

## ZASTOSOWANIE WEKTORÓW RITZA W DIAGNOSTYCE KONSTRUKCJI

Tadeusz UHL, Krzysztof MENDROK

Katedra Robotyki i Dynamiki Maszyn, Akademia Górniczo Hutnicza  
Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, fax: +48 12 634 35 05, mendrok@agh.edu.pl

### Streszczenie

Wektory Ritza są wielkością podobną do wektorów modalnych. Ich zaletą względem wektorów modalnych jest fakt, że do oddania charakteru odpowiedzi układu potrzebna jest mniejsza ich liczba niż wektorów modalnych. Symulacyjne analizy numeryczne wykazały ponadto, że Wektory Ritza, zwane też wektorami Lanczosa, lepiej nadają się do wykrywania uszkodzenia niż wektory modalne. W pracy przedstawiono krótki przegląd metod wykrywania uszkodzeń bazujących na modelu modalnym. Przytoczono definicję wektorów Ritza oraz pokazano kilka sposobów ich wyznaczania. Porównano ich skuteczność w wykrywaniu uszkodzenia zasymulowanego na stanowisku laboratoryjnym w odniesieniu do wektorów modalnych.

Słowa kluczowe: wektory Ritza, wektory modalne, wodeł modalny, analiza modalna, wykrywanie uszkodzeń

### BEAM CRACK DETECTION WITH USE OF RITZ VECTORS

#### Summary

Ritz vectors have similar character as modal vectors. Their advantage with respect to modal vectors is a fact, that less number of them is required to estimate object response. Numerical analysis proofed also, that Ritz vectors, called sometimes Lanczos vectors, have better ability to detect damage then modal vectors. In the paper short overview of modal model based damage detection methods is presented. Definition of Ritz vectors and some methods of their estimation are shown. The paper also consists a comparison of effectiveness in detection of damage, simulated on laboratory stand, both the Ritz and the modal vectors.

Keywords: ritz vectors, modal vectors, modal model, modal analysis, damage detection

#### 1. WSTĘP

W ostatnich latach wraz ze wzrostem mocy obliczeniowych komputerów obserwowany jest wzrost zastosowań analizy modalnej. Zwłaszcza opracowanie algorytmów eksploatacyjnej analizy modalnej, pozwalającej na estymację parametrów modelu modalnego konstrukcji jedynie na podstawie pomiarów odpowiedzi, stwarza szerokie możliwości aplikacyjne. Eksploatacyjna analiza modalna jest wykorzystywana między innymi do: dostrajania modeli elementów skończonych, syntezy układów sterowania, modyfikacji strukturalnej układów dynamicznych [2], [3]. Możliwość estymacji parametrów modelu modalnego konstrukcji w warunkach eksploatacyjnych powoduje, że ta technika może być wykorzystana w procesie diagnozowania stanu obiektu. Proces wykrywania uszkodzeń opiera się często na śledzeniu zmian parametrów modeli konstrukcji [7], [8]. Z uwagi na opracowane algorytmy i procedury identyfikacji modeli modalnych są one często i chętnie wykorzystywane w diagnostyce. Proces taki można

podzielić na dwa etapy. W pierwszym mierzy się poziom amplitudy drgań w wybranych punktach obiektu. W przypadku, gdy wartość zmierzona przekroczy dopuszczalny poziom, następuje etap drugi polegający na znalezieniu przyczyny tego wzrostu. Zmiany parametrów modelu modalnego są w prezentowanej grupie metod symptomami zmian stanu obiektu. Pozwalają one na określenie przyczyny pogorszenia własności dynamicznych konstrukcji. Do przyczyn takich należą: zmiany w parametrach konstrukcji np. zmiana sztywności na skutek propagacji pęknięcia, powstanie luzu w parach kinematycznych, wzrost wartości wymuszeń itp. Metody te umożliwiają również lokalizację uszkodzenia.

Podstawą metod wykrywania uszkodzeń opartych na modelu modalnym jest znalezienie takich cech tych modeli, które pozwolą na odróżnienie układu nieuszkodzonego od uszkodzonego, a także dadzą informację na temat miejsca i stopnia uszkodzenia. W literaturze opisano wiele metod oceny stanu konstrukcji na podstawie

znajomości ich modelu modalnego. Do najczęściej wykorzystywanych w praktyce należą:

- metody oparte na ocenie zmian parametrów modelu modalnego (częstotliwości drgań własnych, współczynników tłumienia) [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15],
- metody oparte na analizie charakterystyk częstotliwościowych układów [16], [17], [18], [19],
- metody oparte na metodzie elementów skończonych (współczynnik MDLAC, dostrajanie modelu MES) [20], [21], [22],
- metody oparte o analizę zmian parametrów modeli regresyjnych [23], [24],
- metody oparte o analizę wektorów modalnych (porównanie kształtu postaci drgań własnych – MAC, zmiana pochodnych postaci drgań, zmiana energii postaci drgań) [25], [26], [27],
- metody oparte o analizę wektorów Ritza [4], [5], [8].

