000003	0,870818	-0,000018
25	0,860259	-0,000013	0,860303	-0,000056
26	0,870851	0,000011	0,870846	0,000017
27	0,871038	0,000000	0,871050	-0,000012

*Źródło: Opracowanie własne*

Graficzną interpretację tabelarycznego zestawienia danych przedstawia wykres (rys. 11). Na podstawie analizy interpretacji graficznej (rys. 11) zauważalna jest pewna prawidłowość. Linie łączące poszczególne wartości resztowe dwóch modeli regresyjnych w większości przypadków charakteryzują się tą samą monotonicznością. Świadczy to więc o bardzo zbliżonych właściwościach predykcyjnych modelu addytywnego i multiplikatywnego.

Różnice między wartościami średnimi reszt modelu addytywnego i multiplikatywnego są tak małe, że w zasadzie można je pominąć.



Rys. 11. Interpretacja graficzna analizy reszt modelu addytywnego i multiplikatywnego

Źródło: Opracowanie własne

## WNIOSKI

Analiza porównawcza efektywności doboru modelu regresyjnego do statystycznej analizy danych parametrów pompy zębatej została przeprowadzona z uwzględnieniem, następujących warunków:

- rozpatrywane modele regresyjne (addytywny i multiplikatywny) były tego samego stopnia (z punktu widzenia zmiennych niezależnych),
- w dwóch modelach dokonano różnego doboru zmiennych niezależnych.

Podejście tego typu pozwoliło na określenie wpływu typu modelu regresji wielokrotnej z punktu widzenia jego efektywności w wstępnej analizie danego układu maszynowego.

Istnieje oczywiście możliwość doboru innych typów modeli regresyjnych.



Praca powstała dzięki współfinansowaniu ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego

## LITERATURA

- [1] Besler A., Koziarska A., Partyka M. A., *Wybrane zagadnienia minimalizacji funkcji boolowskich w strukturalizacji procesów decyzyjnych*, Studia i Monografie, Nr 129, Oficyna Wydawnicza Politechniki Opolskiej, Opole 2001.
- [2] Damodar N. Gujarati, *Basic Econometrics*, McGraw Hill, New York 2004.
- [3] Joseph F. Hair, William C. Black, Barry J. Babin, Rolph E. Anderson, *Multivariate Data Analysis*, Prentice Hall, New Jersey 2009.
- [4] Kollek W., *Pompy zębate: konstrukcja i eksploatacja*, Zakł. Narod. im. Ossolińskich, Wrocław 1996.

- [5] Luszniwicz A., Słaby T., *Statystyka z pakietem komputerowym STATISTICA PL. Teoria i zastosowania*, C.H. Beck, Warszawa 2008.
- [6] Partyka M. A., Łuszczyna R., *Multiplikatywna regresja wielokrotna dla kryterium kompromisu w optymalizacji dyskretnej na przykładzie pomp zębatych*, *Górnictwo Odkrywkowe* 3/2010, s. 246-250.
- [7] Stanisław A., *Przystępny kurs statystyki z zastosowaniem STATISTICA PL na przykładach z medycyny. Tom 2. Modele liniowe i nieliniowe*, StatSoft Polska, Kraków 2007.
- [8] William H. Greene, *Econometric Analysis*, Prentice Hall, New Jersey 2003.

## **EFFECTIVENESS OF TYPES OF MULTIPLE REGRESSION MODELS IN STATISTICAL DATA ANALYSIS OF GEAR PUMP PARAMETERS**

### **Summary**

*The paper compares the effectiveness of the selection of the additive and multiplicative model for the statistical data analysis of gear pump parameters. On the basis of the analysis of regression residuals, it shows the relationship between the additive and multiplicative method of data mining. Based on the final results, the authors prove the equality of the additive and multiplicative model of multiple regression from the viewpoint of the selection of various independent variables.*

**Key words:** *multiple regression, data analysis, importance rank of parameters, gear pump*

*Artykuł recenzował: prof. dr hab. inż. Andrzej BUCHACZ*