

IDENTYFIKACJA PĘKNIĘCIA W BELKACH O ZNANYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

Leszek MAJKUT

Akademia Górniczo – Hutnicza, Katedra Mechaniki i Wibroakustyki
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, majkut@agh.edu.pl

Streszczenie

Praca dotyczy problemu identyfikacji parametrów (lokalizacji i głębokości) poprzecznego pęknięcia, w układach, których modelem jest belka prostoliniowa. Jako wielkości wejściowe procesu identyfikacji wybrano częstości giętych drgań własnych i (lub) amplitudy poprzecznych drgań wymuszonych monoharmonicznie. Dla tych wielkości skonstruowany został model odwrotny belki z pęknięciem, pozwalający na wyznaczenie parametrów pęknięcia belki o dowolnych (znanych) warunkach brzegowych. Podany został również algorytm identyfikacji pęknięcia na podstawie modelu odwrotnego.

Słowa kluczowe: drgania, pęknięcie, identyfikacja, modele odwrotne

IDENTIFICATION OF CRACK IN BEAMS WITH WELL-KNOWN BOUNDARY CONDITIONS

Summary

This paper deals with detection of the location and size of a transverse crack in beam like structure. An input quantity for identification a natural frequencies and (or) an amplitude of forced vibrations was chosen. For this quantity the inverse beam model was created. Identification algorithm based on this model was proposed.

Keywords: vibration, crack, identification, inverse models

1. WSTĘP

Układy konstrukcyjne poddane działaniu dynamicznemu mogą ulegać uszkodzeniom. W przypadkach dużych układów strukturalnych (mostów, wież wiertniczych itp.), czy obudowanych wałów maszyn wirujących, typowe metody nieinwazyjne oceny stanu konstrukcji związane np. z wykorzystaniem fal powierzchniowych, efektu Barkhausena, czy oparte na pomiarze zmian strumienia magnetycznego opisane w [4], stają się mało użyteczne. Stało się to powodem poszukiwań wpływu pęknięcia na parametry charakterystyk dynamicznych obiektów. Przeglądowe prace [3] i [7] zawierają razem ponad 450 pozycji literatury dotyczących tego zagadnienia.

Większość cytowanych tam prac dotyczy wpływu pęknięcia o znanych parametrach na częstości drgań własnych, zmiany postaci drgań własnych, czy amplitudę drgań wymuszonych belek. Związane z tym metody identyfikacji polegają na odczytywaniu z tych charakterystyk, tzw. nomogramów głębokości i miejsca pęknięcia. Nomogramy te wyznaczone zostały dla różnych (określonych) warunków brzegowych i można z ich wykorzystaniem określić parametry pęknięcia na podstawie zmierzonych częstości drgań własnych,

o ile warunki brzegowe analizowanej belki odpowiadają belce, dla której został wyznaczony nomogram.

Niniejsza praca dotyczy identyfikacji parametrów pęknięcia (lokalizacja i głębokość) na podstawie pomiarów drgań. Jako wielkości wejściowe procesu identyfikacji wybrane zostały częstości drgań własnych lub amplituda drgań wymuszonych. Wybór tych wielkości wiąże się z łatwym ich pomiarem. Pominięto zaś trudne do zmierzenia postaci drgań własnych.

W celu wyznaczenia parametrów pęknięcia skonstruowany został model odwrotny dla belki o dowolnych, choć znanych warunkach brzegowych. Podobne zagadnienie opisane zostało w pracy [14], tyle tylko, że opisana tam identyfikacja dotyczy jedynie miejsca pęknięcia w belce swobodnie podpartej.

Z modelu odwrotnego korzystają również autorzy pracy [13]. Opisany tam sposób identyfikacji polega, podobnie jak w niniejszej pracy, na wyznaczeniu poszukiwanych parametrów z warunku zerowania się wyznacznika macierzy głównej opisującej warunki brzegowe (mogą być dowolne) skojarzone z rozważanym problemem początkowo – brzegowym. W przypadkach obu prac autorzy korzystają z pewnych własności wyznaczników.

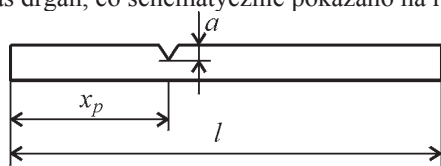
W pracy [13] z możliwości przedstawienia wyznacznika w postaci odpowiedniej sumy innych wyznaczników, w niniejszej, zaś pracy z własności rozwinięcia wyznacznika względem dowolnej kolumny. Opisana przez autora metoda wydaje się być znacznie prostsza ze względu na łatwość algorytmizacji – w pracy podany został algorytm obliczeń służących identyfikacji parametrów pęknięcia.

Obok identyfikacji z wykorzystaniem modelu analitycznego wielu autorów dokonuje również identyfikacji pęknięcia w oparciu o model komputerowy MES [9, 10, 13, 19].

Rozwój metod komputerowych przyczynił się do powstania nowych, lub zastosowania znanych wcześniej metod identyfikacji np. opartych na algorytmach genetycznych [6], transformacie falkowej [17, 18], sieciach neuronowych [11], czy metodach probabilistycznych [1].

2. OPIS PROBLEMU

Rozpatrywany w pracy problem opisany został modelem belki Bernoulli-Eulera, bez uwzględnienia efektu zamykania się szczeliny podczas drgań, co schematycznie pokazano na rys.1



Rys. 1. Model rozpatrywanej belki

Przedmiotem pracy jest poszukiwanie głębokości pęknięcia a i jego położenia x_p belki pokazanej na rys.1. W rozważaniach przyjęto belkę o stałym przekroju poprzecznym $A=bxh$ oraz momencie bezwładności przekroju I . Założono również stałość własności materiałowych na długości belki tzn. modułu Younga E oraz gęstości materiału ρ . Pęknięcie zostało zamodelowane jako sprężyna, której podatność względna θ (podatność względna θ [rad m] jest iloczynem podatności sprężyny c [rad/Nm] i sztywności giętnej belki EI [Nm²]) wiąże ze sobą moment gnący w przekroju o współrzędnej $x = x_p$ oraz kąty obrotu z prawej i lewej strony przekroju, w którym występuje pęknięcie, czyli:

$$y'(x_p^+, t) - y'(x_p^-, t) = c \cdot EI \cdot y''(x_p, t)$$

lub

$$y'(x_p^+, t) - y'(x_p^-, t) = \theta \cdot y''(x_p, t) \quad (1)$$

Taki sposób opisu belki z pęknięciem pochodzi z pracy [16], gdzie z zależności, znanych z mechaniki pęknięcia, wiążących energię potencjalną odkształcenia ze współczynnikiem intensywności naprężeń [15], i po skorzystaniu z twierdzenia Castigliano wyznacza się lokalną podatność θ . Równanie wiążące ze sobą podatność sprężyny i głębokość pęknięcia - a ma postać:

$$\theta = 6 \cdot \pi \cdot h \cdot \gamma^2 \cdot f(\gamma) \quad (2)$$

gdzie: $\gamma = a/h$,

$$f(\gamma) = 0.6384 - 1.035 \cdot \gamma + 3.7201 \cdot \gamma^2 - 5.1773 \cdot \gamma^3 + 7.553 \cdot \gamma^4 - 7.332 \cdot \gamma^5 + 2.4909 \cdot \gamma^6 \quad (3)$$

