

APROKSYMACJA I ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA SYGNAŁÓW W ZAMKNIĘTYM PRZEDZIALE CZASOWYM

Waldemar PROCH

Katedra Podstaw Techniki

Uniwersytet Warmiński - Mazurski, Wydział Nauk Technicznych, 10-266 Olsztyn, ul. Okrzei 1a.
fax: (089) 5266-380, email: waldemar.proch@moskit.uwm.edu.pl

Streszczenie

Aproksymacja sygnałów, w przedziale czasowym z użyciem klasycznego szeregu Fouriera, prowadzi do generacji segmentów dodatkowych sygnału w przedziałach okresowo rozmieszczonych na osi czasu. Na granicach przedziałów powstają wówczas nieciągłości, w których pobliżu błędy aproksymacji osiągają niedopuszczalnie duże wartości. W pracy przedstawiono wielomiany, zawierające szeregi trygonometryczne, które posiadają właściwości zmniejszania błędów aproksymacji w punktach granicznych, praktycznie do wartości równej zero. Błędy aproksymacji ograniczono przez dobór funkcji tworzących wielomiany, wykorzystanie efektu kompensacji błędów w punktach granicznych oraz wprowadzenie poprawki korygującej błędy obliczeniowe wewnątrz analizowanego przedziału. Wielomiany umożliwiają wykonanie aproksymacji sygnałów nieokresowych w połączeniu z filtracją zakłóceń, analizy częstotliwościowej o właściwościach porównywalnych z DFT, oraz analizy czasowo-częstotliwościowej.

Słowa kluczowe: sygnał niestacjonarny, aproksymacja trygonometryczna, analiza częstotliwościowa, analiza czasowo-częstotliwościowa sygnałów.

APPROXIMATION AND FREQUENCY ANALYSIS OF SIGNALS INSIDE OF TIME INTERVAL

Summary

Signals approximation, using classical trigonometric series leads to generation of additional segments of signal. Then on interval limits discontinuities occur near which approximation errors acquire inadmissible high values. In the paper were presented polynomials including trigonometric series which have properties of diminishing approximation errors in limiting points practically to zero. Approximation errors were reduced by choice of functions forming polynomials, taking advantage of effect of error compensation in limiting points as well as introducing correction of analytical errors. Polynomials enable doing approximation of aperiodic signals in connection with filtration, frequency analysis of values comparable to DFT, and time – frequency analysis.

Key words: nonstationary signal, trigonometric approximation, frequency analysis, time – frequency analysis of signals.

1. APROKSYMACJA SYGNAŁÓW W PRZEDZIALE ZAMKNIĘTYM

Funkcję $h(\tau)$ opisującą sygnał narastający lub malejący naprzemiennie, od wartości równej zero w przedziałach czasu mikro τ_i , które składają się na przedział czasu rzeczywistego $\tau \in \langle 0, T \rangle$, można przedstawić, jak to zostało wykazane w pracy [1] sumą

$$h(\tau) = h(T)H_1(\tau) + (\chi^+ + \chi^-)H_2(\tau) \quad (1)$$

lub sumą

$$g(p) = g(1)H_1(p) + (\chi^+ + \chi^-)H_2(p), \text{ dla } 0 \leq p \leq 1, \quad (2)$$

gdzie, $p = \tau/T$, $\chi^+ + \chi^-$ są to sumy wartości składowych rosnących ze znakiem $^+$ oraz składowych malejących ze znakiem $^-$, określonych w punktach granicznych przedziałów dla $\tau_i = T_i$. $H_1(\tau)$ jest funkcją rosnącą (nie malejącą) w przedziale czasu τ , $H_1(0)=0$, $H_1(T)=1$, odpowiednio $H_1(p)$ przyjmuje wartości $H_1(0)=0$, $H_1(1)=1$. $H_2(\tau)$ jest funkcją na przemian rosnącą lub malejącą w przedziałach czasu mikro, która przyjmuje wartości $H_2(0)=0$, $H_2(T)=0$, w punktach granicznych przedziału τ , a funkcja $H_2(p)=0$ odpowiednio w punktach $p=0$, $p=1$

Wyrażenia aproksymujące sygnał w przedziale powinny zawierać składniki odpowiadające

właściwościom funkcji H_1, H_2 . Odpowiednikami H_1 są wielomiany i funkcje, a wśród nich najprostsze $\varphi_1 = p$, lub $\varphi_1 = 1/2(1 - \cos \pi p)$. Właściwościom funkcji H_2 odpowiada szereg trygonometryczny sinusów, o postaci sumy

$$\varphi_2(p) = \sum_{k=1} a_k \sin k\pi p, \quad (3)$$

złożonej z funkcji ortogonalnych w przedziale $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Użycie funkcji $g(p)$ w postaci (2) pozwala sprowadzić do wartości równej zero błąd aproksymacji sygnału $f(x)$ w punktach granicznych przedziału x .

