

## WPLYW OBCIĄŻENIA BELKI BETONOWEJ SPRĘŻONEJ NA JEJ DRGANIA PO WYMUSZENIU IMPULSOWYM

Jacek DZIURDŹ  
Instytut Podstaw Budowy Maszyn  
Politechnika Warszawska  
Warszawa, ul. Narbutta 84, tel. +48 022 660 82 76  
e-mail: jdz@simr.pw.edu.pl

### Streszczenie

W pracy przedstawiono wyniki analizy drgań belki sprężonej przeprowadzonej w celu określenia wpływu obciążenia poprzecznego belki na jej własności wibroakustyczne. Celem pracy było opracowanie miar wibroakustycznych czułych na zmianę obciążenia konstrukcji oraz określenie ich wrażliwości na zachodzące zmiany.

Słowa kluczowe: beton sprężony, drgania mechaniczne, charakterystyka sztywnościowa.

### INFLUENCE OF LOAD ON VIBRATIONS OF PRESTRESSED CONCRETE BEAM AFTER IMPULSE FORCE

### Summary

In this paper author presented results of vibration analysis of prestressed concrete beam. In this study author try to determine influence of transverse load on vibroacoustic characteristic of beam. In conclusion author proposed vibroacoustic measures of the sensitive to changes of load.

Keywords: prestressed concrete, mechanical vibration, elasticity characteristic.

## 1. WSTĘP

Badania drgań konstrukcji wykonanych z betonu, ze względu na specyficzne właściwości zastosowanego materiału (niejednorodność własności mechanicznych betonu zbrojonego oraz anizotropowość konstrukcji), wiążą się z trudnościami w analizie wyników pomiarów. Dodatkowym problemem jest wprowadzenie w badanych belkach wstępnego naprężenia wzdłużnego (belka sprężona).

Badania przeprowadzono na stanowisku umożliwiającym obciążanie belki zadaną wartością siły poprzecznej, przyłożonej w środku długości. Wykonano dwie serie pomiarów (przebadano dwie belki) dla różnych wartości obciążenia:

$F_0 \approx 0$  kN, 2 kN, 5 kN, 15 kN, 30 kN, 35 kN, 40 kN, 45 kN, 50 kN, 55 kN, 60 kN, 65 kN, 70 kN i 75 kN oraz podjęto próbę przy obciążeniu 80 kN.

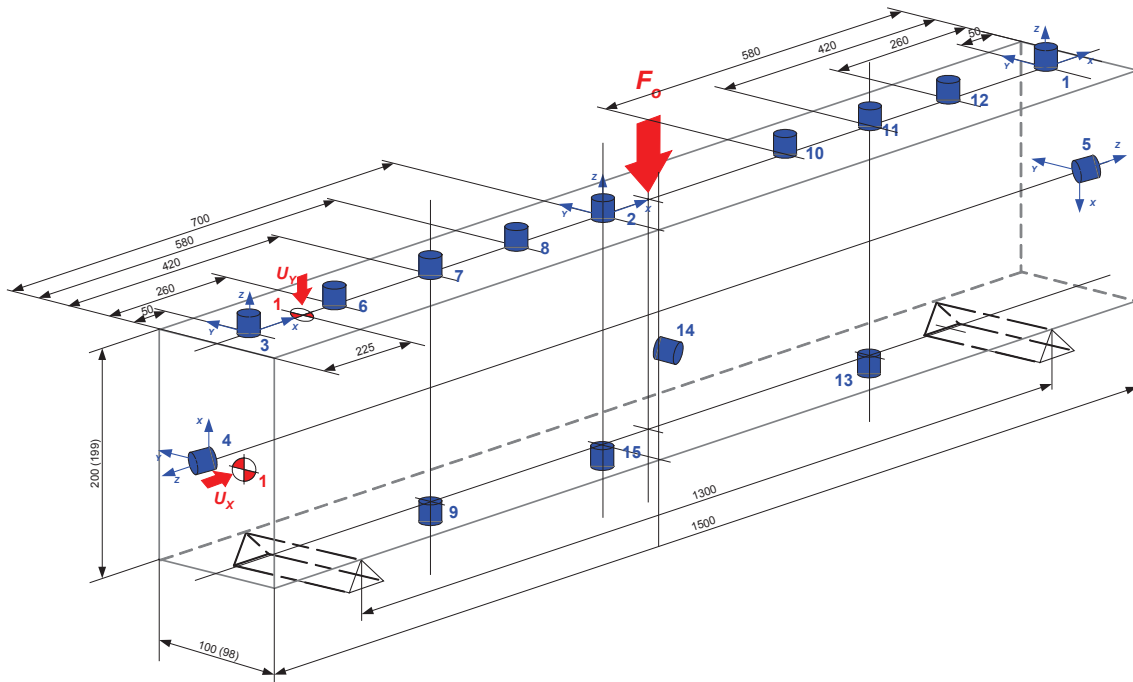
Zarejestrowano przebiegi przyspieszeń drgań belki wywołanych wymuszeniem impulsowym, zrealizowanym za pomocą młotka udarowego, oraz przebieg samego wymuszenia. Dodatkowo po każdorazowym ustaleniu obciążenia dokonano pomiarów ugięć belek w celu wyznaczenia