Równanie drgań własnych belki z pęknięciem w klasie funkcji uogólnionych po rozdzieleniu zmiennych w postaci $y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ można zapisać:

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = \theta \cdot X''(x_p) \cdot \delta''(x, x_p) \quad (4)$$

rozwiązaniem równania (4) jest funkcja:

$$X(x) = X_0(x) + \frac{\theta}{2\lambda} X''(x_p) \cdot [\sinh \lambda(x - x_p) + \sin \lambda(x - x_p)] H(x, x_p) \quad (5)$$

gdzie:

- $\delta(x, x_p)$ - funkcja delta Diraca w punkcie $x = x_p$,

- $H(x, x_p)$ - funkcja Heavisida'a (skoku jednostkowego) w punkcie $x = x_p$,

- $\lambda = \omega^2 \rho A / EI$,

- $X_0 = P \cosh \lambda x + Q \sinh \lambda x + R \cos \lambda x + S \sin \lambda x$

jest rozwiązaniem drgań belki jednorodnej.

Pochodną funkcji (5) jest funkcja:

$$X'(x) = X'_0(x) + \frac{\theta}{2} X''(x_p) \cdot [\cosh \lambda(x - x_p) + \cos \lambda(x - x_p)] H(x, x_p) \quad (6)$$

Jak łatwo zauważyć po wyznaczeniu z równania

(6) wielkości $X'(x_p^+) = X'_0(x_p) + \theta \cdot X''(x_p)$

i $X'(x_p^-) = X'_0(x_p)$ otrzymuje się zależność (1).

Stałe P, Q, R, S zależą od warunków brzegowych skojarzonych z rozważanym problemem.

3. IDENTYFIKACJA PĘKNIĘCIA NA PODSTAWIE CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH

Wyznaczając standardowo częstotliwości drgań własnych, z warunków brzegowych belki otrzymuje się cztery równania algebraiczne do wyznaczenia stałych P, Q, R, S . Otrzymany w ten sposób jednorodny układ równań, ma nietrywialne rozwiązanie tylko w przypadku, gdy wyznacznik macierzy głównej jest równy zero. Z tego warunku wyznacza się wartości własne λ .

Wykorzystując powyżej opisany model belki z pęknięciem można rozwiązać problem odwrotny, czyli wyznaczyć miejsce x_p i głębokość a pęknięcia z wykorzystaniem wyznaczonych dla rzeczywistego obiektu częstotliwości drgań własnych. Dla wyznaczonych częstotliwości należy wyliczyć wielkości λ , po czym wyznaczyć x_p i θ , dla których zeruje się wyznacznik macierzy głównej, (po czym głębokość a liczona jest z zależności (2)). Oczywiście dla każdej częstotliwości otrzymuje się w ten sposób funkcję jednej zmiennej (model odwrotny jest niejednoznaczny), więc do

identyfikacji potrzebne są przynajmniej dwie częstości drgań własnych. Innymi słowy taką samą częstość drgań własnych ma belka z „dużym” pęknięciem w jednym z przekrojów belki, jak i belka z „małym” pęknięciem w innym przekroju. Punkt przecięcia krzywych θ w funkcji x_p dla dwu różnych częstości wyznacza poszukiwane parametry pęknięcia. Sposób postępowania pokazany zostanie na przykładach

3.1. Belka swobodnie podarta

W przypadku belki swobodnie podartej warunki brzegowe mają postać: $X(0) = 0$, $X''(0) = 0$, co prowadzi do wniosku, że $P = R = 0$ co obniża rząd macierzy głównej. Wykorzystane to zostało w pracy [14] gdzie, na podstawie zmiany dwu pierwszych częstości drgań własnych belki z pęknięciem w stosunku do częstości drgań belki bez pęknięcia, identyfikowane jest tylko położenie pęknięcia.

Pozostałe równania opisujące warunki brzegowe $X(l) = 0$ i $X''(l) = 0$ zapisane zostaną w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \sinh \lambda_i l & \sin \lambda_i l & a_{13} \\ \sinh \lambda_i l & -\sin \lambda_i l & a_{23} \\ \sinh \lambda_i x_p & -\sin \lambda_i x_p & -1/\lambda_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q \\ S \\ X''(x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$a_{13} = \frac{\theta}{2\lambda_i} \cdot [\sinh \lambda_i (l - x_p) + \sin \lambda_i (l - x_p)]$$

$$a_{23} = \frac{\theta}{2\lambda_i} \cdot [\sinh \lambda_i (l - x_p) - \sin \lambda_i (l - x_p)]$$

$$\lambda_i = \omega_i^2 \rho A / EI$$

$\omega_i = 2 \cdot \pi \cdot f_i$ - jest i-tą wyznaczoną częstością drgań własnych.

f_i - jest i-tą częstotliwością drgań własnych.

Na rysunku 2 i 3 przedstawione zostały krzywe θ w funkcji x_p dla dwu pierwszych częstości drgań własnych belki swobodnie podartej z dwoma różnymi pęknięciami („crack 1” i „crack 2”).

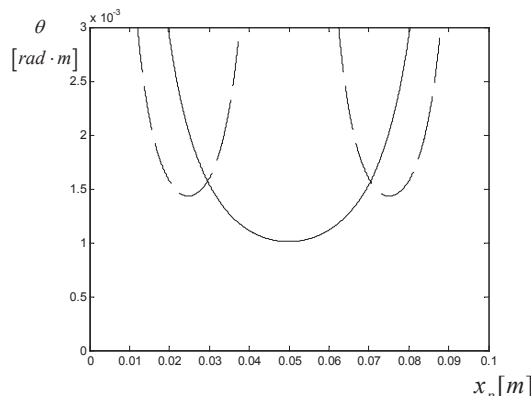
Dane zaczerpnięto z pracy [14] długość belki $l = 0.1$ m, wysokość $h = 0.0016$ m, szerokość $b = h$, $\rho = 7960$ kg/m³ oraz $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Pa.

Wyznaczone częstotliwości (z analizy MES) dla belki z pęknięciem „crack 1” wynoszą $f_1 = 370.31$ Hz i $f_2 = 1475.36$ Hz.

Na rysunku 2 linią ciągłą oznaczono krzywą uzyskaną dla częstości f_1 linią przerywaną dla f_2 . Ze względu na symetrię układu krzywe te przecinają się w dwu punktach o współrzędnych $x_{p1} = 0.0296$ m i $x_{p2} = 0.0704$ m - określenie, po której stronie środka belki znajduje się pęknięcie należy przeprowadzić innymi metodami.