W pracy użyto funkcji aproksymujących

$$f(x) = f(a) + g(p) = f(a) + (g(1)/2)(1 - \cos \pi p) + \sum_{k=1} a_k \sin k\pi p \quad (4)$$

W odniesieniu do wyrażenia (4) użyto nazwy wielomian 1

Właściwości funkcji $g(p)$ mają funkcje z_k utworzone metodą Grama-Schmidta na bazie zbioru funkcji $(1 - \cos k\pi p)$. Ortonormalne funkcje bazowe z_k [2] mają postać szeregu

$$z_k = \sqrt{\frac{2}{4k^2 - 1}} \left(1 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ k>1}}^{k-1} \cos \pi i p - (2k-1) \cos \pi k p \right) \quad (5)$$

a szereg funkcji z_k postać

$$\varphi(p) = \sum_{k=1} c_k z_k \quad (6)$$

Są to funkcje, których iloczyny skalarne spełniają równość

$$(z_k, z_l) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \neq l \\ 1, & \text{dla } k = l \end{cases} \quad (7)$$

Wartość $z_k(0) = 0$, a wartość $z_k(1)$ jest dodatnia dla k nieparzystych i ujemna dla k parzystych. Wartość bezwzględna $z_k(1)$ dla dostatecznie dużych wartości k dąży do granicy ciągu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_k(1)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{8k^2}{4k^2 - 1}} = \sqrt{2}. \quad (8)$$

Wielomian złożony z szeregu sinusów i szeregu funkcji z_k zastosowany w przedstawionej pracy ma postać

$$f(x) = f(a) + 1/2 \left(\sum_{k=1} a_k \sin k\pi p + \sum_{k=1} c_k z_k \right) + b(p). \quad (9)$$

W odniesieniu do wyrażenia (9) użyto nazwy wielomian 3.

Ponadto utworzono sumę szeregów sinusów i kosinusów, tworzącą szereg aproksymujący o postaci

$$f(x) = 1/2 \left(\sum_{k=1} a_k \sin k\pi p + \sum_{k=1} b_k \cos k\pi p \right) + av + b(p) \quad (10)$$

gdzie: av jest składową o wartości stałej, $b(p)$ jest błędem aproksymacji o wartości średniej równej zero.

W odniesieniu do wyrażenia (10) używane jest określenie wielomian 2

2. ANALIZA CZĘSTOTLIWOŚCIOWA Z ZASTOSOWANIEM WIELOMIANÓW

Wartości bezwzględne, lub moduły współczynników szeregów (4), (9), (10) wyznaczają widmo amplitudowe badanych sygnałów. Liczba składowych widma równa jest $m = n-1$, gdzie n jest liczbą próbek sygnału. Częstotliwość odpowiadającą składowej widma o liczbie $k=1$: m wyznacza wzór:

$$f(k) = k/2T. \quad (11)$$

Współczynniki szeregu (4) obliczamy ze wzoru:

$$a_k = a(k) = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n (f_g(x)) \sin k\pi p, \quad (12)$$

gdzie

$$f_g(x) = \frac{f(x) - f(a) - g(1)(1 - \cos \pi p)}{2}, p = (x-a)/(b-a) = (i-1)/(n-1)$$

Współczynniki szeregu (9) obliczamy ze wzorów:

$$c_k = c(k) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(x) - f(a)) z_k \quad (13)$$

$$a_k = a(k) = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(x) - f(a)) \sin k\pi p$$

gdzie $z_k = z(k)$.

Współczynniki szeregu (10) obliczamy ze wzorów:

$$a_k = a(k) = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(x)) \sin k\pi p$$

$$b_k = b(k) = \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^n (f(x)) \cos k\pi p \quad (14)$$

$$av = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(f(x) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (a(k) \sin k\pi p + b(k) \cos k\pi p) \right)$$

Widmo amplitudowe wyznaczone współczynnikami (14) jest w porównaniu do DFT asymetryczne i składa się z $n-1$ niezależnych wartości. Funkcja okresowa poprawki $b(p)$ ma stałą amplitudę.