Pierwsza grupa metod bazuje na analizie zmian wartości biegunów układu. Każdy biegun układu ma dwie składowe: część rzeczywistą, która jest proporcjonalna do współczynnika tłumienia oraz część urojona, której wartość jest proporcjonalna do częstości własnej układu. Metoda ta jest bardzo skuteczna w diagnozowaniu układów automatyki natomiast, w przypadku układów mechanicznych możliwość jej zastosowania jest ograniczona. Skuteczność metody zależy między innymi od miejsca powstającego uszkodzenia, warunków brzegowych i wielu innych. W przypadku analizy zmian częstotliwości drgań własnych trudnością jest zbliżona jej wrażliwość na uszkodzenie co na zmianę warunków brzegowych, czy innych czynników zewnętrznych. Obecnie coraz częściej stosuje się modalny współczynnik tłumienia drgań w konstrukcji jako miarę jej uszkodzenia. Związane jest to z faktem, że pęknięcia powstające w konstrukcji są przyczyną dodatkowej dyssypacji energii. Współczynnik tłumienia jest jednak trudny do dokładnego wyznaczenia metodami identyfikacji modeli modalnych [28].

Druga grupa metod bazuje na porównaniu charakterystyk częstotliwościowych układów uszkodzonych z nieuszkodzonymi. Charakterystyki częstotliwościowe mogą być bezpośrednio mierzone na obiekcie lub też syntezowane na podstawie zidentyfikowanego modelu modalnego. Metoda opisana w pracy [16] polega na wyliczeniu wektora uszkodzenia  $d$ . Jeżeli w układzie wystąpi uszkodzenie w wektorze  $d$  powinny pojawić się niezerowe elementy. Istnieją dwa warianty tej metody. Pierwsza wymaga znajomości wektora sił wymuszających. W warunkach eksploatacyjnych trudny do praktycznej realizacji jest pomiar takich sił, dlatego metoda możliwa jest do stosowania również bez ich znajomości.

Inną metodą wykrywania uszkodzeń opartą na charakterystyce częstotliwościowej układu jest metoda analizy zmian podatności dynamicznej układu [19]. Ze względu na fakt, że podatność dynamiczna jest zdominowana przez postacie drgań

związane z niskimi częstościami, dokładniejsza jest jej identyfikacja w porównaniu ze sztywnością dynamiczną. W metodzie tej sprawdzany jest iloczyn macierzy sztywności i podatności, który powinien być równy macierzy jednostkowej. W celu wykrycia uszkodzenia, liczona jest macierz podatności dynamicznej w oparciu o zidentyfikowany model modalny, a następnie przemnażana jest przez macierz sztywności układu nieuszkodzonego. Na tej podstawie liczona jest zmiana sztywności układu. Metoda ta jest bardzo skuteczna i stosowana w praktyce dla lokalizacji uszkodzenia i oceny stopnia jego zaawansowania

Metody bazujące na modelach MES opierają się na analizie ich wrażliwości na zmianę sztywności [20]. Jedną z metod polega na wyliczeniu współczynnika MDLAC (ang. Multiple Damage Location Assurance Criterion), który fizycznie oznacza zmianę współczynnika sztywności  $j$ -tego elementu w modelu MES. Współczynnik MDLAC jest niezależny od skalowania i dlatego daje informacje jedynie o względnej wielkości uszkodzenia. Stosowalność metody jest silnie ograniczona, gdyż wymaga modelu MES dostrojonego w zakresie pierwszych 10 – 15 postaci drgań własnych.

Często używanymi w diagnostyce modelami są też parametryczne modele regresyjne. Ich popularność spowodowana jest dobrze poznanymi i łatwo dostępnymi algorytmami ich identyfikacji [1]. Kolejną zaletą z punktu widzenia zagadnień monitoringu i diagnostyki jest możliwość identyfikowania zmian parametrów modelu w czasie rzeczywistym. Szczególnie przydatne są modele bazujące jedynie na sygnałach odpowiedzi układu, takie jak AR czy ARMA. Parametry zidentyfikowanych modeli regresyjnych można stosunkowo łatwo przełożyć na fizyczne własności układu takie jak częstotliwość drgań własnych czy współczynnik tłumienia. Analiza zmian tego ostatniego jest wykorzystywana do detekcji zjawiska flatteru w czasie lotu samolotu [29].

Kolejną grupę metod detekcji uszkodzenia przy pomocy modeli modalnych stanowią algorytmy oparte na wektorach modalnych obiektu. Pierwszym ze sposobów wykrywania uszkodzenia jest porównywanie wektorów modalnych przy pomocy współczynnika MAC (ang. Modal Assurance Criterion) [1]. Zastosowanie pochodnego współczynnika CoMAC (ang. Coordinate MAC) pozwala dodatkowo na lokalizację uszkodzenia.

Inną metodą jest porównanie krzywizny (pochodnej) wektora modalnego układu uszkodzonego z analogiczną własnością układu nieuszkodzonego. Zaletą tej metody jest fakt, że zmiana krzywizny zdefiniowana jako pochodna lub druga pochodna wektora modalnego jest bardziej wrażliwa na zmiany struktury niż on sam. Wadą jest fakt, iż przy niewielkiej liczbie punktów pomiarowych obciążona jest stosunkowo dużym błędem. Stosuje się wówczas aproksymację

wielomianową i pochodną wyznacza się analitycznie.