charakterystyk obciążenia w funkcji odkształcenia (ugięcia).

W skład układu pomiarowego wchodziły m.in. czujniki przyspieszeń drgań: dziewięć rozmieszczonych równomiernie na górnej powierzchni belki, trzy na dolnej oraz dwa na końcach belki (rejestrujące drgania wzdłużne) i jeden rejestrujący drgania poprzeczne poziome umieszczony w środku długości belki. Zastosowanie takiej liczby czujników pozwoliło na wybranie najdogodniejszego (ze względu na dokładność odwzorowania) punktu pomiarowego.

Wymuszenie zrealizowano uderzając młotkiem udarowym w kierunku poprzecznym do osi belki ( $U_Y$ ). Dodatkowo wykonano pomiary przy wymuszeniu w kierunku osi podłużnej belki ( $U_X$ ). Rejestracja siły wymuszającej umożliwiła wyznaczenie transmitancji (współczynnika wzmocnienia) pomiędzy wymuszeniem a kolejnymi punktami pomiarowymi.

Na rys. 1 przedstawiono badany obiekt wraz z rozmieszczeniem punktów pomiarowych oraz punktów przyłożenia wymuszenia (uderzenia młotkiem udarowym).



Rys. 1. Położenie czujników pomiarowych i punktów uderzenia młotkiem udarowym

## 2. WYZNACZENIE CHARAKTERYSTYK OBCIĄŻENIA W FUNKCJI UGIĘCIA

Po każdorazowym ustaleniu obciążenia dokonano pomiaru ugięcia w punkcie przyłożenia siły dla każdej z belek, co pozwoliło na wyznaczenie charakterystyk obciążenia w funkcji odkształcenia. Na podstawie otrzymanych wyników można określić dwa przedziały obciążeń dla których charakter zmian jest inny:

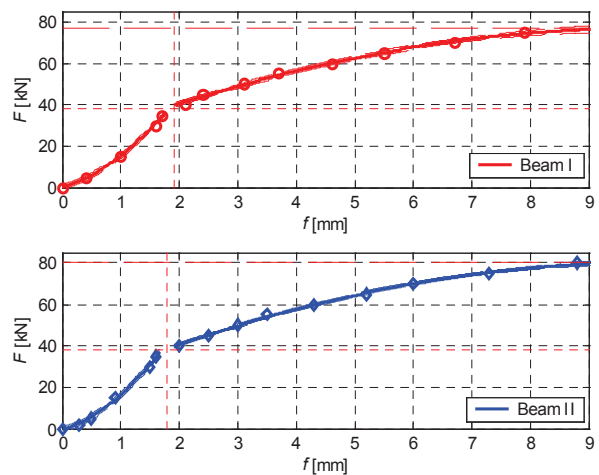
- przedział I (do 35 kN), w którym charakterystyka sprężysta belki jest progresywna,
- przedział II (powyżej 40 kN), w którym charakterystyka sprężysta belki jest degresywna.

Przedział 35-40 kN jest stanem, w którym występuje bardzo istotna zmiana dotycząca własności mechanicznych belki. Po przekroczeniu obciążenia 35 kN następuje postępująca degradacja belki betonowej, pojawiają się mikropełnięcia przechodzące w widocznym gołym okiem pęknięcia przy około 55 kN.

