

Andrzej WEREMCZUK
Krzysztof KĘCIK
Rafał RUSINEK
Jerzy WARMIŃSKI

DYNAMIKA PROCESU SKRAWANIA Z NIELINIOWOŚCIĄ DUFFINGA

W artykule przedstawiono jednowymiarowy nieliniowy model skrawania. Do opisu procesu przyjęto model Duffinga z opóźnieniem czasowym. Model rozwiązano analitycznie za pomocą metody wielu skal czasowych. Wykres stabilności otrzymano numerycznie i analitycznie. Wykazano, że obszary stabilności zależą od warunków początkowych układu.

Słowa kluczowe: *oscylator Duffinga, drgania nieliniowe, opóźnienie czasowe, stabilność.*

1. Wstęp

Układy z opóźnieniem czasowym są przedmiotem zainteresowania w modelowaniu procesów w inżynierii, finansach oraz wielu innych dziedzinach [3]. Należą one do grupy układów, w których bieżący stan procesu jest skutkiem poprzedniego stanu, opóźnionego w czasie. Niekiedy, opóźnienie czasowe jest wprowadzane do układu w celu kontroli procesu. Opis matematyczny układów dynamicznych z członem opóźnienia jest zależny od parametru opóźnienia w określony sposób. Równanie różniczkowe z opóźnieniem opisujące układ dynamiczny należy do kategorii opóźnionych funkcyjnie równań różniczkowych (czasami równania nazywane są z ang. *retarded differential-difference equations - RDDE*) [4]. Oscylator Duffinga jest najprostszym modelem dynamicznego zachowania wielu złożonych systemów. Równanie z dodanym członem opóźnienia może być użyte w modelowaniu procesu skrawania [1]. W procesie toczenia cylindryczny przedmiot obrabiany obraca się ze stałą prędkością kątową, a narzędzie kształtuje powierzchnię poprzez usuwanie materiału. Siła skrawania, która jest silną funkcją grubości wióra, staje się również silną zależnością opóźnionego położenia narzędzia $x(t-\tau)$ w stosunku do aktualnego położenia $x(t)$. Tak więc, do opisu tego zjawiska szeroko stosowane są modele z efektem regeneracyjnym drgań narzędzia (z ang. *regenerative chatter*).

Wiele zjawisk występujących podczas obróbki skrawaniem wpływa niekorzystnie na przebieg procesu obróbki, a także na trwałość narzędzia oraz jakość powierzchni obrabianej. Główną przyczyną tych niekorzystnych zjawisk są drgania samowzbudne wywołane efektem regeneracyjnym. Efekt ten spowodowany jest przez nakładanie się śladu otrzymanego w poprzednim przejściu narzędzia ze śladem z bieżącego przejścia. Badania zostały przeprowadzone w celu zwiększenia wydajności procesów obróbki skrawaniem, możliwości przewidywania i unikania drgań regeneracyjnych.

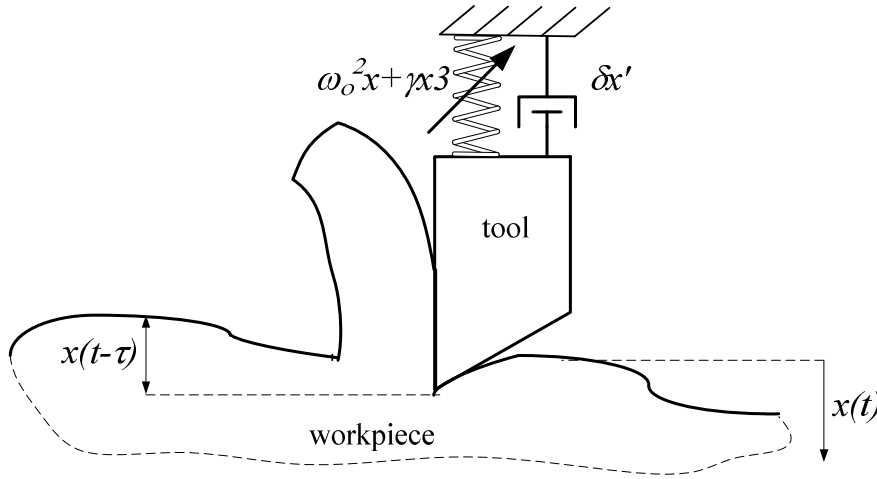
W artykule przedstawiono model skrawania o jednym stopniu swobody opisany równaniem Duffinga z opóźnieniem czasowym. Przeprowadzono badania analityczne oraz weryfikację numeryczną zjawiska chatteru. W oparciu o symulację numeryczną zbudowano wykres stabilności i porównano go z wynikami numerycznymi. Rozwiązanie analityczne otrzymano stosując metodę wielu skal czasowych (z ang. *method of multiple scales - MMS*). Metodę tę użyto w badaniach nad podobnym modelem Duffinga z opóźnieniem czasowym oraz wymuszeniem zewnętrznym [10].

