

## ZASTOSOWANIE HIPERBOLICZNYCH FUNKCJI SKLEJANYCH DO IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW SILNIKA ELEKTRYCZNEGO

Agata ZAŁĘSKA-FORNAL  
Marek ZELMA

Katedra Matematyki i Fizyki  
Akademia Marynarki Wojennej, 81-103 Gdynia ul. Śmidowicza 69,  
a.fornal@amw.gdynia.pl, m.zellma@amw.gdynia.pl

### Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm identyfikacji współczynników liniowego równania różniczkowego rzędu drugiego opisującego zależność między napięciem twornika i momentem obciążenia zewnętrznego, a prędkością kątową wirnika silnika elektrycznego. Do tego celu wykorzystano hiperboliczne funkcje sklepane.

Słowa kluczowe: hiperboliczne funkcje sklepane, identyfikacja

### APPLYING THE HYPERBOLIC SPLINES IN IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF AN ELECTRIC ENGINE

#### Summary

There is presented the algorithm of identification of the coefficients of the linear differential equation of the second order designed for description the dependence between voltage of the armature, external load torque and the angular velocity of the rotor of the electric engine. To that aim there are used the hyperbolic splines.

Keywords: hyperbolic splines, identification

### 1. WSTĘP

Celem pracy jest ustalenie zależności dynamicznej (w postaci liniowego równania różniczkowego zwyczajnego o stałych współczynnikach) między napięciem obwodu twornika  $U_t(t)$ , momentem obciążenia zewnętrznego  $M_0(t)$ , a prędkością kątową  $\omega(t)$  wirnika silnika elektrycznego na podstawie zarejestrowanych danych pomiarowych napięcia twornika  $\tilde{U}_t$ , momentu obciążenia  $\tilde{M}_0$  i odpowiadających tym wielkościom prędkości kątowych  $\tilde{\omega}$ .

Podstawą analizy stanów nieustalonych silników prądu stałego są następujące równania różniczkowe [1]:

- równanie prądu wzbudzenia

$$R_w i_w(t) + L_w \frac{di_w(t)}{dt} = U_w(t);$$

- równanie obwodu twornika

$$k_e i_w(t) \omega(t) + R_t i_t(t) + L_t \frac{di_t(t)}{dt} = U_t(t);$$

- równanie równowagi mechanicznej

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t) + M_0(t) = k_m i_w(t) i_t(t),$$

gdzie

$R_w$  - rezystancja wzbudzenia,

$i_w$  - prąd wzbudzenia,

$U_w$  - napięcie wzbudzenia,

$L_w$  - indukcyjność wzbudzenia,

$k_e$  - indukcyjność wzajemna stojan-wirnik,

$B$  - współczynnik tarcia lepkiego,

$R_t$  - rezystancja twornika,

$i_t$  - prąd twornika,

$k_m$  - indukcyjność rotacji,

$J$  - moment bezwładności na wale twornika,

$L_t$  - indukcyjność twornika.

Założmy, że w czasie analizy obwodu twornika spełniony jest warunek  $i_w(t) = i_w = \text{const}$ . Dla ustalonego prądu wzbudzenia możemy określić stałą  $K := k_e i_w$ . Wówczas zależność między sygnałami wejściowymi  $U_t(t)$  i  $M_0(t)$ , a sygnałem wyjściowym  $\omega(t)$ , przy ustalonym natężeniu prądu wzbudzenia, można opisać równaniem różniczkowym drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} a_2 \omega''(t) + a_1 \omega'(t) + a_0 \omega(t) = \\ = b_1 M_0'(t) + b_0 M_0(t) + U_t(t) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  są stałymi współczynnikami rzeczywistymi zależnymi od wymienionych wyżej stałych charakteryzujących obwód wzbudzenia i obwód twornika:

$$a_0 := \frac{BR_t + K^2}{K}, \quad a_1 := \frac{JR_t + BL_t}{K}, \quad a_2 := \frac{JL_t}{K}$$

$$b_0 := -\frac{R_t}{K}, \quad b_1 := -\frac{L_t}{K}. \quad (2)$$

Powyższe równania wyprowadzono, przyjmując szereg założeń upraszczających. Opis stanów przejściowych i parametrów konkretnego silnika wymaga określenia współczynników występujących w jego równaniach.