Bardzo skuteczną metodą opartą na wektorach modalnych jest analiza energii odkształcenia [27]. Polega ona na wyznaczeniu różnicy energii odkształcenia dla układu nieuszkodzonego i uszkodzonego. Zaletą metody jest jej duża wrażliwość na uszkodzenie. Przy jej pomocy możliwa jest detekcja już 5% pęknięcia (uszkodzenie stanowi 5 % powierzchni przekroju elementu).

Poza wspomnianymi istnieje wiele innych metod detekcji uszkodzeń opartych na modelu modalnym konstrukcji i wielkościach z nim związanych. Do takich wielkości należą wektory Ritza.

## 2. WEKTORY RITZA

Wektory Ritza są podobną wielkością do wektorów modalnych. Ich zaletą w stosunku do wektorów modalnych jest fakt, że do oddania charakteru odpowiedzi układu potrzebna jest mniejsza liczba wektorów Ritza niż wektorów modalnych. Symulacyjne analizy numeryczne wykazały ponadto, że wektory Ritza, zwane też wektorami Lanczosa, są bardziej wrażliwe na uszkodzenia niż wektory modalne [4]. Cechy te powodują, że prowadzone są prace nad zastosowaniem ich do układów monitoringu i diagnostyki [4], [5], [6], [8].

Pierwszy wektor Ritza odpowiada statycznej deformacji układu przy zadanym wektorze obciążenia. Aby go wyznaczyć konieczna jest znajomość macierzy mas  $M$ , sztywności  $K$  i tłumień  $D$  modelu układu oraz wektora obciążeń  $F(t)$ , gdyż wektory Ritza zależne są od obciążenia. Zakłada się, na wstępie, że wektor  $F(t)$  można rozłożyć na przestrzenny wektor obciążenia  $f$  i funkcję czasu  $u(t)$ :

$$F(t) = f \cdot u(t) \quad (1)$$

Jak już wspomniano pierwszy wektor Ritza jest wyliczany jako statyczne ugięcie wywołane przestrzennym wektorem obciążenia  $f$ :

$$K \cdot \tilde{r}_1 = f \quad (2)$$

Następnie wektor jest normalizowany względem masy:

$$r_1 = \frac{\tilde{r}_1}{\left[ \tilde{r}_1^T \cdot M \cdot \tilde{r}_1 \right]^{1/2}} \quad (3)$$

Kolejne wektory Ritza są wyliczane rekursywnie. Przyjmuje się, że iloczyn macierzy mas  $M$  przez poprzedni wektor to obciążenie i rekurencyjna formuła z której wylicza się  $\tilde{r}_s$  przyjmuje postać:

$$K \cdot \tilde{r}_s = M \cdot r_{s-1} \quad (4)$$

Następnie wykorzystuje się metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta, aby zapewnić liniową niezależność wektorów. Kolejne wektory Ritza są więc ortogonalizowane względem masy w stosunku do wszystkich poprzednich wektorów.

$$\tilde{r}_s = \tilde{r}_s - \sum_{i=1}^{s-1} (r_i^T \cdot M \cdot \tilde{r}_s) \cdot r_i \quad (5)$$

Dodatkowo każdy kolejny wyznaczony wektor jest normalizowany względem masy według zależności (3). Jak już napisano analityczne wyznaczenie wektorów Ritza wymaga znajomości struktury układu oraz wektora obciążenia. Aby praktycznie wykorzystać wektory Ritza w diagnostyce niezbędne jest ich pozyskiwanie z danych eksploatacyjnych. W literaturze opisano dwie takie metody:

- metoda wykorzystująca model modalny i macierz widmowych funkcji przejścia [4],
- metoda oparta na modelu w przestrzeni stanu [6].

### 2.1. Wyznaczanie wektorów Ritza w oparciu o model modalny i macierz widmowych funkcji przejścia

Metoda wyznaczania wektorów Ritza bazująca na macierzy podatności dynamicznej została opracowana przez Sohn'a i Law'a [4]. Macierz podatności  $G$  pozyskiwana jest na drodze pomiarowej w eksperymencie modalnym. Możliwa jest też synteza odpowiednich charakterystyk na podstawie zidentyfikowanego modelu modalnego. Jeżeli wektory modalne modelu są znormalizowane względem masy ( $V^T \cdot M \cdot V = I$ ) to macierz podatności można wyznaczyć w następujący sposób:

$$G = V \cdot \Omega^{-1} \cdot V^T \quad (6)$$

gdzie:  $V$  – macierz wektorów modalnych,  $\Omega$  – macierz wartości własnych.