2. Model skrawania

W tej części, w celu modelowania efektu regeneracyjnego podczas procesu skrawania, połączono klasyczny oscylator Duffinga z członem opóźnienia czasowego [5]. Następnie przedstawiono model regeneracyjny procesu skrawania z nieliniową sztywnością (Rys. 1). Drgania występujące podczas obróbki skrawaniem mogą być opisane równaniami różniczkowymi z opóźnionym argumentem w postaci

$$x''(t) + \delta x'(t) + \omega_0^2 x(t) + \gamma x(t)^3 = \alpha [-\mu x(t) + x(t - \tau)], \quad (1)$$

gdzie: δ jest współczynnikiem tłumienia, γ jest nieliniową sztywnością, ω_0 jest częstością drgań własnych układu liniowego. Siła skrawania opisana jest po prawej stronie równania (1) gdzie, α jest współczynnikiem siły skrawania, τ jest opóźnieniem czasowym, μ jest parametrem przełączającym, który w modelu regeneracyjnym skrawania równy jest jeden. Wyrażenie z opóźnieniem czasowym odpowiada za rozwiązanie wynikające z poprzedniego stanu.



Rys. 1. Model regeneracyjny procesu skrawania ze sztywnością Duffinga

Drgania typu chatter są głównym problemem występującym podczas obróbki skrawaniem [2, 6, 11], dlatego zostały poddane analizie. W celu znalezienia obszarów stabilnego skrawania oraz amplitudy drgań typu chatter znajdujących się w niestabilnych obszarach rozwiązano analitycznie i numerycznie równanie (1) oraz zbadano wpływ parametrów procesu, a następnie przedstawiono w kolejnej części.

3. Rozwiązanie analityczne

Układ opisany równaniem (1) rozwiązano analitycznie przy pomocy metody wielu skal czasowych [8, 9], badania ograniczono do przypadku małego tłumienia oraz słabej nieliniowości. Założono dwie skale (szybką i wolną) rozwinięć rozwiązania. Skala szybka T_0 oraz skala wolna T_1 zostały opisane równaniem (2), następnie rozwiązanie w pierwszym przybliżeniu poszukiwano w postaci (3) oraz (4):

$$T_0 = t, T_1 = \epsilon t, \quad (2)$$

$$x(t) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1), \quad (3)$$

$$x(t - \tau) = x_\tau = x_{0\tau}(T_0, T_1) + \epsilon x_{1\tau}(T_0, T_1). \quad (4)$$

Zakładając, że

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \varepsilon\sigma, \gamma = \varepsilon\tilde{\gamma}, \alpha = \varepsilon\tilde{\alpha}, \delta = \varepsilon\tilde{\delta}, \quad (5)$$

gdzie ε jest formalnie małym parametrem [7]. Dalej, w celu ułatwienia zapisu, pominięto znak tyldy. Pochodne czasowe przekształcono do postaci (6) i (7):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_1 \partial T_0} + \dots = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_1} + \dots \quad (7)$$

Podstawiając równania (2)-(7) do (1) otrzymano

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x(t)}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon \delta \frac{\partial x(t)}{\partial T_0} + [\omega^2 + \varepsilon\sigma]x(t) + \varepsilon\gamma x(t)^3 = \varepsilon\alpha[-\mu x(t) + x(t-\tau)]. \quad (8)$$

Rozwijając pochodne z równania (8) otrzymano (12):

$$\frac{\partial x(t)}{\partial T_0} = \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial x_1}{\partial T_0}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial T_0^2} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial T_0 \partial T_1} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \varepsilon \delta \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + \omega^2 x_0 + \varepsilon\omega^2 x_1 + \varepsilon\sigma x_0 + \varepsilon\gamma x_0^3 = \varepsilon\alpha(-\mu x_0 + x_{0\tau}). \quad (12)$$