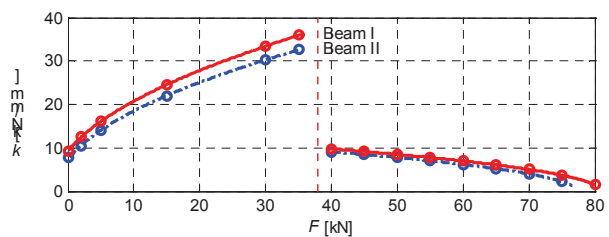
Na rys. 2 przedstawiono otrzymane charakterystyki sztywności belki I i II, oraz wyniki aproksymacji charakterystyk obciążenia w funkcji ugięcia z wykorzystaniem wielomianów stopnia drugiego (dla każdego z przedziałów oddzielnie). Otrzymane wyniki wykazują niewielkie różnice ugięć przy tym samym obciążeniu pomiędzy obiema belkami.

Zastosowanie aproksymacji uzyskanych z pomiarów charakterystyk obciążenia w funkcji ugięcia pozwoliło na wyznaczenie funkcji

sztywności belek w zależności od obciążenia poprzecznego (rys. 3) oraz określenie przybliżonych wartości sztywności dla zadawanych sił (tab. 1).



Rys. 2. Zmierzone i aproksymowane charakterystyki sztywności belki I i II



Rys. 3. Zmiana sztywności belki I i II w zależności od obciążenia poprzecznego

Tab. 1. Zmiana sztywności belek I i II

$F$	$k_I$	$k_{II}$
[kN]	[kN/mm]	[kN/mm]
0.0	7.8	9.3
2.0	10.5	12.5
5.0	14.1	16.1
15.0	22.0	24.5
30.0	30.3	33.4
35.0	32.6	36.0
40.0	9.1	9.8
45.0	8.5	9.1
50.0	7.8	8.5
55.0	7.0	7.8
60.0	6.2	7.0
65.0	5.2	6.1
70.0	4.0	5.0
75.0	2.2	3.7
80.0	-	1.5

Przedstawiona na rys. 3 zależność potwierdza słuszność decyzji o przyjęciu dwóch przedziałów związanych z innym stanami badanych belek.

### 3. ANALIZA DRGAŃ WYWOŁANYCH WYMUSZENIEM IMPULSOWYM

Analizę przeprowadzono dla wymuszenia impulsowego realizowanego poprzecznego do badanych belek. Korzystając z poprzednich prac [3, 4] przyjęto dwa zakresy częstotliwości analizy (rys. 4):

- dolny, od 0 Hz do ok. 1300 Hz,
- górny, od ok. 1300 Hz do 5000 Hz.

Podział ten związany jest z innym charakterem zmian w widmach drgań dla różnych obciążeń. Pomiarzy zgodnie z przyjętym w rozdziale 2

kryterium podzielono na dwie grupy: do 35 kN i powyżej 40 kN.

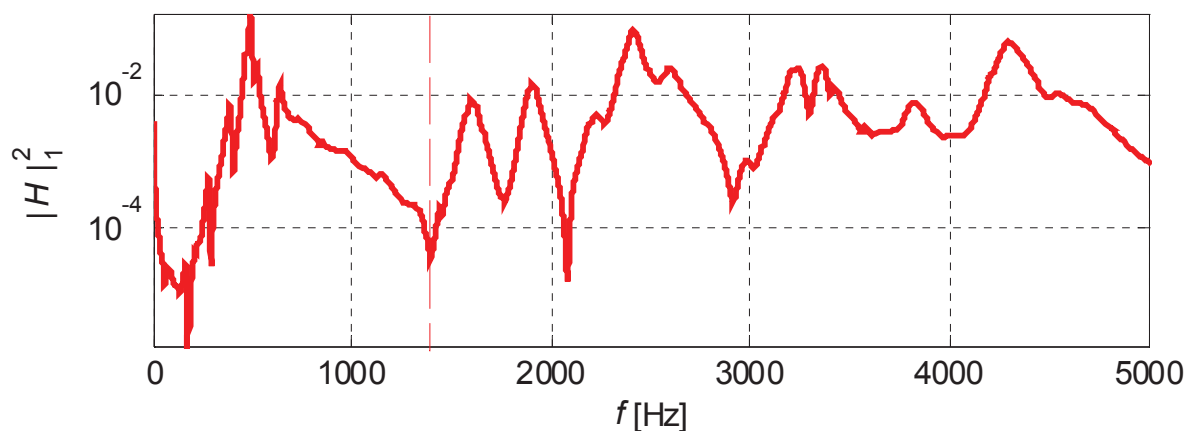
Spośród wielu funkcji możliwych do wykorzystania (pozwalających na otrzymanie podobnych wyników) zastosowano funkcję transmitancji  $|H|_1^2$  pomiędzy sygnałami z poszczególnych czujników drgań a sygnałem wymuszenia (przebieg wartości siły wymuszającej) [1]. Dla sygnałów wymuszenia przyjęto funkcję „okna” typu *Transient*, a dla sygnałów przyspieszeń drgań typu *Exponential* [2].