W większości przypadków podczas eksperymentu modalnego identyfikuje się tylko kilka pierwszych wektorów modalnych, dlatego też macierz podatności podzielono na część modalną  $G_m$  i resztową  $G_r$  będącą wynikiem wpływu niezidentyfikowanych wyższych postaci drgań własnych. Wpływ wyższych postaci drgań własnych na przebieg charakterystyk podatności dynamicznej zawiera się w przedziale od 3 do 10 % i jest zaniedbywalny dla większości zastosowań, jednakże przy wyznaczaniu wektorów Ritza należy go uwzględnić. Część macierzy podatności będącą wynikiem wzbudzenia wyższych postaci otrzymuje się wyznaczając funkcję  $R(\omega)$ , przy zastosowaniu pomiarowej macierzy widmowych funkcji przejścia  $H$ :

$$R(\omega) = H(\omega) + \omega^2 \cdot V_m (\Omega_m - \omega^2 \cdot I)^{-1} V_m^T = -G_r \cdot \omega^2 \quad (7)$$

Sumując wyznaczoną funkcję po zbiorze częstotliwości otrzymano resztową część macierzy podatności:

$$G_r = - \sum_{\omega \in \text{zakres}} \frac{R(\omega)}{\omega^2} \quad (8)$$

Pełna macierz podatności dynamicznej  $G$  jest sumą części modalnej  $G_m$  (wyznaczanej ze wzoru (6)) i części resztowej  $G_r$ . Posiadając w ten sposób wyznaczoną macierz podatności, przestrzenny wektor obciążenia  $f$  oraz macierz mas  $M$  można wyznaczyć pierwszy wektor Ritza:

$$\tilde{r}_1 = G \cdot f \quad (9)$$

Następnie wektor jest normalizowany względem masy zgodnie ze wzorem (3). Kolejne wektory podobnie jak w przypadku analitycznym wyznacza się rekursywnie korzystając z zależności:

$$\tilde{r}_s = G \cdot M \cdot r_{s-1} \quad (10)$$

Dalej wektory są poddawane ortogonalizacji (5) i normalizacji względem masy (3).

Zaletą metody jest jej duża dokładność w wyznaczaniu wektorów, wynikająca z uwzględnienia wyższych postaci drgań. Poważne ograniczenie jej stosowalności stanowi fakt, że wymaga ona znajomości analitycznej macierzy mas układu, która dla złożonych struktur jest trudna do wyznaczenia.

## 2.2. Wyznaczanie wektorów Ritza w oparciu o równania stanu

Inną metodę wyznaczania wektorów Ritza z danych eksploatacyjnych zaproponowali Cao i Zimmerman [6]. Metoda bazuje na przekształceniu równania ruchu układu w układ równań stanu:

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (11)$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot K & -M^{-1} \cdot D \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} f \end{bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} z \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$$

Odpowiedź układu  $y(t)$  jest mierzona w  $m$  punktach pomiarowych i powiązana z wektorem stanu  $x$  równaniem:

$$y = C \cdot x + D \cdot u \quad (12)$$

Dowodniono, że istnieje nieskończenie wiele modeli stanu opisujących dany układ. Z danych eksperymentalnych można wyznaczyć macierze modelu przestrzeni stanu  $A$ ,  $B$ ,  $C$  stosując dobrze znany algorytm identyfikacyjny ERA (ang. Eigensystem Realisation Algorithm) [1]. W algorytmie tym na podstawie pomiarowej macierzy widmowych funkcji przejścia zestawia się blokową macierz Hankela zawierającą impulsowe

odpowiedzi układu. Macierz Hankela jest ważnym iloczynem macierzy sterowalności i obserwowalności układu. Poprzez wykreślanie odpowiednich wierszy i kolumn wyznacza się macierze modelu w przestrzeni stanu w formie dyskretnej. W kolejnym kroku należy przekształcić dyskretny model stanu na postać ciągłą korzystając z zależności:

$$A = \frac{\ln A_d}{\Delta t}, \quad B = (A_d - I)^{-1} \cdot A^{-1} \cdot B_d, \quad C = C_d \quad (13)$$

Mając zestawione macierze ciągłego modelu stanu można wyznaczyć wektory Ritza. Pierwszy wektor  $\tilde{x}_1$  stanowi statyczne ugięcie i jest wyznaczany ze wzoru:

$$A \cdot \tilde{x}_1 = -B \quad (14)$$

Macierz wyjść  $B$  zawiera informację na temat przestrzennego wektora obciążeń  $f$ . Następnie wyliczony wektor jest normalizowany:

$$x_1 = \frac{\tilde{x}_1}{\left[ \tilde{x}_1^T \cdot \tilde{x}_1 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (15)$$

Kolejne wektory są wyliczane z zależności rekursywnej:

$$A \cdot \bar{x}_s = x_{s-1} \quad (16)$$

podobnie jak w przypadku wektorów wyliczanych w sposób analityczny liniowa niezależność uzyskiwana jest przez ortogonalizację każdego wektora w stosunku do wszystkich poprzednich:

$$\tilde{x}_s = \bar{x}_s - \sum_{i=1}^{s-1} (x_i^T \cdot \bar{x}_s) \cdot x_i \quad (17)$$