Przyrównując współczynniki przy potęgach ε^0 i ε^1 , uzyskano:

$$\varepsilon^0 \Rightarrow \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + \omega^2 x_0 = 0, \quad (13)$$

$$\varepsilon^1 \Rightarrow \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \delta \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + \sigma x_0 + \omega^2 x_1 + \gamma x_0^3 + \mu \alpha x_0 - \alpha x_{0\tau} = 0. \quad (14)$$

Dla ułatwienia rozwiązanie zależności (13) przedstawiono w postaci zespolonej (15) i (16):

$$x_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}, \quad (15)$$

$$x_{0\tau}(T_0, T_1) = A(T_1)e^{i(T_0-\tau)} + \bar{A}(T_1)e^{-i(T_0-\tau)}, \quad (16)$$

gdzie \bar{A} jest funkcją sprzężoną do A , która jest dowolną funkcją zależną od T_1 . Podstawiając równania (15) i (16) do wyrażenia (14) oraz rozwijając pochodne otrzymano:

$$\frac{\partial x_0}{\partial T_0} = A(T_1)ie^{iT_0} - \bar{A}(T_1)ie^{-iT_0}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} = A'(T_1)ie^{iT_0} - \bar{A}'(T_1)ie^{-iT_0}, \quad (18)$$

oraz następnie otrzymano kolejną zależność:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega^2 x_1 + 2[A'(T_1)ie^{iT_0} - \bar{A}'(T_1)ie^{-iT_0}] + \delta[A(T_1)ie^{iT_0} - \bar{A}(T_1)ie^{-iT_0}] + \\ & \sigma[A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}] + \gamma[A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}]^3 + \mu\alpha[A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}] - \\ & \alpha[A(T_1)e^{i(T_0-\tau)} + \bar{A}(T_1)e^{-i(T_0-\tau)}] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Następnie wyrażenie (19) przedstawiono w końcowej formie:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega^2 x_1 + \gamma A(T_1)^3 e^{3iT_0} + \gamma \bar{A}(T_1)^3 e^{-3iT_0} + \\ & [-\alpha A(T_1)e^{-i\tau} + i\delta A(T_1) + \mu\alpha A(T_1) + \sigma A(T_1) + 3\gamma A(T_1)^2 \bar{A}(T_1) + 2iA'(T_1)] e^{iT_0} + \\ & [-\alpha \bar{A}(T_1)e^{-i\tau} - i\delta \bar{A}(T_1) + \mu\alpha \bar{A}(T_1) + \sigma \bar{A}(T_1) + 3\gamma A(T_1) \bar{A}(T_1)^2 - 2i\bar{A}'(T_1)] e^{-iT_0} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Człony sekularne z równania (20) zostają wyeliminowane wtedy i tylko wtedy, gdy równania (21) są spełnione. Prowadzi to do zależności (22) i (23):

$$ST_1 e^{iT_0} = 0, ST_2 e^{-iT_0} = 0, \quad (21)$$

$$-\alpha A(T_1)e^{-i\tau} + i\delta A(T_1) + \mu\alpha A(T_1) + \sigma A(T_1) + 3\gamma A(T_1)^2 \bar{A}(T_1) + 2iA'(T_1) = 0, \quad (22)$$

$$-\alpha \bar{A}(T_1)e^{-i\tau} - i\delta \bar{A}(T_1) + \mu\alpha \bar{A}(T_1) + \sigma \bar{A}(T_1) + 3\gamma A(T_1) \bar{A}(T_1)^2 - 2i\bar{A}'(T_1) = 0. \quad (23)$$

gdzie ST_1 i ST_2 są wyrażeniami generującymi człony sekularne.