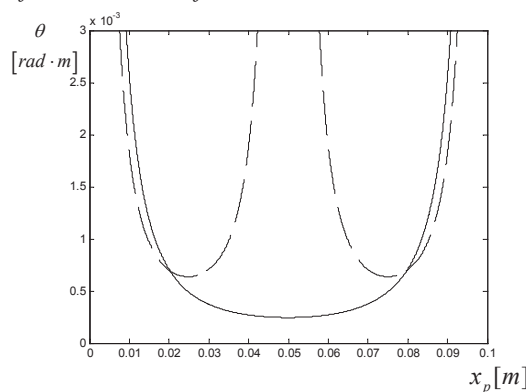
Obu wielkościom x_p odpowiada natomiast ta sama wartość podatności $\theta = 1.5704 \cdot 10^{-3}$ [rad m], która odpowiada głębokości pęknięcia (z równania

(2)) $a = 0.303 \cdot h$. Porównanie wielkości zidentyfikowanych i modelowanych w analizie MES dla przypadków: „crack 1” i „crack 2” zebrano w tab.1



Rys.2. Przebieg zmiany podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p dla belki „crack 1”

Dla pęknięcia opisanego jako „crack 2” wyznaczone z analizy MES częstotliwości wynoszą $f_1 = 371.93$ Hz i $f_2 = 1481.52$ Hz



Rys.3. Przebieg zmiany podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p dla belki „crack 2”

Na rysunku 3 podobnie jak na rysunku 2 linią ciągłą oznaczono krzywą uzyskaną dla częstości f_1 linią przerywaną dla f_2 . Ze względu na symetrię układu krzywe te przecinają się w dwu punktach o współrzędnych $x_{p1} = 0.0191$ m i $x_{p2} = 0.0809$ m. Obu wielkościom x_p odpowiada natomiast ta sama wartość podatności $\theta = 6.97 \cdot 10^{-4}$, która odpowiada głębokości pęknięcia (z równania (2)) $a = 0.205 \cdot h$.

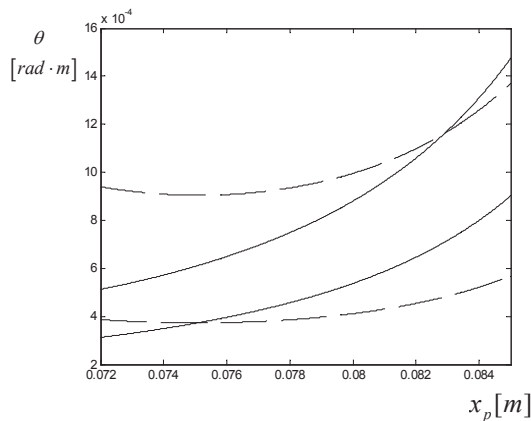
Tabela 1. Wyniki identyfikacji pęknięcia

Crack	model MES [14]	identyfikowane	błąd względn y
„1”	$x_p = 70\text{mm}$	$x_p = 70.4$	0.6 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.303 h$	1.0 %
„2”	$x_p = 80\text{mm}$	$x_p = 80.9$	1.25 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.205 h$	2.5 %

Tak dobre wyniki można uzyskać jedynie w przypadku bardzo dokładnego wyznaczenia częstości drgań własnych. W związku z tym poniżej wyznaczono przebiegi podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p dla częstości drgań własnych z uwzględnieniem niepewności pomiaru. Błędy δ_1 i δ_2 częstości wyznaczono z porównania częstości drgań własnych belki bez pęknięcia modelowanej w MES ω_{0i-MES} i częstości uzyskanej dla modelu analitycznego $\omega_{0i-Anal}$

$$\delta_i = \left| \omega_{0i-MES} - \omega_{0i-Anal} \right| / \omega_{0i-Anal} \quad (7)$$

Na rysunku 4 pokazano przebieg poszukiwanych krzywych dla czterech częstotliwości $f_1 \pm \delta_1$ i $f_2 \pm \delta_2$ dla przypadku „crack 2” w pobliżu lokalizacji pęknięcia $x_p = 80\text{mm}$



Rys. 4. Przebieg zmiany podatności θ w funkcji x_p dla częstości „wyznaczonych” z błędem

Liniami ciągłymi oznaczono krzywe wyznaczone dla $f_1 \pm \delta_1$ liniami przerywanymi dla $f_2 \pm \delta_2$. Identyfikowane wielkości położenia pęknięcia i jego głębokości zawierają się w części wspólnej wewnątrz obszarów ograniczonych krzywymi wyznaczonymi dla $f_1 \pm \delta_1$ (linie ciągłe) i dla $f_2 \pm \delta_2$ (linie przerywane). Obszar ten określa lokalizację pęknięcia w przedziale $x_p \in (75 - 83)\text{mm}$ i głębokość pęknięcia $a \in (0.15 - 0.26) \cdot h$ (modelowane parametry to $x_p = 80\text{mm}$ i $a = 0.2h$). W rozważanym przykładzie częstości ω_{0i-MES} zaczerpnięto również z pracy [14], a wyznaczone z zależności (7) wielkości błędów wynoszą $\delta_1 = 5.9 \cdot 10^{-4}$ oraz $\delta_2 = 2.6 \cdot 10^{-3}$. Wielkości $f_1 \pm \delta_1$ różnią się zatem, zaledwie o 0.5 Hz ($f_2 \pm \delta_2$ o 7.7 Hz), z czego wynika, że dokładność proponowanej metody identyfikacji zależy istotnie od dokładności wyznaczenia (pomiaru) częstości drgań własnych.

3.2. Belka wspornikowa

W przypadku belki wspornikowej funkcja opisana równaniem (5) i jej pochodne muszą spełniać warunki brzegowe: $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$, $X''(l) = 0$ oraz $X'''(l) = 0$.

Postępując analogicznie jak w przykładzie poprzednim, wielkości θ i x_p wyznacza się z warunku zerowania się wyznacznika macierzy głównej dla każdej z wyznaczonych częstości drgań własnych. W przypadku belki wspornikowej macierz główna ma postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh \lambda_i l & \sinh \lambda_i l & -\cos \lambda_i l & -\sin \lambda_i l & a_{35} \\ \sinh \lambda_i l & \cosh \lambda_i l & \sin \lambda_i l & -\cos \lambda_i l & a_{45} \\ \cosh \lambda_i x_p & \sinh \lambda_i x_p & \cos \lambda_i x_p & \sin \lambda_i x_p & \frac{-1}{\lambda_i^2} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$a_{35} = \frac{\theta}{2\lambda_i} \cdot [\sinh \lambda_i (l - x_p) - \sin \lambda_i (l - x_p)]$$

$$a_{45} = \frac{\theta}{2\lambda_i} \cdot [\cosh \lambda_i (l - x_p) - \cos \lambda_i (l - x_p)]$$

Do rozwiązania tego problemu zaproponowana zostanie następująca metodologia, która pozwala na stworzenie algorytmu komputerowego:

1. w macierzy głównej należy dokonać modyfikacji polegającej na tym, że w miejsce wielkości θ należy wprowadzić wielkość 1 (jeden) – powstała macierz oznaczono przez **A**;
2. należy skonstruować inną macierz (tu oznaczoną **B**), która powstaje z macierzy **A** przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, jest to więc macierz opisująca problem własny belki bez uszkodzenia;
3. przy takich oznaczeniach poszukiwane równanie wyznacznikowe zapisać można:

$$\theta \cdot (\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})) - \det(\mathbf{B}) = 0 \quad (8)$$

równanie to łatwo wyprowadzić rozwijając wyznacznik macierzy głównej względem ostatniej kolumny. Z równania (8) po przekształceniach można wyznaczyć podatność θ dla każdego $x_p \in (0, l)$ (tylko macierz **A** zmienia się w funkcji x_p):

$$\theta = \det(\mathbf{B}) / (\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})) \quad (9)$$

Częstości drgań własnych wspornika, konieczne do identyfikacji wyznaczone zostały przez autora z analizy MES. Dane geometryczne i materiałowe do analizy przyjęto takie same jak belki swobodnie podpartej. Rozpatrzono 8 różnych wariantów parametrów pęknięcia. Wielkości te oraz wyznaczone dla nich częstotliwości drgań własnych zebrano w tabeli 2 (wszystkie wielkości położenia pęknięcia x_p podane są w mm).