W końcu wyznaczony wektor jest normalizowany zgodnie ze wzorem (15). Wyliczone w ten sposób wektory znajdują się we współrzędnych stanu. Aby przejść do współrzędnych pomiarowych należy zastosować wzór:

$$r_s = C \cdot x_s \quad (18)$$

Ponieważ w procesie ortogonalizacji i normalizacji nie uwzględniono macierzy mas, wektory Ritza uzyskane w ten sposób nie mogą być porównywane z tymi wyznaczonymi w sposób analityczny. Jednakże dzięki takiemu podejściu możliwe jest wyznaczenie wektorów jedynie na podstawie danych eksperymentalnych. Pewną wadę metody stanowi fakt, że w danych pomiarowych poza rzeczywistymi biegunami układu występują jeszcze bieguny związane z szumem pomiarowym. Przed przystąpieniem do obliczania wektorów Ritza powinno się oddzielić mody rzeczywiste od

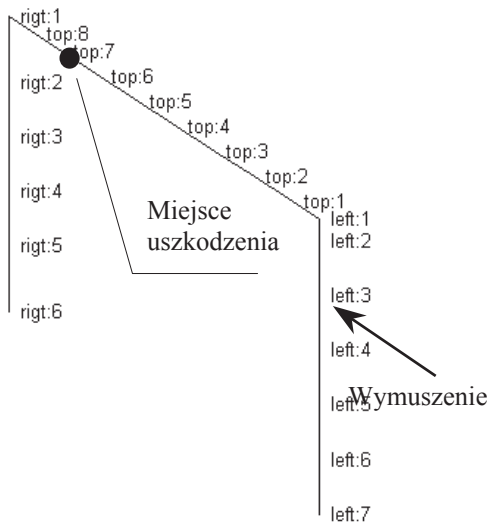
numerycznych, a to wymaga dużego doświadczenia przeprowadzającego eksperyment badacza.

### 3. EKSPERYMENT WERYFIKACYJNY

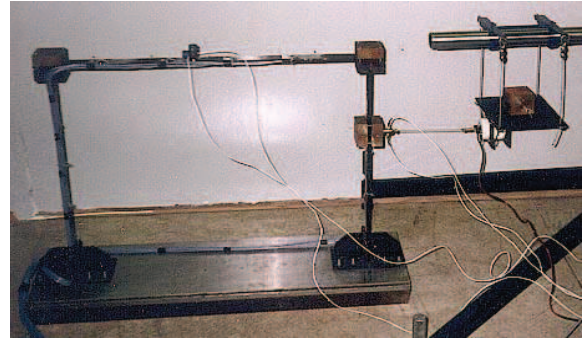
W celu doświadczalnego sprawdzenia przydatności wektorów Ritza do wykrywania uszkodzeń przeprowadzono prosty eksperyment. Do stalowej konstrukcji ramowej jako poprzeczkę zamontowano belkę o przekroju 40 x 10 wykonaną ze stopu aluminium. Cała konstrukcja była następnie wymuszana wzbudnikiem elektrodynamycznym. Podczas eksperymentu mierzono przebiegi czasowe siły wymuszającej oraz przyspieszenia drgań w oznaczonych punktach belki. Przeprowadzono 4 testy – pierwszy na konstrukcji nieuszkodzonej, kolejne przy różnych stopniach uszkodzenia. Uszkodzenie było symulowane poprzez nacinanie belki w jednym z punktów pomiarowych. W kolejnych etapach nacięcie miało głębokość:

- TEST 1 belka nieuszkodzona,
- TEST 2 belka z nacięciem 5 mm (12 % powierzchni przekroju),
- TEST 3 belka z nacięciem 14 mm (35 % powierzchni przekroju),
- TEST 4 belka z nacięciem 20 mm (50 % powierzchni przekroju).

Na rysunku 1 pokazano podział belki na punkty pomiarowe i zaznaczono miejsce wymuszenia i uszkodzenia, na rysunku 2 przedstawiono stanowisko badawcze.