Wyniki analizy dla czujników o osiach równoległych do kierunku wymuszenia (poprzecznych do badanej belki) były podobne, w szczególności podczas analizy w dolnym zakresie częstotliwości. W pracy przedstawiono przykładowe wyniki z punktu pomiarowego numer 6 (najbliżej położony czujnik względem miejsca wymuszenia).

#### 3.1. Dolny zakres analizy

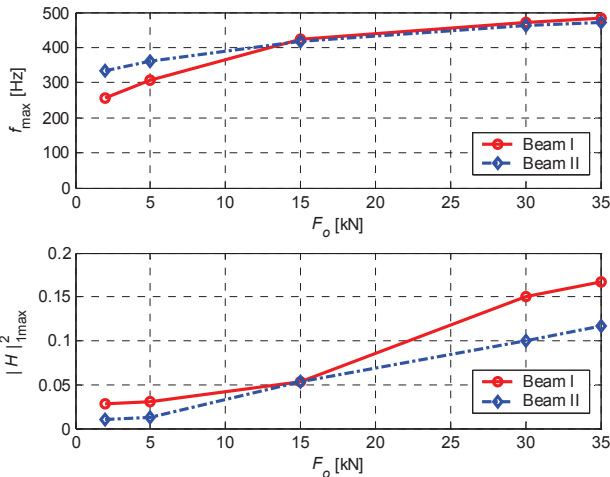
Dla badanych belek można wyróżnić w zakresie częstotliwości od 0 do 1300 Hz jedną dominującą składową, której wartość częstotliwości zmienia się istotnie (ponad dwukrotnie) przy obciążaniu belki siłą o wartości od 0 kN do 35 kN. Zmiana częstotliwości w funkcji obciążenia jest monotoniczna. Podobny charakter przedstawiają zmiany wartości  $|H|_1^2$  dominującej składowej przy wzroście obciążenia. Na rysunku 5 przedstawiono zależność wartości częstotliwości dominującej składowej oraz jej amplitudy w funkcji obciążenia poprzecznego belki.

Częstości drgań belki są proporcjonalne do kwadratu jej sztywności [5], więc wydaje się interesującym przedstawienie otrzymanych wartości częstotliwości dominujących składowych w funkcji, opisanych w rozdziale 2, sztywności. Wyniki przedstawiono na rys. 6.

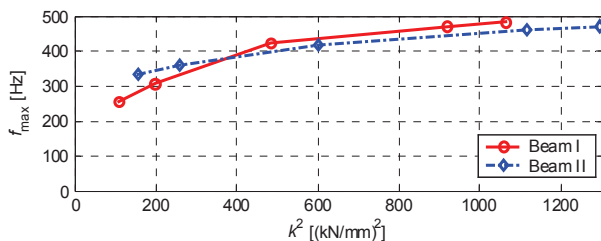


Rys. 4. Przykładowa funkcja transmitancji z zaznaczonym podziałem na dwa zakresy częstotliwości analizy

Przedstawienie wyników w sposób pokazany na rysunku 6 wydaje się właściwe. W podobnie jak dla wykresów z rysunku 5 otrzymane dla obydwu belek zależności mają podobny przebieg. Otrzymane zmiany częstotliwości w funkcji kwadratu częstotliwości nie są jednak liniowe. Na otrzymane wyniki wpływ ma oczywiście niedokładność aproksymacji sztywności belek i błędy związane z pomiarami, ale charakter przebiegu wskazuje wyraźnie na nieliniowe własności badanych obiektów w tym zakresie częstotliwości.