Eliminując z równania (20) człony sekularne otrzymano zależność (24)

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \omega^2 x_1 + \gamma A(T_1)^3 e^{3iT_0} + \gamma \bar{A}(T_1)^3 e^{-3iT_0} = 0. \quad (24)$$

Zakładając rozwiązanie (24) postaci:

$$x_1(T_0, T_1) = B(T_1)e^{3iT_0} + \bar{B}(T_1)e^{-3iT_0}, \quad (25)$$

$$x_{1\tau}(T_0, T_1) = B(T_1)e^{3i(T_0-\tau)} + \bar{B}(T_1)e^{-3i(T_0-\tau)}, \quad (26)$$

gdzie:

$$B(T_1) = -\frac{\gamma A(T_1)^3}{\omega^2 - 9}, \quad (27)$$

$$\bar{B}(T_1) = -\frac{\gamma \bar{A}(T_1)^3}{\omega^2 - 9}, \quad (28)$$

otrzymano:

$$x_1(T_0, T_1) = -\frac{\gamma A(T_1)^3}{\omega^2 - 9} e^{3iT_0} - \frac{\gamma \bar{A}(T_1)^3}{\omega^2 - 9} e^{-3iT_0}, \quad (29)$$

$$x_{1\tau}(T_0, T_1) = -\frac{\gamma A(T_1)^3}{\omega^2 - 9} e^{3i(T_0-\tau)} - \frac{\gamma \bar{A}(T_1)^3}{\omega^2 - 9} e^{-3i(T_0-\tau)}. \quad (30)$$

Podstawiając w równaniach (22) i (23) amplitudę w postaci biegunowej:

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\beta(T_1)}, \quad (31)$$

$$\bar{A}(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) e^{-i\beta(T_1)}, \quad (32)$$

$$A'(T_1) = \frac{1}{2} a'(T_1) e^{i\beta(T_1)} + \frac{1}{2} ia(T_1) \beta'(T_1) e^{i\beta(T_1)}, \quad (33)$$

$$\bar{A}'(T_1) = \frac{1}{2} a'(T_1) e^{-i\beta(T_1)} - \frac{1}{2} ia(T_1) \beta'(T_1) e^{-i\beta(T_1)}. \quad (34)$$

w rezultacie otrzymano:

$$-\frac{1}{2} \alpha a(T_1) e^{-i\tau+i\beta(T_1)} + \frac{1}{2} i \delta a(T_1) e^{i\beta(T_1)} + \frac{1}{2} \mu \alpha a(T_1) e^{i\beta(T_1)} + \frac{1}{2} \sigma a(T_1) e^{i\beta(T_1)} + \frac{3}{8} \gamma a(T_1)^3 e^{i\beta(T_1)} + 2i \left[\frac{1}{2} a'(T_1) e^{i\beta(T_1)} + \frac{1}{2} ia(T_1) \beta'(T_1) e^{i\beta(T_1)} \right] = 0, \quad (35)$$

$$-\frac{1}{2} \alpha a(T_1) e^{i\tau-i\beta(T_1)} - \frac{1}{2} i \delta a(T_1) e^{-i\beta(T_1)} + \frac{1}{2} \mu \alpha a(T_1) e^{-i\beta(T_1)} + \frac{1}{2} \sigma a(T_1) e^{-i\beta(T_1)} + \frac{3}{8} \gamma a(T_1)^3 e^{-i\beta(T_1)} - 2i \left[\frac{1}{2} a'(T_1) e^{-i\beta(T_1)} - \frac{1}{2} ia(T_1) \beta'(T_1) e^{-i\beta(T_1)} \right] = 0. \quad (36)$$

Po przekształceniach (35) uzyskano (37)

$$-\frac{1}{2} \alpha a(T_1) e^{-i\tau} + \frac{1}{2} i \delta a(T_1) + \frac{1}{2} \mu \alpha a(T_1) + \frac{1}{2} \sigma a(T_1) + \frac{3}{8} \gamma a(T_1)^3 + ia'(T_1) - a(T_1) \beta'(T_1) = 0. \quad (37)$$

Następnie zastępując

$$e^{-i\tau} = \cos \tau - i \sin \tau. \quad (38)$$

Otrzymano normalną postać:

$$-\frac{1}{2} \alpha a(T_1) \cos \tau + \frac{1}{2} i \alpha a(T_1) \sin \tau + \frac{1}{2} i \delta a(T_1) + \frac{1}{2} \mu \alpha a(T_1) + \frac{1}{2} \sigma a(T_1) + \frac{3}{8} \gamma a(T_1)^3 + ia'(T_1) - a(T_1) \beta'(T_1) = 0. \quad (39)$$