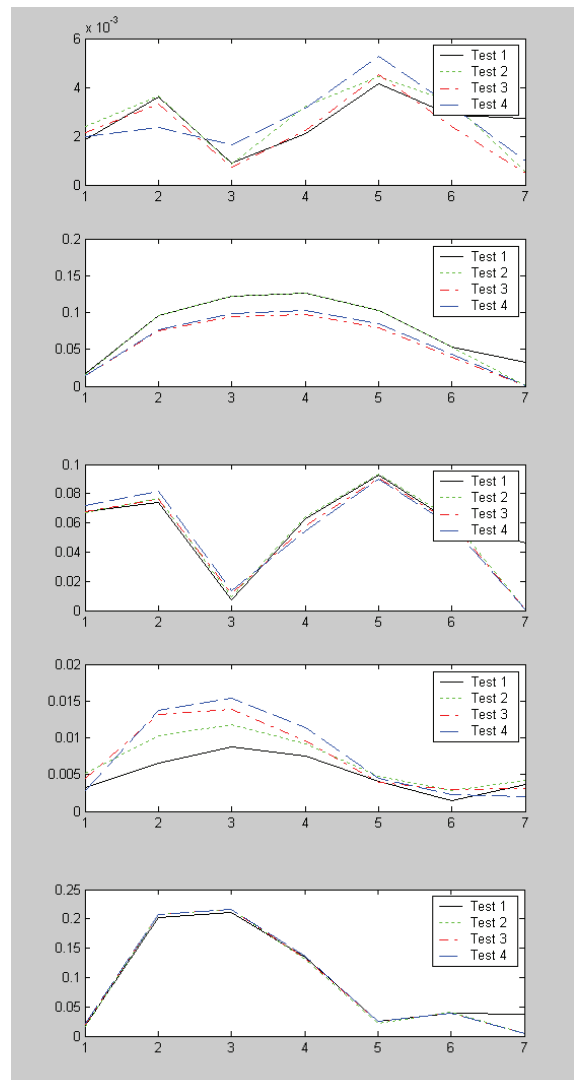
Rys. 1. Schemat obiektu badawczego



Rys. 2. Laboracyjne stanowisko badawcze

Na podstawie zarejestrowanych przebiegów dokonano identyfikacji modeli modalnych układu w kolejnych stadiach uszkodzenia. Pozwoliło to na sprawdzenie skuteczności zastosowania wektorów modalnych do wykrywania uszkodzeń.

Na rysunku 3 porównano kształt 5 pierwszych postaci drgań własnych dla układu w kolejnych fazach uszkodzenia.



Rys. 3. Porównanie wektorów modalnych dla układu w różnym stanie uszkodzenia

Linia ciągłą oznaczono wektor dla układu bez uszkodzenia, a dalej linia kropkowana, kropka-kreska i kreskowana określają kolejne stadia nacięcia belki. Jak widać tylko niektóre wektory modalne takie jak 1 i 4 czule są na zaistniałe uszkodzenie. Dodatkowo dopiero 50 % zmiana przekroju belki powoduje wyraźną różnicę w przebiegach. W tabeli 1 zamieszczono współczynniki MAC policzone dla pierwszych 6 PDW układu nieuszkodzonego w odniesieniu do układów z uszkodzeniem.

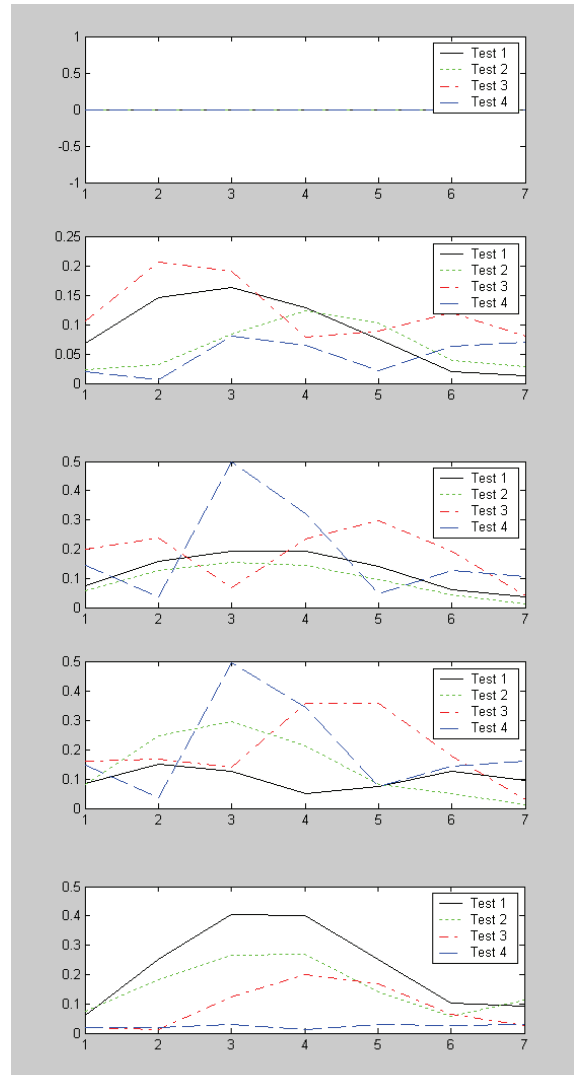
Tab. 1. Zestawienie współczynników MAC dla przeprowadzonych analiz

	PDW 1	PDW 2	PDW 3	PDW 4	PDW 5	PDW 6
T 2	0.71	0.66	0.56	0.64	0.41	0.45
T 3	0.70	0.56	0.51	0.63	0.42	0.34
T 4	0.69	0.56	0.54	0.47	0.42	0.43

Policzenie współczynników MAC znacznie poprawiło detekcję uszkodzenia przy pomocy wektorów modalnych.

W kolejnym kroku wyznaczono wektory Ritza, dla danych zarejestrowanych podczas czterech omawianych testów. Zastosowano metodę estymacji wektorów opartą o model przestrzeni stanu, aby uniknąć konieczności wyznaczenia analitycznej macierzy mas. Dla układu rozważanego w artykule macierz ta jest stosunkowo prosta do wyznaczenia, jednakże dla bardziej złożonych struktur jej rozmiar i postać staje się bardzo złożona. Dlatego też zasadne wydaje się przetestowanie metody, która pozwala bazować jedynie na danych pomiarowych. Do wyliczenia dyskretnych macierzy stanu, sterowań i wyjść wykorzystano algorytm ERA zawarty w przyborniku VIOMA [2]. Następnie przekształcono otrzymane macierze do dziedziny czasu ciągłego i wyliczono pierwszych 5 wektorów Ritza. Na rysunku 4 pokazano porównanie kształtu wyznaczonych wektorów dla układu nieuszkodzonego i uszkodzonego.