Rys. 5. Zmiany częstotliwości i wartości transmitancji głównej składowej w funkcji obciążenia, dla dolnego zakresu częstotliwości analizy i obciążeń do 35 kN

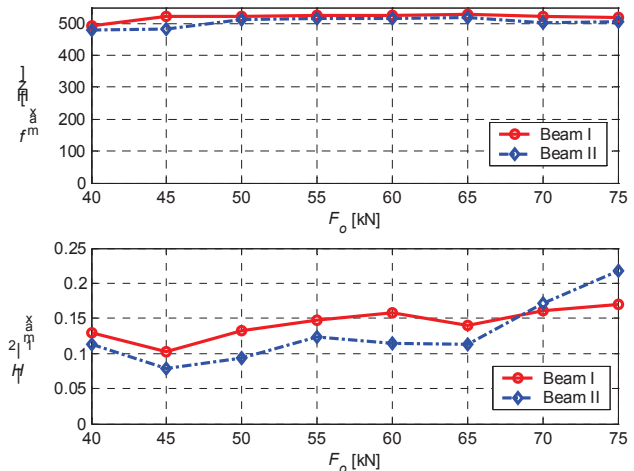


Rys. 6. Zmiany częstotliwości głównej składowej w funkcji kwadratu sztywności, dla dolnego zakresu częstotliwości analizy i obciążeń do 35 kN

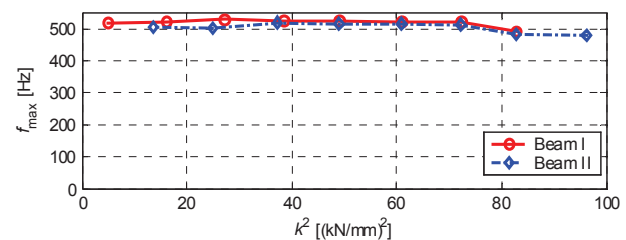
Podobne analizy przeprowadzono dla obciążeń powyżej 40 kN. Otrzymane wyniki znacznie się jednak różnią. Na rysunku 7 przedstawiono zależność wartości częstotliwości dominującej składowej oraz jej amplitudy w funkcji obciążenia poprzecznego belki. Rysunek 8 przedstawia zależność częstotliwości w funkcji sztywności.

Po przekroczeniu pewnej wartości obciążenia (w tym wypadku 35 kN) w niewielkim stopniu zmieniają częstotliwości głównej składowej w dolnym zakresie analizy. Zmiana sztywności (znaczący spadek dla obciążeń powyżej 40 kN) nie wpływa praktycznie na wartość częstotliwości.

Degradacja betonu sprawia, że belka zmienia swoje własności i może pojawiać się np. większy wpływ zbrojenia belki.



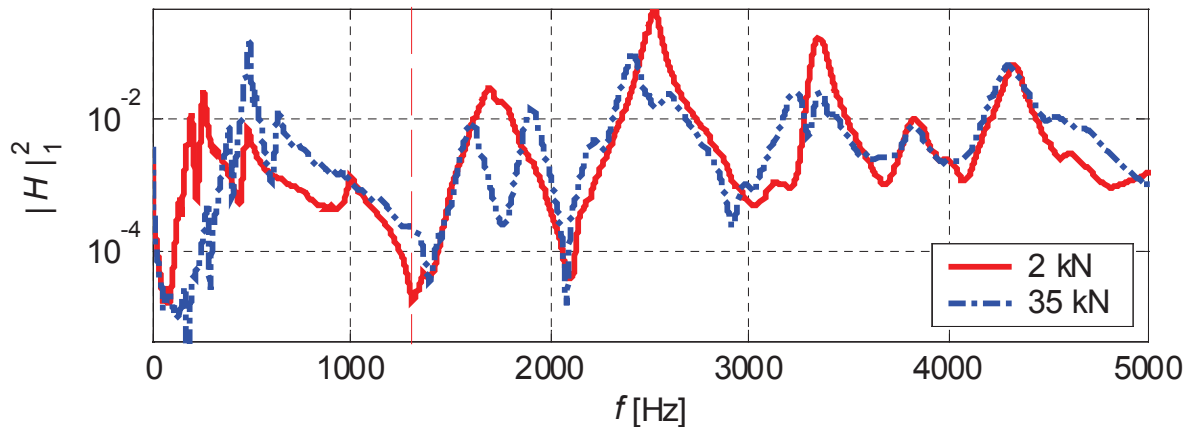
Rys. 7. Zmiany częstotliwości i wartości transmitancji głównej składowej w funkcji obciążenia, dla dolnego zakresu częstotliwości analizy i obciążeń powyżej 40 kN