Rozdzielając część rzeczywistą i urojoną, znaleziono dwa wyrażenia nazywane równaniami modulacyjnymi:

$$\frac{1}{2} \delta a(T_1) + \frac{1}{2} \alpha a(T_1) \sin \tau + a'(T_1) = 0 \quad (40)$$

$$\frac{1}{2} \mu \alpha a(T_1) + \frac{1}{2} \sigma a(T_1) + \frac{3}{8} \gamma a(T_1)^3 - \frac{1}{2} \alpha a(T_1) \cos \tau - a(T_1) \beta'(T_1) = 0. \quad (41)$$

Przekształcając, uzyskano równania modulacyjne do postaci (42) i (43):

$$a'(T_1) = -\frac{1}{2} \delta a(T_1) - \frac{1}{2} \alpha a(T_1) \sin \tau, \quad (42)$$

$$\beta'(T_1) = \frac{3}{8} \gamma a(T_1)^2 + \frac{1}{2} \mu \alpha + \frac{1}{2} \sigma - \frac{1}{2} \alpha \cos \tau. \quad (43)$$

W przypadku rozwiązań okresowych $a'=0$ i $\beta'=0$ częstość chatteru (ω) oraz amplituda (a) podana jest w następujący sposób:

$$\omega = \sqrt{\omega_0 + \alpha \mu - \alpha \cos \tau} \quad (44)$$

$$a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{\sqrt{(\alpha^2 - \delta^2)} - \alpha \cos \tau}{\gamma}} \quad (45)$$

$$a_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{-\sqrt{(\alpha^2 - \delta^2)} + \alpha \cos \tau}{\gamma}} \quad (46)$$

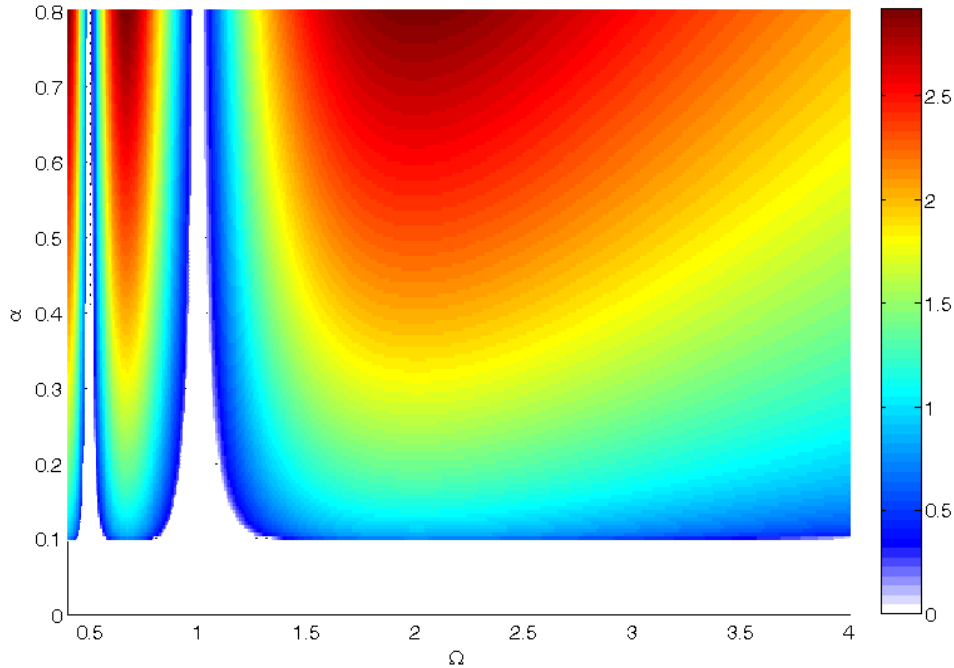
Częstość chatteru (ω) wyrażona równaniem (44) zależy tylko od parametrów opóźnienia α , τ oraz częstości drgań własnych układu liniowego ω_0 . Interesujące jest, że współczynnik nieliniowości (γ) i amplituda drgań nie wpływa na częstość. Amplituda drgań chatteru w stanie ustalonym istnieje, kiedy