Proces identyfikacji przeprowadzono w ten sposób, że dla każdej częstości drgań własnych wyznaczono wg równania (9) przebiegi zmiany

podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p . Współrzędne punktów przecięcia krzywych, wyznaczonych dla obu częstości, w każdym z przypadków są poszukiwanymi wielkościami θ i x_p . Wielkość głębokości pęknięcia wyznaczono z zależności (2).

Wyniki identyfikacji zebrano w tabeli 3.

Tabela 2. Częstotliwości drgań własnych belki wspornikowej z pęknięciem

war- riant	wielkości pęknięcia	częstotliwości drgań własnych [Hz]	
„1”	$x_p = 10$	$f_1 = 132.41$	$f_2 = 834.07$
	$a = 0.2 h$		
„2”	$x_p = 10$	$f_1 = 131.07$	$f_2 = 830.57$
	$a = 0.3 h$		
„3”	$x_p = 30$	$f_1 = 133.04$	$f_2 = 835.45$
	$a = 0.2 h$		
„4”	$x_p = 30$	$f_1 = 132.44$	$f_2 = 834.20$
	$a = 0.3 h$		
„5”	$x_p = 50$	$f_1 = 133.40$	$f_2 = 832.32$
	$a = 0.2 h$		
„6”	$x_p = 50$	$f_1 = 133.32$	$f_2 = 827.33$
	$a = 0.3 h$		
„7”	$x_p = 70$	$f_1 = 133.57$	$f_2 = 834.18$
	$a = 0.2 h$		
„8”	$x_p = 70$	$f_1 = 133.56$	$f_2 = 832.46$
	$a = 0.3 h$		

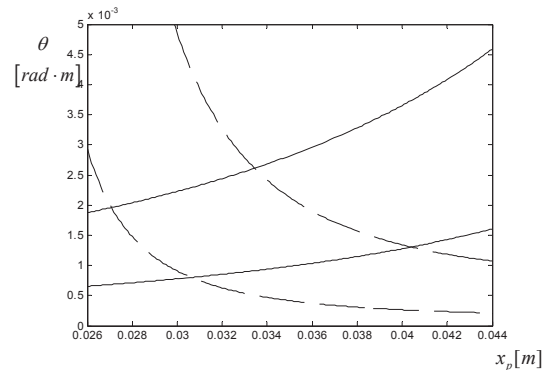
Tabela 3. Wyniki identyfikacji pęknięcia

war- riant	model MES	identyfi- kowane	błąd względny
„1”	$x_p = 10$	$x_p = 8.94$	10.6 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.189 h$	5.5 %
„2”	$x_p = 10$	$x_p = 8.91$	10.9 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.274 h$	8.7 %
„3”	$x_p = 30$	$x_p = 32.2$	7.3 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.208 h$	4.0 %
„4”	$x_p = 30$	$x_p = 31.6$	5.3 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.283 h$	5.7 %
„5”	$x_p = 50$	$x_p = 49.3$	1.4 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.189 h$	5.5 %
„6”	$x_p = 50$	$x_p = 53.6$	7.2 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.264 h$	12.0 %
„7”	$x_p = 70$	$x_p = 74.1$	5.9 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.24 h$	20.0 %
„8”	$x_p = 70$	$x_p = 77.6$	10.9 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.355 h$	18.3 %

Na rysunku 5 pokazany został przebieg krzywej podatności θ w funkcji lokalizacji pęknięcia x_p dla wariantu „4”, z uwzględnieniem błędów wyznaczania częstości. Założono tu, że błąd wyznaczenia każdej częstości drgań własnych jest identyczny z popełnianym przy wyznaczaniu tej częstości dla belki bez pęknięcia jak to przedstawia zależność (7). Wielkością wzorcową są częstości wyznaczone analitycznie z jednowymiarowego

modelu belki Eulera (zwanego również technicznym równaniem drgań belki).

Podobnie jak poprzednio liniami ciągłymi oznaczono krzywe wyznaczone dla $f_1 \pm \delta_1$, liniami przerywanymi dla $f_2 \pm \delta_2$. Identyfikowane wielkości miejsca pęknięcia i jego głębokości zawierają się w części wspólnej wewnątrz obszarów ograniczonych takimi samymi liniami. Obszar ten zawiera lokalizację pęknięcia dla wariantu „4” w przedziale $x_p \in (27.1 - 40.4)$ mm i głębokość pęknięcia $a \in (0.22 - 0.378) \cdot h$ (modelowane parametry to $x_p = 30$ mm i $a = 0.3 h$).



Rys. 5. Przebieg zmiany podatności θ w funkcji x_p dla częstości wyznaczonych z błędem (wariant „4”)

Kolejnym problemem wpływającym na niepewność identyfikacji jest nieuwzględnianie w analizowanych modelach (analitycznych i obliczanych za pomocą MES), a istniejące w rzeczywistości tłumienie. Łatwo udowodnić, iż współczynnik tłumienia wewnętrznego (siła tłumienia jest proporcjonalna do prędkości odkształceń), rośnie z kwadratem częstości i co za tym idzie, jego wpływ na mierzone częstości własne jest tym większy im wyższą częstość chcemy zmierzyć. Jest to podobne zjawisko do zjawiska przesuwania się amplitudy maksymalnej na charakterystyce amplitudowo – częstotliwościowej układu drgającego o jednym stopniu swobody z tłumieniem.

Wynika z tego, że aby zminimalizować wpływ tłumienia na wyniki identyfikacji najlepiej byłoby mierzyć jedynie pierwszą częstość drgań własnych. Niestety dla każdej częstości drgań własnych, tak jak to opisano na początku pracy, zidentyfikować można jedynie zbiór par (θ, x_p) .

Problem ten (wyznaczanie jedynie pierwszej częstości drgań własnych) autor proponuje rozwiązać poprzez chwilową zmianę struktury układu np. poprzez dodanie znanej masy skupionej w określonym przekroju i dla takiego zmodyfikowanego układu wyznaczyć krzywą podatności θ w funkcji położenia pęknięcia x_p . Zidentyfikowane parametry pęknięcia leżą na przecięciu się krzywych wyznaczonych

z pierwszych częstości drgań własnych i modelu belki bez i z zaproponowaną modyfikacją.

Opisany powyżej sposób identyfikacji pokazany zostanie na przykładzie.