3. ANALIZA CZASOWO-CZĘSTOTLIWOŚCIOWA

Zawsze, kiedy analizujemy przebieg czasowy zbudowany z odcinków różniących się częstotliwościami sygnału, otrzymujemy widmo

o składowych bez ich lokalizacji w czasie [3]. Do przeniesienia analizy na płaszczyznę czasowo-częstotliwościową z użyciem przedstawionych w rozdziale 2 wielomianów, opracowano dwa sposoby postępowania.

1). Ponieważ wielomiany (4), (9), (10) zawierają informacje o sumie $n-1$ składowych w czasie, powstaje 1-wymiarowy wykres czasowy przebiegu aproksymującego. Po wprowadzeniu sum o stopniowanej od 1 do $n-1$ liczbie składowych, otrzymamy zbiór wielomianów w przestrzeni 2 - wymiarowej. Zbiór będzie zawierał informacje o czasowo-częstotliwościowej strukturze przebiegu.

2). Podobnie w wyrażeniach (12), (13), (14) mamy informacje o wartości współczynników w odniesieniu do punktu końcowego przedziału czasowego. Otrzymujemy 1-wymiarowe widmo amplitudowe. Po wprowadzeniu do wzorów sum częściowych obliczanych na odcinkach czasowych o stopniowanej od 1 do n liczbie próbek, otrzymamy zbiór wartości odnoszący się do przeszłości współczynników. Zbiór będzie zawierał informacje o czasowo-częstotliwościowej budowie współczynników.

4. PRZYKŁADY ANALIZY

4.1. Porównanie błędów aproksymacji funkcji wykładniczej

Do porównań wybrano klasyczny szereg o postaci przystosowanej do zmiennej p ,

$$F(i) = a_0 + \sum_{k=1} a_k \sin 2k\pi p(i) + \sum_{k=1} b_k \cos 2k\pi p(i),$$

gdzie:

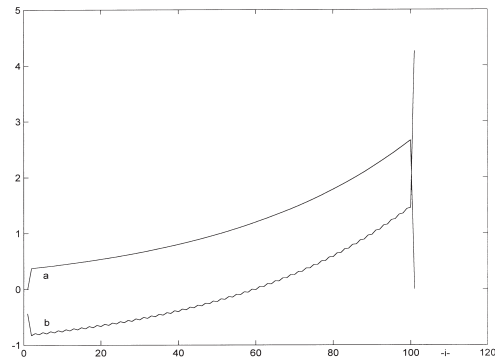
a_0 jest wartością średnią aproksymowanego przebiegu, $0 \leq p(i) = (i-1)/(n-1) \leq 1$, dla $n = 101$, oraz wielomiany 1, 2, 3 opisane wzorami podanymi w rozdziale 1. Sygnał aproksymowany przedstawiony jest funkcją $s(i) = \exp(2p(i) - 1)$.

Po wykonaniu obliczeń w programie Matlab otrzymano następujące wartości średniokwadratowego błędu aproksymacji M : dla szeregu klasycznego $M=0.17419$, $k=50$, dla wielomianu 1, $M=3.9101e-015$, $k=100$, dla wielomianu 2, $M=9.0881e-015$, $k=100$, dla wielomianu 3, $M=6.8926e-015$, $k=100$.

Małe wartości błędów aproksymacji z użyciem wielomianów 2 i 3 są wynikiem kompensacji błędów granicznych, wnoszonych przez szeregi i wprowadzenie poprawek w postaci funkcji. Na rysunku 1 pokazano jak powstaje efekt kompensacji błędów w punktach granicznych dla funkcji wykładniczej aproksymowanej wielomianem 2 złożonym z sumy szeregów sinusów i kosinusów.

Dla wielomianu 3 błąd aproksymacji w punkcie początkowym jest równy zeru, w punkcie końcowym przedziału czasowego występuje kompensacja błędu, dodatkowo błąd zmniejszono okresową funkcją poprawki.

Wielomian 1 nie wymaga wprowadzania funkcji poprawki. Obliczenia z jego użyciem trwają krócej w porównaniu do pozostałych wielomianów.



Rys. 1. Kompensacja błędów aproksymacji funkcji wykładniczej wielomianem 2:

- wartości sum szeregu sinusów,
- wartości sum szeregu kosinusów.