Przyjęto analogiczne przypisanie rodzajów linii jak dla wektorów modalnych. Pierwszy wektor Ritza, który stanowi statyczne ugięcie belki ma wartość 0 ponieważ wymuszenie było przykładane poza rozważaną belką (patrz rysunek 2), a więc przestrzenny wektor wymuszenia  $f$  ma wartość 0. W przeciwieństwie do wektorów modalnych przy analizie podobieństwa wektorów Ritza widoczna jest wyraźna zmiana kształtu już dla niewielkiego uszkodzenia. Dodatkowo w tabeli 2 zestawiono wartości współczynników MAC dla wektorów Ritza wyliczonych dla konstrukcji uszkodzonej w stosunku do nieuszkodzonej.



Rys. 4. Porównanie wektorów Ritza dla układu w różnym stanie uszkodzenia

Tab. 2. Zestawienie współczynników MAC dla wyliczonych wektorów Ritza

	WR 1	WR 2	WR 3	WR 4	WR 5	WR 6
T 2	0.98	0.69	0.77	0.44	0.34	0.63
T 3	0.99	0.46	0.38	0.18	0.28	0.18
T 4	0.97	0.17	0.15	0.19	0.12	0.14

Wyniki uzyskane zarówno na drodze porównywania wartości współczynników MAC, a nawet subiektywnej oceny badacza, pozwalają wykryć nawet niewielkie uszkodzenie.

#### 4. WNIOSKI I UWAGI KOŃCOWE

W artykule podjęto próbę wykazania przydatności wektorów Ritza do diagnostyki konstrukcji. Dokonano krótkiego przeglądu metod detekcji uszkodzeń opartych o analizę zmian modelu modalnego układu. Przedstawiono wektory Ritza

i pokazano trzy metody ich estymacji: analityczną, opartą o macierz podatności dynamicznej i bazującą na modelu przestrzeni stanu obiektu. Do weryfikacji eksperymentalnej wybrano trzeci z przedstawionych algorytmów, który jako jedyny pozwala na estymację wektorów jedynie w oparciu o dane pomiarowe. Pozostałe wymagają wyznaczenia macierzy mas modelu układu co dla złożonych struktur jest trudnym zagadnieniem. Następnie przeprowadzono test weryfikacyjny podczas, którego rejestrowano dane na układzie w kolejnych stadiach uszkodzenia i na podstawie zebranych przebiegów wyznaczono wektory modalne i wektory Ritza. Zastosowanie wektorów modalnych pozwoliło na wykrycie uszkodzenia, jednakże dopiero po zastosowaniu współczynnika MAC. Analiza kształtu wektorów modalnych przy niewielkim uszkodzeniu nie pozwalała na jego wykrycie. Wektory Ritza są dalece bardziej czułe na zmianę struktury obiektu, a więc i na zaistniałe uszkodzenie. Już niewielkie zmiany wywołują znaczące różnice w kształcie wyznaczonych wektorów. Wyniki takie predestynują wektory Ritza jako efektywny symptom pozwalający na wykrycie uszkodzenia w obiekcie.