3.3. Belka obustronnie utwierdzona

W przypadku belki obustronnie utwierdzonej wyznacznik macierzy głównej ma postać:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh \lambda l & \sinh \lambda l & \cos \lambda l & \sin \lambda l & a_{35} \\ \sinh \lambda l & \cosh \lambda l & -\sin \lambda l & \cos \lambda l & a_{45} \\ \cosh \lambda x_p & \sinh \lambda x_p & \cos \lambda x_p & \sin \lambda x_p & -\frac{1}{\lambda^2} \end{vmatrix}$$

gdzie:

$$a_{35} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot [\sinh \lambda(l - x_p) + \sin \lambda(l - x_p)]$$

$$a_{45} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot [\cosh \lambda(l - x_p) + \cos \lambda(l - x_p)]$$

Parametry pęknięcia wyznaczyć można postępując wg wcześniej opisanego algorytmu i równania (9).

Równanie drgań własnych układu z modyfikacją w postaci dołączenia dodatkowej masy skupionej m_d w przekroju o współrzędnej $x = x_d$ oraz z uwzględnieniem pęknięcia, po rozdzieleniu zmiennych w postaci $y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, można zapisać:

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = \mu \cdot \lambda^4 \cdot X(x_d) \cdot \delta(x, x_d) + \theta \cdot X''(x_p) \cdot \delta''(x, x_p) \quad (10)$$

rozwiązaniem równania (10) jest funkcja (11):

$$\begin{aligned} X(x) = & X_0(x) + \frac{\mu \cdot \lambda}{2} X(x_d) \cdot \\ & \cdot [\sinh \lambda(x - x_d) - \sin \lambda(x - x_d)] H(x, x_d) + \\ & + \frac{\theta}{2\lambda} X''(x_p) \cdot \\ & \cdot [\sinh \lambda(x - x_p) + \sin \lambda(x - x_p)] H(x, x_p) \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: $\mu = m_d / \rho A$, pozostałe oznaczenia jak wyżej.

W takim przypadku należy wyznacznik macierzy głównej uzupełnić o kolumnę związaną z nieznaną wielkością $X(x_d)$ oraz wiersz zależności pomiędzy tą wielkością i stałymi całkowania P, Q, R, S . Na wartość wyznacznika nie wpływa zamiana miejscami dwu dowolnych kolumn czy wierszy, z czego wynika, że dodatkową kolumnę i wiersz można uwzględnić w dowolnym miejscu. Jednak, aby nie utracić możliwości skorzystania z opisanego algorytmu należy dodatkową kolumnę wpisać jako czwartą, podobnie jako czwarty wiersz dodatkowy. W takim przypadku macierz oznaczoną poprzednio przez \mathbf{B} , która powstaje z macierzy \mathbf{A} przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, jest macierzą opisującą problem własny belki z masą skupioną bez uszkodzenia.

Dodatkowa kolumna (zapisana jako czwarta) ma w takim przypadku postać:

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\mu \cdot \lambda}{2} [\sinh \lambda(l - x_m) - \sin \lambda(l - x_m)] \\ \frac{\mu \cdot \lambda}{2} [\cosh \lambda(l - x_m) - \cos \lambda(l - x_m)] \\ -1 \\ \frac{\mu \cdot \lambda}{2} [\sinh \lambda(x_p - x_m) - \sin \lambda(x_p - x_m)] \cdot H(x_p, x_m) \end{vmatrix}$$

Pierwsze częstości drgań własnych układu podstawowego i z modyfikacją potrzebne do identyfikacji zostały wyznaczone z modelu MES i zebrane w tabeli 4. Dane materiałowe i geometryczne przyjęto jak dla belki rozważanej w poprzednim przykładzie, przyjęta wielkość masy dodatkowej $m_d = 0.5 \cdot \rho A$, dołączonej w punkcie $x_d = 0.07$ m.

Tabela 4. Pierwsze częstotliwości drga własnych pękniętej belki bez i z masą dodatkową

wa- riant	wielkości pęknięcia	częstotliwości własne	
		bez m_d	z m_d
„1”	$\frac{x_p = 10}{a = 0.2 h}$	$f_1 = 846.66$	$f_1 = 288.43$
„2”	$\frac{x_p = 10}{a = 0.3 h}$	$f_1 = 843.08$	$f_1 = 287.68$
„3”	$\frac{x_p = 30}{a = 0.2 h}$	$f_1 = 848.72$	$f_1 = 288.81$
„4”	$\frac{x_p = 30}{a = 0.3 h}$	$f_1 = 847.51$	$f_1 = 288.64$
„5”	$\frac{x_p = 50}{a = 0.2 h}$	$f_1 = 864.40$	$f_1 = 288.85$
„6”	$\frac{x_p = 50}{a = 0.3 h}$	$f_1 = 841.14$	$f_1 = 287.81$
„7”	$\frac{x_p = 70}{a = 0.2 h}$	$f_1 = 848.72$	$f_1 = 287.11$
„8”	$\frac{x_p = 70}{a = 0.3 h}$	$f_1 = 847.51$	$f_1 = 284.57$

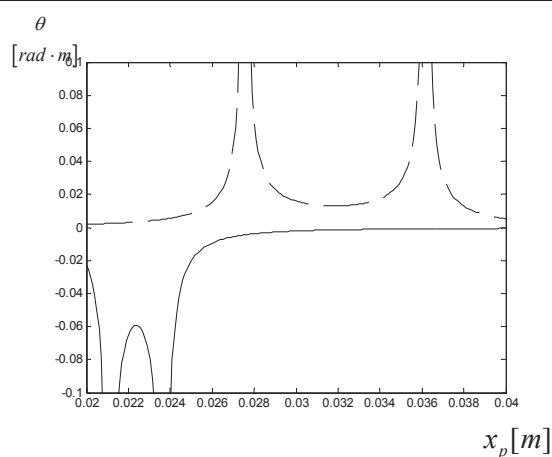
Warianty „7” i „8” dotyczą przypadku, w którym masę dodatkową przyłączono w tym samym przekroju, w którym modelowano pęknięcie. Wyniki identyfikacji przekazano w tabeli 5.

Dla wariantów „3” i „4” nie udało się zidentyfikować miejsca pęknięcia – krzywe wyznaczone dla obu częstości nie przecinają się, co pokazano na rys. 6.

W przypadku wyznaczenia częstości drgań własnych z modelu analitycznego (belki z pęknięciem o znanych parametrach) i wyznaczeniu z nich krzywych podatności w funkcji położenia pęknięcia, krzywe te również nie przecinają się, są jedynie styczne do siebie w punkcie o modelowanych parametrach pęknięcia.