Rys. 8. Zmiany częstotliwości głównej składowej w funkcji kwadratu sztywności, dla dolnego zakresu częstotliwości analizy i obciążeń powyżej 40 kN

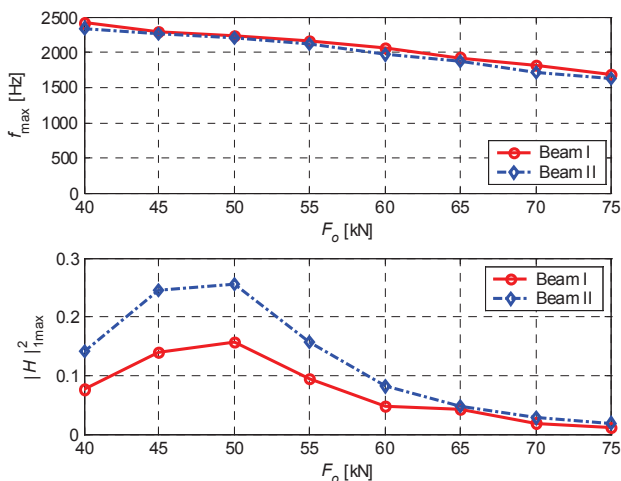
### 3.2. Górny zakres analizy

Górny zakres analizy przyjęto od 1300 Hz do 5000 Hz. W tym zakresie możemy wyróżnić pięć podstawowych składowych funkcji transmitancji o częstotliwościach ok.: 1690 Hz, 2520 Hz, 3350 Hz, 3830 Hz i 4330 Hz dla I belki oraz 1690 Hz, 2450 Hz, 3060 Hz, 3640 Hz i 4200 Hz dla II belki. Analizując wpływ obciążenia poprzecznego na odpowiedź na wymuszenie impulsowe możemy stwierdzić zupełnie inny charakter zmian. Przy obciążeniach do 35 kN nie jest zauważalna istotna zmiana częstotliwości opisanych składowych, natomiast wraz ze wzrostem obciążenia następuje rozmycie składowych o częstotliwościach podstawowych (powstają składowe boczne). Z tego też powodu trudno jest wyznaczyć podobne charakterystyki jak opisane w punkcie 3.1. Na rysunku 9 przedstawiono przykładowe funkcje transmitancji dla obciążeń 2 kN i 35 kN.



Rys. 9. Przykładowe funkcje transmitancji dla obciążeń 2 kN i 35 kN

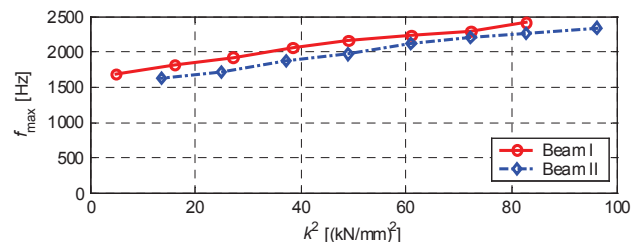
Zupełnie inaczej przebiegają zmiany funkcji transmitancji przy obciążeniach powyżej 40 kN. Dla trzech pierwszych składowych (w górnym zakresie analizy) możemy wyznaczyć zależności częstotliwości tych składowych i ich wartości od siły obciążającej. Na rysunku 10 przedstawiono zmianę częstotliwości składowej „2500 Hz” i wartości transmitancji w funkcji obciążenia, dla górnego zakresu częstotliwości analizy i obciążeń powyżej 40 kN. Rysunek 11 przedstawia zmianę częstotliwości składowej „2500 Hz” w funkcji sztywności, dla górnego zakresu częstotliwości analizy i obciążeń powyżej 40 kN. W przeciwieństwie do przypadku przedstawionego w punkcie 3.1 zależność ta jest praktycznie liniowa.