## LITERATURA

- [1]. Uhl T., *Komputerowe wspomaganie identyfikacji modeli konstrukcji*, WNT, Warszawa, 1997.
- [2]. Uhl T., Lisowski W., Kurowski P.: In-Operation modal analysis and its applications, Wydawnictwo AGH, Kraków 2001.
- [3]. L. Hermans, H. Van der Auweraer, *Modal Testing and Analysis of Structures under Operational Conditions: Industrial Applications*, Mechanical Systems & Signal Processing, Vol.13, No.2, pp.193-216, 1999.
- [4]. Sohn, H., Law, K.H., *Extraction of Ritz Vectors from Vibration Test Data*, Structural Health Monitoring 2000, Stanford University, Palo Alto, CA, 840-850, 2000.
- [5]. Cao T. T., Zimmerman D. C., *Application of load dependent Ritz vectors in structural damage detection*, Proceedings of 15<sup>th</sup> IMAC, Orlando, pp. 1319-1324, 1997
- [6]. Cao T. T., Zimmerman D. C., *A procedure to extract Ritz vectors from dynamic testing data*, Proceedings of 15<sup>th</sup> IMAC, Orlando, pp. 1036-1042, 1997
- [7]. Uhl T., Współczesne trendy rozwojowe systemów monitorowania i diagnozowania maszyn, PAK, no.4, 1999.
- [8]. Uhl T., Zastosowanie analizy modalnej w diagnostyce konstrukcji, Zagadnienia Analizy Modalnej Konstrukcji Mechanicznych, str. 277-294, Wydawnictwo KRiDM AGH Kraków, 2003
- [9]. Uhl T., Bogacz M. *Real-time modal analysis and its application for structure diagnostics*, SYSID, 2003.
- [10]. Kawiecki G., *Modal Damping Measurements for Damage Detection*, European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain, 651-658. 2000.
- [11]. Zonta D., Modena C., Bursi O.S., *Analysis of Dispersive Phenomena in Damaged Structures*, European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain, 801-810. 2000.
- [12]. Zak, A., M. Krawczuk, W. Ostachowicz *Vibration of a Laminated Composite Plate with Closing Delamination, Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures* Proceedings of DAMAS '99, Univ. College, Dublin, Ireland, pp.17-26, 1999
- [13]. Ruotolo R., Surace C. *Damage Detection Using Singular Value Decomposition, Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures* Proceedings of DAMAS 97, Univ. of Sheffield, UK, pp. 87-96. 1997.
- [14]. Ruotolo R., Surace C., *Damage Assessment of Multi-Cracked Beams Using Combinatorial Optimisation, Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures*, Proceedings of DAMAS 97, Univ. of Sheffield, UK, pp. 77-86. 1997.
- [15]. Rytter A., Kirkegaard P., *Vibration Based Inspection Using Neural Networks, Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing, Procedures* Proceedings of DAMAS 97, Univ. of Sheffield, UK, pp. 97-108. 1997.
- [16]. Mares C., Ruotolo R., Surace C., *Using Transmissibility Data to Assess Structural Damage*, Damage Assessment of Structures, Proceedings of the International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99), Dublin, Ireland, 236-245. 1999.
- [17]. Bernal D., *Extracting Flexibility Matrices from State-Space Realizations*, European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain, 127-135. 2000.
- [18]. Reich G. W., Park K.C., *Experimental Applications of a Structural Health Monitoring Methodology, Smart Structures and Materials 2000: Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways*, Proceedings of SPIE, Vol. 3988, Newport Beach, CA, pp. 143-153. 2000.
- [19]. Topole K., *Damage Evaluation via Flexibility Formulation*, Smart Systems for Bridges, Structures, and Highways, Proceedings of SPIE, Vol. 3043, pp. 145-154. 2000.
- [20]. Williams E.J., Messina A., *Applications of the Multiple Damage Location Assurance Criterion*, Proceedings of the International Conference on Damage Assessment of Structures (DAMAS 99), Dublin, Ireland, 256-264. 1999.

- [21]. Fritzen C.P., Bohle K., *Parameter Selection Strategies in Model-Based Damage Detection*, Structural Health Monitoring 2000, Stanford University, Palo Alto, CA, 901-911. 2000.
- [22]. Yang S.M., Lee G.S., *Effects of Modeling Error on Structure Damage Diagnosis by Two-Stage Optimization*, Structural Health Monitoring 2000, Stanford University, Palo Alto, CA, 871-880. 1999.
- [23]. Bodeux J.B., Golinval J.C., *ARMAV Model Technique for System Identification and Damage Detection*, European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain, 303-312. 2000.
- [24]. Sakellariou J.S., Fassois S.D., *Parametric Output Error Based Identification and Fault Detection in Structures Under Earthquake Excitation*, European COST F3 Conference on System Identification and Structural Health Monitoring, Madrid, Spain, 323-322. 2000.
- [25]. Ahmadian H., Mottershead J.E., Friswell M.I., *Substructure Modes for Damage Detection*, *Structural Damage Assessment Using Advanced Signal Processing Procedures* Proceedings of DAMAS '97, Univ. of Sheffield, UK, pp. 257-268. 1997.
- [26]. Ettouney M., Daddazio R., Hapij A., Aly A., *Health Monitoring of Complex Structures, Smart Structures and Materials 1999: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies*, Proceedings of SPIE, Vol. 3326, pp. 368- 379. 1999.
- [27]. Zhang L., Quiong W., Link M., *A Structural Damage Identification Approach Based on Element Modal Strain Energy*, Proceedings of ISMA23, Noise and Vibration Engineering, Leuven, Belgium. 2000.
- [28]. Kurowski P., Iwaniec J., Pieczara J., Uhl T., *An application of genetic algorithms for modal damping updating*, Proceedings of ISMA 2004, Leuven, Belgium, pp. 178 – 190, 2004.
- [29]. Uhl T., Bogacz M., *Real time modal analysis and its application for damage detection*, *Zagadnienia Eksploatacji Maszyn*, nr 3, 2003

Prof. dr hab. inż. Tadeusz UHL

Jest kierownikiem Katedry Robotyki i Dynamiki Maszyn, Akademii Górniczo – Hutniczej w Krakowie. W swoich pracach zajmuje się zagadnieniami dynamiki konstrukcji, a zwłaszcza ich analizy modalnej. Jego zainteresowania obejmują także układy aktywnej redukcji drgań, układy sterowania i szeroko pojętą mechatronikę. Jest autorem 15 książek i kilkuset artykułów dotyczących wspomnianych zagadnień.



Dr inż. Krzysztof MENDROK

Jest adiunktem w Katedrze Robotyki i Dynamiki Maszyn, Akademii Górniczo – Hutniczej w Krakowie. Jego zainteresowania skupiają się na zagadnieniach dynamiki strukturalnej, a zwłaszcza na algorytmach analizy modalnej i analizy dróg rozchodzenia się energii drgań w konstrukcjach. Zajmuje się wykorzystaniem tych metod do wykrywania uszkodzeń. Jest autorem prac podejmujących tę tematykę.