Tabela 5. Wyniki identyfikacji pęknięcia

przypa dek	model MES	identyfikowane	błąd względny
„1”	$x_p = 10$	$x_p = 10.2$	2.0 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.213 h$	6.5 %
„2”	$x_p = 10$	$x_p = 10.9$	9.0 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.325 h$	8.3 %
„3”	$x_p = 30$	-	-
	$a = 0.2 h$	-	-
„4”	$x_p = 30$	-	-
	$a = 0.3 h$	-	-
„5”	$x_p = 50$	$x_p = 48.2$	3.6 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.19 h$	5.0 %
„6”	$x_p = 50$	$x_p = 53.8$	7.6 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.299 h$	0.33 %
„7”	$x_p = 70$	$x_p = 68.8$	1.7 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.23 h$	15.0 %
„8”	$x_p = 70$	$x_p = 69.6$	0.6 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.333 h$	11.0 %



Rys. 6. Krzywe podatności w funkcji położenia pęknięcia dla parametrów opisanych jako wariant „4”

W celu wyznaczenia parametrów pęknięcia dla wariantów „3” i „4” przeprowadzono obliczenia częstości dla tej samej masy m_d , ale dołączonej w punkcie $x_d = 0.04$ m. Dla wariantu „3” częstotliwość drgań własnych układu z masą dodatkową wynosi $f_1 = 239.18$ Hz. Zidentyfikowane parametry pęknięcia wynoszą: położenie $x_p = 28.5$ mm, głębokość $a = 0.213 h$. Dla wariantu „4” $f_1 = 239.20$ Hz, a parametry pęknięcia to $x_p = 32.4$ mm i głębokość $a = 0.279 h$.

Powyższe rozważania wskazują jednoznacznie na konieczność wyznaczania przy pomiarach identyfikacyjnych częstości dla kilku położenia masy dodatkowej (lub kilku wielkości masy). Każde dwie wielkości częstości mogą posłużyć do wyznaczenia krzywych podatności w funkcji położenia pęknięcia, na przecięciu których leżą poszukiwane parametry (położenie i głębokość) pęknięcia.

Po wyznaczeniu parametrów uszkodzenia dla różnych modyfikacji strukturalnych belki można poddać je obróbce statystycznej (np. uśrednianiu), dzięki czemu można zminimalizować wpływ niepewności pomiarów częstości drgań własnych.

4. IDENTYFIKACJA PĘKNIĘCIA Z AMPLITUDE DRGAŃ WYMUSZONYCH

Jako wielkości identyfikacyjne obok częstości drgań własnych wykorzystać można amplitudę drgań wymuszonych mierzoną w dowolnym punkcie. Należy wymusić drgania belki siłą skupioną o znanej amplitudzie i znanej częstości.

W przypadku belek, które ze względów technologicznych obciążone są dynamicznie siłą, którą można traktować jako skupioną z jedną częstością drgań (np. drgania wywołane nie wyważoną masą wirującą - maszyny wiracyjne), pomiary identyfikacyjne można wykonać jako tzw. eksperyment bierny. Pod tym pojęciem rozumiane są pomiary w normalnym stanie pracy, bez konieczności przeprowadzania dodatkowych eksperymentów na „wyłączonym” obiekcie.

Pomiary drgań wymuszonych służyć mogą również do monitorowania pęknięcia – ewentualnego wzrostu jego głębokości.

W przypadku drgań wymuszonych równanie drgań (4) należy uzupełnić o składnik pochodzący od siły przyłożonej w punkcie o współrzędnej $x = x_f$, amplitudzie F i częstości ω_f :

$$X^{(4)} - \lambda^4 X = \theta \cdot X''(x_p) \cdot \delta''(x, x_p) + - F \cdot \delta(x, x_f) \tag{12}$$

rozwiązanie równania (12) poszukiwane będzie w klasie funkcji uogólnionych. Dzięki czemu otrzymuje się rozwiązanie w postaci skończonej w przeciwieństwie do metody klasycznej, gdzie rozwiązanie otrzymuje się w postaci nieskończonej sumy funkcji własnych.

Rozwiązaniem równania (12) jest funkcja:

$$X(x) = X_0(x) + \frac{\theta}{2\lambda} X''(x_p) \cdot \frac{[\sinh \lambda(x - x_p) + \sin \lambda(x - x_p)]H(x, x_p) + \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \cdot [\sinh \lambda(x - x_f) + \sin \lambda(x - x_f)]H(x, x_f)}{\tag{13}}$$

gdzie teraz:

$$- \lambda = \omega_w^2 \rho A / EI,$$

$$- X_0 = P \cosh \lambda x + Q \sinh \lambda x + R \cos \lambda x + S \sin \lambda x$$

Amplituda drgań wymuszonych w punkcie pomiarowym o współrzędnej $x = c$ jest równa:

$$X(c) = X_0(c) + \frac{\theta}{2 \cdot \lambda} \cdot \frac{[\sinh \lambda(c - x_p) + \sin \lambda(c - x_p)]H(c, x_p) + \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \cdot [\sinh \lambda(c - x_f) - \sin \lambda(c - x_f)]H(c, x_f)}{\tag{14}}$$

gdzie:

$$X_0(c) = P \cosh \lambda c + Q \sinh \lambda c + R \cos \lambda c + S \sin \lambda c$$

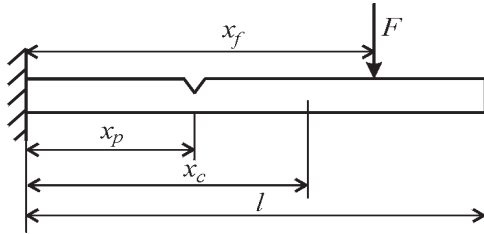
Stałe całkowania P , Q , R , S należy dobrać tak, by funkcje (13) i (14) spełniały warunki brzegowe.

Podobnie jak w przypadku identyfikacji opartej na pomiarze częstości drgań własnych, do identyfikacji konieczny jest pomiar amplitudy drgań w dwu punktach ($x = c_1$ i $x = c_2$) lub w jednym punkcie, ale przy różnych wymuszeniach.

Sposób postępowania przy identyfikacji pęknięcia, dla którego wielkością wejściową jest amplituda drgań wymuszonych pokazany zostanie na przykładzie.

4.1. Belka wspornikowa

Model analizowanego układu pokazany jest na rys. 7.



Rys. 7. Model belki wspornikowej z pęknięciem

Warunki brzegowe dla belki pokazanej na rysunku 7 opisują równania: $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$, $X''(l) = 0$ oraz $X'''(l) = 0$. Podobnie jak wcześniej równania te zostaną zapisane w postaci macierzowej:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{CS} = \mathbf{W} \quad (15)$$

gdzie:

macierz \mathbf{M} :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh \lambda l & \sinh \lambda l & -\cos \lambda l & -\sin \lambda l & a_{35} \\ \sinh \lambda l & \cosh \lambda l & \sin \lambda l & -\cos \lambda l & a_{45} \\ \operatorname{ch} \lambda x_p & \operatorname{sh} \lambda x_p & \cos \lambda x_p & \sin \lambda x_p & -1 \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$a_{35} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot [\sinh \lambda(l - x_p) - \sin \lambda(l - x_p)]$$

$$a_{45} = \frac{\theta}{2\lambda} \cdot [\cosh \lambda(l - x_p) - \cos \lambda(l - x_p)]$$

wektor stałych \mathbf{CS} :

$$\mathbf{CS}^T = [P \quad Q \quad R \quad S \quad X''(x_p)]^T$$

a, wektor wymuszeń \mathbf{W} :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \cdot [\sinh \lambda(l - x_f) - \sin \lambda(l - x_f)] \\ \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \cdot [\cosh \lambda(l - x_f) - \cos \lambda(l - x_f)] \\ \frac{F}{2EI\lambda^3} [\sinh \lambda(x_p - x_f) + \sin \lambda(x_p - x_f)] H(x_p, x_f) \end{bmatrix}$$

W przypadku gdy częstość wymuszenia nie jest żadną z częstości drgań własnych układu rząd macierzy głównej jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej, z czego wynika, że układ (15) można rozwiązać korzystając ze wzorów Cramera.