Rys. 10. Zmiany częstotliwości i wartości transmitancji składowej „2500 Hz” w funkcji obciążenia, dla górnego zakresu częstotliwości analizy i obciążeń powyżej 40 kN

Podstawowym problemem przy określaniu częstotliwości w górnym zakresie analizy, są duże zmiany ich wartości, co powoduje że dla obciążeń większych składowe o wyższych częstotliwościach mają wartości zbliżone do składowych o niższych

częstotliwościach przy obciążeniach mniejszych np. III składowa (ok. 2572 Hz przy obciążeniu 65 kN) i II składowa (ok. 2500 Hz przy obciążeniu 40 kN) dla belki II. Wymaga to, w przeciwieństwie do analizy w dolnym zakresie częstotliwości, dokładniejszego badania kształtu funkcji transmitancji (widma), a nie tylko określenie głównej składowej w analizowanym przedziale.



Rys. 11. Zmiany częstotliwości składowej „2500 Hz” w funkcji kwadratu sztywności, dla górnego zakresu częstotliwości analizy i obciążeń powyżej 40 kN

#### 4. WNIOSKI

Przedstawione miary wibroakustyczne pozwalają na określenie stanu obciążenia belki betonowej. W szczególności w zakresie obciążeń niskich (dla badanych obiektów poniżej 35 kN) bardzo przydatna jest analiza w dolnym zakresie częstotliwości, a dla obciążeń wysokich można skorzystać z analizy zmian jednej ze składowych w górnym paśmie częstotliwości lub określić miarę łączną dla kilku składowych. Analizując zmiany częstotliwości z dolnego i górnego zakresu możemy też określić czy została przekroczona wartość siły powodująca destrukcję materiału. Analiza zmian wartości funkcji transmitancji (widma) dla kolejnych obciążeń nie wykazuje tak dużych możliwości jak analiza zmian częstotliwości.

Pewnym problemem w wykorzystaniu przedstawionych miar jest pewna niejednoznaczność w interpretacji wyników w dolnym paśmie

częstotliwości. Dla belki nieobciążonej częstotliwość podstawowa wynosi ok. 435 Hz co odpowiada w przybliżeniu częstotliwości przy sile 20 kN. Związane jest to ze zmianą sposobu podparcia belki z dwupunktowego dla belki nieobciążonej na trzypunktowy dla belki obciążonej.

Otrzymane wyniki pozwalają na wysunięcie tezy, że pomiary drgań belki, wywołanych wymuszeniem impulsowym, mogą służyć jako metoda pośredniego określania obciążenia i stanu technicznego konstrukcji betonowych zbrojonych.

*Badania wykonano w ramach pracy COST Action 534.*

## LITERATURA

- [1] Bendat J.S., Piersol A.G.: Random data: Analysis and measurement procedures, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976 (in polish).
- [2] Brüel&Kjær Technical Review No. 3/1987.
- [3] Dąbrowski Z., Dziurdź J., Skórski W.W., Vibration of the Masts Made of Epoxy-Carbon Composites and Glued Veneer, 10th APVC, Royal Resort, Australia 10-14.11.2003, pp. 75-80.
- [4] Dziurdź J.: Analiza drgań konstrukcji nośnej wykonanej z materiału niejednorodnego, XXXIII Sympozjum „Diagnostyka Maszyn”, Węgierska Górka, 2005, CD-R.
- [5] Osiński Z.: Teoria Drgań, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1978.



dr inż. Jacek DZIURDŹ – absolwent Wydziału Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej. Adiunkt w Instytucie Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej. Zajmuje się problematyką związaną z diagnostyką maszyn, wibroakustyką maszyn oraz analizą sygnałów. Autor ponad 30 publikacji z zakresu diagnostyki wibroakustycznej i cyfrowej analizy sygnałów. Członek Polskiego Towarzystwa Diagnostyki Technicznej.