$$\alpha^2 - \delta^2 > 0 \quad (47)$$

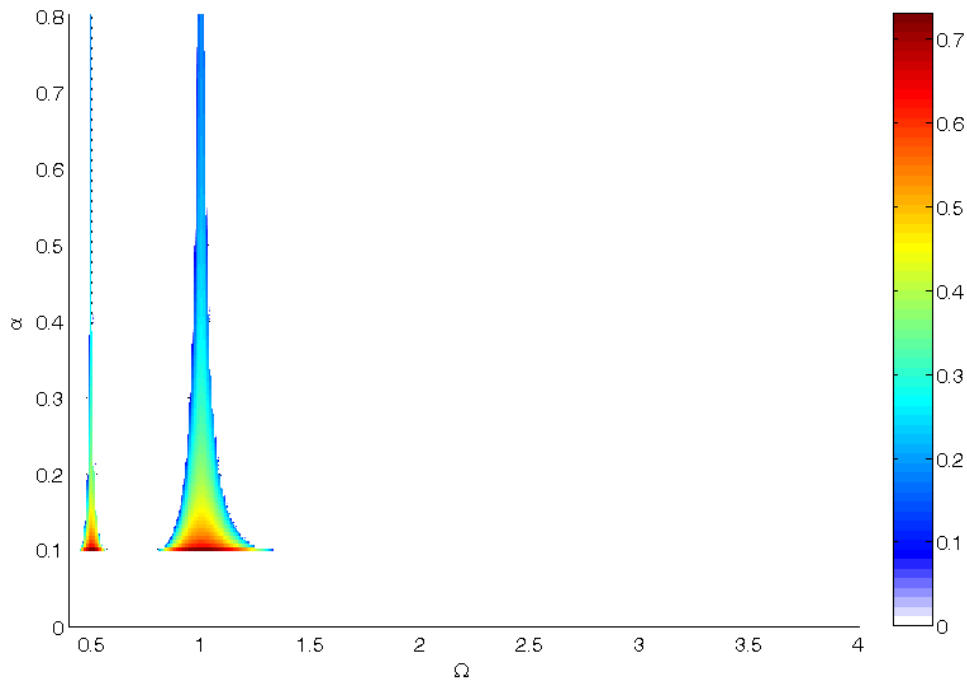
Zakładając, że parametry układu są zawsze dodatnie, tylko $\alpha > \delta$ powoduje rozwiązanie okresowe. Następnie dla wartości krytycznej α można wprowadzić $\alpha_{cr} = \delta$. Z drugiej strony, amplituda drgań jest równa zero, gdy parametry układu spełniają warunek:

$$\sqrt{(\alpha^2 - \delta^2)} - \alpha \cos \tau = 0 \quad (48)$$

Amplitudy a_1 i a_2 reprezentowane równaniem (45) oraz (46) przedstawiono na Rys. 2 i 3 jako mapy, gdzie kolor obrazuje wartość amplitudy drgań.



Rys. 2. Rozwiązanie analityczne amplitudy a_1 dla stabilnego rozwiązania okresowego przedstawionego równaniem (45) w funkcji Ω i α



Rys. 3. Rozwiązanie analityczne amplitudy a_2 dla stabilnego rozwiązania okresowego przedstawionego równaniem (46) w funkcji Ω i α

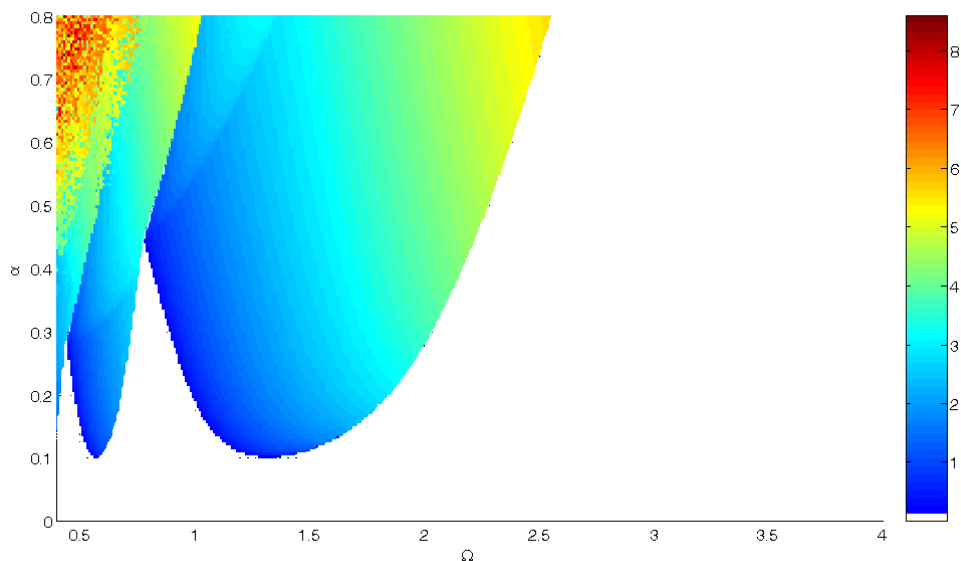
Drugie rozwiązanie istnieje tylko w wąskich obszarach, w których pierwsze rozwiązanie nie istnieje. Oznacza to, że gdy warunek (47) jest spełniony to rozwiązane okresowe autonomicznego układu Duffinga z opóźnieniem nie zależy od opóźnienia czasowego. Podczas, gdy warunek (48) jest spełniony (amplituda równa jest zero) dokładnie na granicy wykresu przedstawionego na Rys. 2.