Do rozwiązania tego problemu zaproponowana zostanie następująca metodologia, która pozwala na stworzenie algorytmu komputerowego:

1. w macierzy głównej \mathbf{M} zostanie dokonana modyfikacja polegająca na tym by w miejsce wielkości θ wprowadzić wielkość 1 (jeden) – powstała macierz oznaczono przez \mathbf{A} ;
2. należy skonstruować inną macierz (tu oznaczoną \mathbf{B}), która powstaje z macierzy \mathbf{A} przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny, jest to więc macierz opisująca problem własny belki bez uszkodzenia;
3. przy takich oznaczeniach poszukiwany wyznacznik główny jest równy:
$$W_g = \theta \cdot (\det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})) - \det(\mathbf{B}) \quad (16)$$
 równanie to łatwo wyprowadzić rozwijając go względem ostatniej kolumny.
4. należy, zgodnie z metodą Cramera, skonstruować 5 macierzy, w których kolejne kolumny macierzy \mathbf{A} zostaną zastąpione kolumną wyrazów wolnych \mathbf{W} . Tak wyznaczone macierze oznaczono \mathbf{C}_i gdzie $i = 1, 2, 3, 4, 5$ oznacza numer zastąpionej kolumny (\mathbf{C}_1 – ma postać macierzy \mathbf{A} w której 1-szą kolumnę zastąpiono wektorem wymuszeń \mathbf{W}).

5. podobnie jak w punkcie 2 należy skonstruować z macierzy \mathbf{C}_i macierze \mathbf{D}_i , które powstają z odpowiadających sobie macierzy \mathbf{C}_i przez wykreślenie ostatniego wiersza i ostatniej kolumny,

6. odpowiednie wyznaczniki konieczne do wyznaczenia stałych z wektora \mathbf{CS} wynoszą w takim przypadku:

$$W_P = \theta (\det \mathbf{C}_1 + \det \mathbf{D}_1) - \det \mathbf{D}_1;$$

$$W_Q = \theta (\det \mathbf{C}_2 + \det \mathbf{D}_2) - \det \mathbf{D}_2;$$

$$W_R = \theta (\det \mathbf{C}_3 + \det \mathbf{D}_3) - \det \mathbf{D}_3;$$

$$W_S = \theta (\det \mathbf{C}_4 + \det \mathbf{D}_4) - \det \mathbf{D}_4;$$

$$W_{X''} = \det \mathbf{C}_5$$

dla uproszczenia oznaczeń oznaczono:

$$L_1 = \det \mathbf{A} + L_2; \quad L_2 = \det \mathbf{B};$$

$$L_3 = \det \mathbf{C}_1 + L_4; \quad L_4 = \det \mathbf{D}_1;$$

$$L_5 = \det \mathbf{C}_2 + L_4; \quad L_4 = \det \mathbf{D}_2;$$

$$L_7 = \det \mathbf{C}_3 + L_4; \quad L_4 = \det \mathbf{D}_3;$$

$$L_9 = \det \mathbf{C}_4 + L_{10}; \quad L_{10} = \det \mathbf{D}_4;$$

$$L_{11} = \det \mathbf{C}_5;$$

7. stałe całkowania wyznaczyć można z zależności

$$P = \frac{W_P}{W_g} = \frac{\theta \cdot L_3 - L_4}{\theta \cdot L_1 - L_2}; \quad Q = \frac{W_Q}{W_g} = \frac{\theta \cdot L_5 - L_6}{\theta \cdot L_1 - L_2};$$

$$R = \frac{W_R}{W_g} = \frac{\theta \cdot L_7 - L_8}{\theta \cdot L_1 - L_2}; \quad S = \frac{W_S}{W_g} = \frac{\theta \cdot L_9 - L_{10}}{\theta \cdot L_1 - L_2};$$

$$X^n(x_p) = \frac{W_{X^n}}{W_g} = \frac{L_{11}}{\theta \cdot L_1 - L_2}$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania należy skonstruować identyfikacyjny model odwrotny tzn. model, z którego da się wyznaczyć poszukiwaną podatność θ mając wyznaczoną (zmierzoną) amplitudę drgań w punkcie pomiarowym $x = c$.

8. dla każdego $x_p \in (0, l)$ podatność θ wyznaczyć można z zależności:

$$\theta = \frac{L_P - L_2 \cdot Z}{L_N - L_1 \cdot Z + L_H} \quad (17)$$

gdzie:

$$L_P = L_4 \cosh \lambda c + L_6 \sinh \lambda c + L_8 \sin \lambda c + L_4 \cos \lambda c$$

$$L_N = L_3 \cosh \lambda c + L_5 \sinh \lambda c + L_7 \sin \lambda c + L_9 \cos \lambda c$$

$$L_H = \frac{L_{11}}{2\lambda} \cdot [\sinh \lambda(c - x_p) + \sin \lambda(c - x_p)] \cdot H(c, x_p)$$

$$Z = POM(c) + \frac{F}{2 \cdot EI \cdot \lambda^3} \cdot$$

$$\cdot [\sinh \lambda(c - x_f) - \sin \lambda(c - x_f)] H(c, x_f)$$

$POM(c)$ – jest zmierzona wielkością amplitudy drgań w punkcie o współrzędnej $x = c$.

Podobnie jak przy identyfikacji z częstości drgań własnych każdy pomiar (w jednym punkcie) pozwala na wykreślenie krzywej podatności θ w funkcji położenia pęknięcia x_p , dla których amplituda drgań w punkcie o współrzędnej $x = c$ będzie wynosić $POM(c)$ ($X(c) = POM(c)$).

Dlatego też punkt 8 algorytmu należy powtórzyć dla każdego z pomiarów. Na przecięciu krzywych wyznaczonych dla dwu pomiarów identyfikacyjnych (różne punkty pomiarowe lub różne wymuszenia) leżą poszukiwane parametry pęknięcia.

Dla belki pokazanej na rysunku 7 wyznaczono (przy użyciu MES) wielkości amplitud drgań wymuszonych siłą o amplitudzie $F = 100$ N, częstości $\omega_w = 300$ rad/s, przyłożą na końcu belki $x_f = l$. Do identyfikacji pęknięcia wybrano amplitudę drgań belki w dwu punktach $x = l$, $x = 0.085$ m. Modelowane parametry pęknięć wybrano takie same jak w punkcie 3.2 (tabela 2). Wyniki identyfikacji zebrano w tabeli 6.