4.2. Analiza czasowo-częstotliwościowa sygnału zawierającego 2 częstotliwości

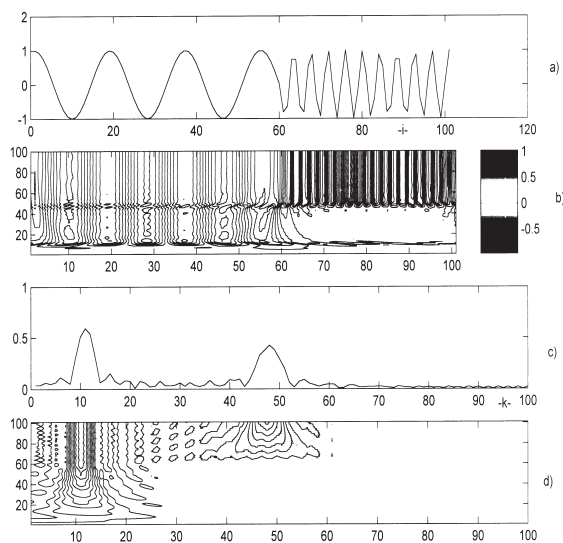
Funkcje harmoniczne tworzące szeregi sinusów lub kosinusów w wielomianach trygonometrycznych 1, 2, 3 są wygodnym narzędziem w zastosowaniu do analizy częstotliwościowej sygnałów. Struktura wielomianów umożliwia wydzielenie w badanym sygnale składowej stałej, składowej monotonicznie zmiennej, oraz składowych okresowych o dyskretnych wartościach częstotliwości. Przeprowadzone eksperymenty obliczeniowe dowodzą możliwości wykonania analiz czasowo-częstotliwościowych sygnałów dla celów diagnostyki technicznej.

Wykonano analizę sygnału deterministycznego

$$s(i) = \begin{cases} \cos\left(11\pi \frac{i-1}{n-1}\right), & i = 1 : 60 \\ \cos\left(48\pi \frac{i-1}{n-1}\right), & i = 61 : 101 \end{cases}$$

przy użyciu wielomianu 2, o budowie najbardziej zbliżonej do klasycznego szeregu. Wyniki analizy przedstawiono na rysunku 2.

Na rysunku 2a i 2c znajdują się wykresy sygnału po aproksymacji i jego widmo amplitudowe. Błąd aproksymacji równy jest $M=3.8082 \cdot 10^{-15}$. Na rysunkach 2b i 2d pokazano wyniki analizy czasowo-częstotliwościowej odnoszących się do wartości sygnału, oraz wartości modułów współczynników rozwinięcia.



Rys. 2. Wyniki analizy sygnału $s(i)$:
 a) przebieg aproksymujący, b) czasowo –
 częstotliwościowa struktura sygnału,
 c) moduły współczynników widma
 amplitudowego, d) czasowo -
 częstotliwościowa struktura modułów.

5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono wielomiany do aproksymacji i analizy sygnałów sformułowane na podstawie monografii [1],[2]. Porównano wyniki aproksymacji przebiegu wykładniczego, przyjmując jako podstawowe kryterium wartości błędów aproksymacji.

W porównaniu do klasycznego szeregu trygonometrycznego wielomiany 1,2,3 uzyskały znacznie niższe wartości błędów aproksymacji, nie wykazując tak wielkiego jak szereg klasyczny wzrostu błędów w pobliżu punktów granicznych. U wielomianów 2,3 występuje efekt kompensacji błędów aproksymacji w punktach granicznych.

Wielomiany 1,2,3 wykazują właściwości filtracyjne, umożliwiając przeprowadzenie aproksymacji, połączonej z analizą częstotliwościową i czasowo-częstotliwościową, dla wielu rodzajów sygnałów nieokresowych, bez ograniczeń charakterystycznych dla metod klasycznych.

LITERATURA

- [1] PROCH W., Analiza czasowa sygnałów przejściowych, cz.1., Zarys metody. Olsztyn, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej, 1996.
- [2] PROCH W., Analiza czasowa sygnałów przejściowych, cz.2., Zastosowania. Olsztyn, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, 2002.

- [3] Albert Cohen, Jelena Kovačević. Wavelets; The Mathematical Backgrounds. Proceedings of the IEEE, No.4, April 1996. Vol.84, str.514-523.



Waldemar PROCH jest starszym wykładowcą na Wydziale Nauk Technicznych Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego.

W pracy naukowej zajmuje się zagadnieniami analizy sygnałów. Jest autorem dwóch monografii na temat analizy czasowej sygnałów.