W następnym rozdziale wykonano symulacje numeryczne, aby sprawdzić, czy pojawią się rozwiązania przedstawione w tej części.

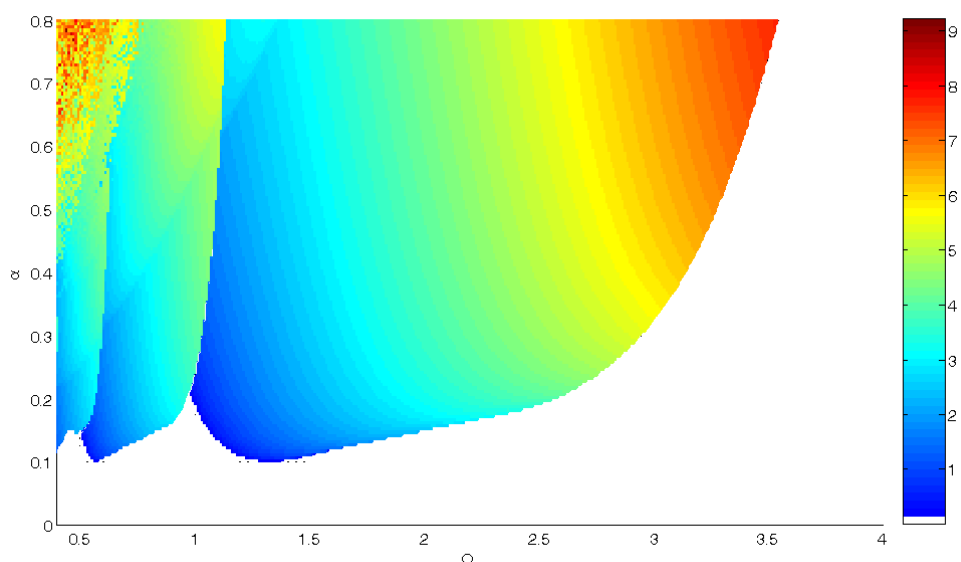
4. Wyniki numeryczne

Ponieważ, jak wykazano w poprzednim rozdziale, drgania typu chatter mogą istnieć zawsze, kiedy α przekracza $\alpha_c = \delta$. Najbardziej interesujące, z praktycznego punktu widzenia, są warunki początkowe, które sprzyjają uzyskaniu wysokich amplitud drgań. Dlatego, bazując na równaniu różniczkowym (1) wykonano symulacje numeryczne w środowisku Matlab-Simulink przy użyciu metody Rungego-Kutty czwartego rzędu ze zmiennym krokiem całkowania. Przyjęto następujące parametry układu: $\gamma=0.25$, $\delta=0.1$, $\omega_0=1$, $\mu=1$. Wartości amplitud drgań przedstawiono na Rys. 4 i 5 jako kolorowe mapy w funkcji dwóch parametrów $\Omega = 2\pi / \tau$ oraz α .

Amplitudy drgań typu chatter są bardzo wrażliwe na warunki początkowe, dlatego obszar niestabilnego skrawania jest bardziej szeroki w przypadku warunku początkowego $x(0)=3.5$ niż $x(0)=0.5$. Ponadto amplitudy drgań są wyższe. Tylko $\alpha < \delta$ gwarantuje, że obróbka skrawaniem będzie odbywała się bez drgań typu chatter, niezależnie od warunków początkowych.