Tabela 6. Wyniki identyfikacji pęknięcia

wariant	model MES	identyfikowane	błąd względny
„1”	$x_p = 10$	$x_p = 9.37$	6.3 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.177 h$	11.5 %
„2”	$x_p = 10$	$x_p = 9.68$	3.2 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.278 h$	7.3 %
„3”	$x_p = 30$	$x_p = 28.4$	5.3 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.173 h$	13.5 %
„4”	$x_p = 30$	$x_p = 28.3$	5.7 %

	$a = 0.3 h$	$a = 0.273 h$	9.0 %
„5”	$x_p = 50$	$x_p = 50.1$	0.2 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.202 h$	1.0 %
„6”	$x_p = 50$	$x_p = 52.7$	5.4 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.341 h$	13.7 %
„7”	$x_p = 70$	$x_p = 75.6$	8.0 %
	$a = 0.2 h$	$a = 0.172 h$	14.0 %
„8”	$x_p = 70$	$x_p = 78.8$	12.6 %
	$a = 0.3 h$	$a = 0.337 h$	12.3 %

Do pomiarów identyfikacyjnych można również, podobnie jak przy pomiarach częstości, dołączyć pomiary dla układu zmodyfikowanego przez dodanie masy skupionej.

Każde dwie wielkości zmierzonych amplitud drgań mogą posłużyć do wyznaczenia krzywych podatności w funkcji położenia pęknięcia, na przecięciu, których leżą poszukiwane parametry (położenie i głębokość) pęknięcia.

Po wyznaczeniu parametrów uszkodzenia dla różnych wielkości amplitud można poddać je obróbce statystycznej (np. uśrednianiu), dzięki czemu można zminimalizować wpływ niepewności pomiarów amplitudy drgań oraz położenia punktu pomiarowego.

5. PODSUMOWANIE

W układach konstrukcyjnych, których modelem fizycznym jest belka prostoliniowa, możliwa jest identyfikacja parametrów pęknięcia. Jako wielkości konieczne do identyfikacji wykorzystano częstości drgań własnych i amplitudy drgań wymuszonych. Każdy pomiar (częstości czy amplitudy drgań wymuszonych) pozwala na wyznaczenie krzywej podatności sprężyny modelującej pęknięcie w funkcji jego położenia.

Dla każdej pary parametrów (θ, x_p) leżących na krzywej spełniony jest warunek identyfikacji, czyli częstość drgań własnych wynosi tyle co częstość zmierzona (dla identyfikacji z częstości) lub amplituda drgań w wybranym punkcie jest równa wielkości zmierzonej (identyfikacja z amplitudy).

W punkcie wspólnym dla dwu dowolnych krzywych leżą poszukiwane parametry pęknięcia, stąd wynika, że dla np. pięciu dowolnych pomiarów identyfikacyjnych otrzymuje się dziesięć par krzywych, z których po obróbce statystycznej można wyznaczyć poszukiwane parametry pęknięcia.

W każdym przypadku identyfikacji dokładność wyznaczenia parametrów pęknięcia zależy od dokładności (niepewności) pomiaru. Otrzymać można wtedy jedynie pewne obszary, w których zawierają się poszukiwane parametry pęknięcia.

W przypadku identyfikacji z amplitud drgań wymuszonych na jej wynik ma wpływ zarówno niepewność wyznaczenia amplitudy drgań jak

i współrzędnej, w której jest ona mierzona. Znacznie mniejsze obszary, w których zawierają się poszukiwane parametry pęknięcia otrzymuje się w przypadkach pomiarów amplitud przy różnych wymuszeniach lub dla układu zmodyfikowanego (np. poprzez dodanie masy skupionej) niż przy pomiarach amplitud w dwu różnych punktach przy jednym wymuszeniu.

LITERATURA

- [1]Cacciola P., Impollonia N., Muscolina G.: *Crack detection and location in a damaged beam vibrating under white noise*, Computers and Structures 81 (2003) pp. 1773-1782.
- [2] Chaudhari T.D., Maiti S.K.: *A study of vibration of geometrically segmented beams with and without crack*, International Journal of Solids and Structures 37 (2000) pp. 761-779.
- [3] Dimarogonas A. D.: *Vibration of cracked structures: a state of the art review*, Engineering Fracture Mechanics 55 (1996) pp. 831-857.
- [4] Göktepe M.: *Non-destructive crack detection by capturing local flux leakage field*, Sensors and Actuators A, 91 (2001) pp. 70-72.
- [5] Kasprzyk S., Majkut L.: *Rozwiązywanie problemów brzegowych i początkowo - brzegowych belek z lokalną, skokową zmianą sztywności w klasie funkcji uogólnionych*, kwartalnik AGH Mechanika 16 (1997) str. 179-215.
- [6] Krawczuk M.: *Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection*, Finite Elements in Analysis and Design, 38 (2002) pp. 537-548.
- [7] Krawczuk M., Ostachowicz W.: *Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana 34 (1996) pp. 307-326.
- [8] Krawczuk M., Ostachowicz W., Żak A.: *Modal analysis of cracked, unidirectional composite beam*, Composites Part B 28B (1997) pp. 641-650.
- [9] Krawczuk M., Żak A., Ostachowicz W.: *Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack*, Finite Elements in Analysis and Design 34 (2000) pp. 61-73.
- [10] Lee Y-S., Chung M-J.: *A study on crack detection using eigenfrequency test data*, Computers and Structures 77 (2000) pp. 327-342.
- [11] Liu S. W., Huang J. H., Sung J. C., Lee C. C.: *Detection of crack using neural networks and computational mechanics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 191 (2002) pp. 2831-2845.
- [12]Majkut L.: *Wpływ lokalnej zmiany sztywności elementów konstrukcyjnych na amplitudę drgań i widmo częstości*, Praca doktorska AGH Kraków 1999.
- [13]Nandwana B. P., Maiti S., K.: *Detection of the location and size of a crack in stepped cantilever beams based on measurements of natural frequencies*, Journal of Sound and Vibration 203 (1997) pp. 435-446.
- [14]Narkis Y.: *Identification of crack location in vibrating simply supported beams*, Journal of Sound and Vibration 172 (1994) pp. 549-558.
- [15]Neimitz A.: *Mechanika pękania*, Warszawa PWN 1998, wydanie 1, rozdziały 2 i 3.
- [16]Ostachowicz W., Krawczuk M.: *Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam*, Journal of Sound and Vibration 150 (1991) pp. 191-201.
- [17]Quek S-T., Wang Q., Zhang L., Ang K-K.: *Sensitivity analysis of crack detection in beams by wavelet technique*, International Journal of Mechanical Sciences 43 (2001) pp. 2899-2910.
- [18]Tian J., Li Z., Su X.: *Crack detection in beams by wavelet analysis of transient flexural waves*, Journal of Sound and Vibration 261 (2003) pp. 715-727.
- [19]Viola E., Federici L., Nobile L.: *Detection of crack location using cracked beam element method for structural analysis*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics 36 (2001) pp. 23-35.



dr inż. Leszek MAJKUT (ur. 1970), absolwent Wydziału Elektroniki, Automatyki, Informatyki i Elektrotechniki AGH (1995). Pracę doktorską dotyczącą wpływu lokalnej zmiany sztywności na amplitudę drgań i widmo częstości obronił w 1999 na Wydziale Inżynierii Mechanicznej i Robotyki AGH w Krakowie. Obecnie prace badawcze dotyczące ogólnie pojętej wibromechaniki (drgania, wibroizolacja, hałas, diagnostyka), teorii drgań ze szczególnym uwzględnieniem układów ciągłych prowadzi w zespole Wibromechaniki Katedry Mechaniki i Wibroakustyki AGH.