Rys. 4. Kolorowa mapa amplitudy w funkcji Ω i α dla warunku początkowego $x(0)=0.5$



Rys. 5. Kolorowa mapa amplitudy w funkcji Ω i α dla warunku początkowego $x(0)=3.5$

5. Dyskusja i wnioski końcowe

Ponieważ drgania typu chatter są głównym problemem występującym w procesie skrawania, dlatego też podstawowym celem jest poszukiwanie zakresu parametrów technologicznych, w których proces skrawania jest stabilny. Liniowy model obróbki skrawaniem z efektem regeneracyjnym jest dobrze znany i jego rozwiązanie analityczne nie powodują trudności. Jednak w przypadku układu nieliniowego może istnieć więcej niż jedno rozwiązanie, a także mogą istnieć rozwiązania quasi-okresowe, subharmoniczne, a nawet chaotyczne. Zależy to oczywiście od parametrów układu oraz warunków początkowych. Rozwiązania przedstawione na Rys. 2 i 3 obrazują tylko stabilne rozwiązania okresowe. Co ciekawe, dla analizowanego układu przy analizowanych parametrach nie występują stabilne obszary charakterystyczne dla liniowego modelu regeneracyjnego. W modelu nieliniowym

dla każdego opóźnienia czasowego istnieją drgania typu chatter, jeżeli amplituda opóźnienia $\alpha < \alpha_{cr}$. Przedstawiona w pracy analiza numeryczna jest uzupełnieniem badań analitycznych. Analiza numeryczna umożliwi znalezienie takich obszarów warunków początkowych, które nie wywołują drgań typu chatter. Obszary te są bardzo ważne z praktycznego punktu widzenia, ponieważ umożliwiają wyznaczenie bezpiecznego zestawu parametrów (Ω , α) zapewniającego utrzymanie układu w odpowiedniej zbiorze warunków początkowych.

Podziękowania

Praca jest finansowana w ramach projektu Narodowego Centrum Nauki, zgodnie z decyzją nr. DEC-2011/01/B/ST8/07504.

Literatura

1. Bobrenkov A O, Khasawneh A F, Butcher A E, Mann P B. Analysis of Milling Dynamics for Simultaneously Engaged Cutting Teeth. *Journal of Sound and Vibration* 2010; 329: 585-606.
2. Butcher A E, Bobrenkov A O, Bueler E, Nindujarla P. Analysis of Milling Stability by the Chebyshev Collocation Method; Algorithm and Optimal Stable Immersion Levels. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 2009; 4: 31003-1.
3. Gorceki H, Fuksa S, Grabowski P, Korytowski A, Analysis and Synthesis of Time Delay Systems, John Wiley & Sons, 1989.
4. Hale JK, Theory of Functional Differential Equations, Springer, New York, 1977.
5. Hu H, Dowell E H, Virgin L N. Resonances of a Harmonically Forced Duffing Oscillator with Time Delays State Feedback. *Nonlinear Dynamics* 1998; 15(311): 327.
6. Hu H Y, Wang Z H. Singular Perturbation Methods for Nonlinear Dynamic Systems with Time Delays. *Chaos, Solitons and Fractals* 2009; 40(1): 13-27.
7. Nayfeh A H, Chin C M, Pratt J. Perturbation Methods in Nonlinear Dynamics- Applications to Machining Dynamics. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 1997; 119: 485-493.
8. Nayfeh A H, Perturbation Methods. Wiley Interscience. New York 1973.
9. Nayfeh A H. Introduction to Perturbation Techniques. Wiley Interscience. New York 1981.
10. Rusinek R, Weremczuk A, Warmiński J. Regenerative Model of Cutting Process with Nonlinear Duffing Oscillator. *Mechanics and Mechanical Engineering* 2011; 15: 4.
11. Shaw M C. Metal Cutting Principles. Oxford University Press. New York 1984.

mgr inż. Andrzej Weremczuk
dr inż. Krzysztof Kęcik
dr inż. Rafał Rusinek
prof. dr hab. inż. Jerzy Warmiński
Wydział Mechaniczny
Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 36, 20-816 Lublin
e-mail: j.warminski@pollub.pl
e-mail: r.rusinek@pollub.pl
e-mail: k.kecik@pollub.pl
e-mail: a.weremczuk@pollub.pl