W pracy opracujemy algorytm identyfikacji układu sterowania (1), który obejmuje:

1. Algorytm aproksymacji sygnałów wejściowych  $U_i$  i  $M_0$  i sygnału wyjściowego  $\omega$ .
2. Algorytm doboru współczynników równania (1) i na podstawie zaproksymowanych sygnałów  $U_i, M_0$  i  $\omega$ . W tym celu równanie (1) przedstawimy w postaci
 
$$A_4 \omega'' + A_3 \omega' + A_2 \omega + A_1 M_0 + A_0 M_0 = U_i(t), \quad (3)$$
 gdzie
 
$$A_0 := -b_0, \quad A_1 := -b_1, \quad A_{i+2} := a_i, \quad i = 0, 1, 2. \quad (4)$$
3. Algorytm identyfikacji modelu.

## 2. INTERPOLACJA HIPERBOLICZNYMI FUNKCJAMI SKLEJANYMI

Do opisu wartości  $\tilde{y}_i, i \in \overline{0, N}$  sygnałów wyznaczonych z pomiarów wykorzystamy interpolację za pomocą hiperbolicznych funkcji sklepanych.

Niech  $\Delta_N$  będzie układem punktów  $t_i, i \in \overline{1, N}$  dzielących przedział  $[t_0, t_N]$  na  $N$  podprzedziałów, tzn.

$$\Delta_N : t_0 < \dots < t_N.$$

Funkcję  $s = s(t, \Delta_N)$  nazywamy *hiperboliczną funkcją sklejaną z węzłami  $\Delta_N$*  jeśli:

i) w każdym podprzedziale  $[t_{i-1}, t_i], i \in \overline{1, N}$

$$s(t) = W_i(t),$$

gdzie

$$s_L(t) = a_{3i} e^{\sigma(t-t)} + a_{2i} e^{-\sigma(t-t)} + a_{1i}(t_i - t) + a_{0i},$$

ii)  $s$  i jej pochodne rzędu pierwszego i drugiego są ciągłe w przedziale  $[t_0, t_N]$ .

Funkcję  $s$  nazywamy *funkcją interpolacyjną dla funkcji  $y=f(t)$* , jeśli

$$s(t_i) = y_i, \quad i \in \overline{0, N}, \quad N \geq 2.$$

Poszukiwana funkcja zależy od  $4N$  stałych

$$a_{3i}, a_{2i}, a_{1i}, a_{0i}, i \in \overline{1, N}.$$

Współczynniki te wyznaczamy korzystając z własności interpolacyjnej funkcji sklepanej oraz jej ciągłości wraz z pochodnymi rzędu pierwszego i drugiego w każdym węzle wewnętrznym  $t_i$ . Ponadto przyjmujemy dwa dodatkowe warunki:

$$s'(t_0) = y'(t_0), \quad s'(t_N) = y'(t_N).$$

## 3. ALGORYTM DOBORU OPTYMALNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW MODELU

Niech

$$U_i^*(t) = \alpha_{3i} e^{\sigma(t-t)} + \alpha_{2i} e^{-\sigma(t-t)} + \alpha_{1i}(t_i - t) + \alpha_{0i},$$

$$M_0^*(t) = \beta_{3i} e^{\sigma(t-t)} + \beta_{2i} e^{-\sigma(t-t)} + \beta_{1i}(t_i - t) + \beta_{0i}, \quad (5)$$

$$\omega^*(t) = \gamma_{3i} e^{\sigma(t-t)} + \gamma_{2i} e^{-\sigma(t-t)} + \gamma_{1i}(t_i - t) + \beta_{0i},$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], i \in \overline{1, N}.$$

oznaczają sygnały wyznaczone na podstawie danych pomiarowych napięcia twornika  $\tilde{U}_{ik} = U_i(t_k)$ , momentu obciążenia  $\tilde{M}_0 = M_0(t_k)$  oraz prędkości kątowej  $\tilde{\omega} = \omega(t_k)$  zaobserwowanych w chwilach  $t_k, k \in \overline{0, N}$ .

Określimy identyfikację układu jako problem takiego doboru współczynników równania (3), aby funkcjonał

$$J(A_0, \dots, A_4) = \left( \int_{t_0}^{t_N} [A_4 \omega''(t) + A_3 \omega'(t) + A_2 \omega(t) + A_1 M_0'(t) + A_0 M_0(t) - U_i(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

osiągnął minimum. Problem doboru optymalnych współczynników  $A_i^0, i \in \overline{0, 4}$ , które minimalizują wskaźnik identyfikacji sprowadza się do rozwiązania układu równań liniowych:

$$\sum_{i=0}^4 A_i^0 v_{ji} = d_j, \quad j \in \overline{0, 4}, \quad (7)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 v_{44} &= \int_{t_0}^{t_N} \ddot{\omega}^*(t) \ddot{\omega}^*(t) dt & v_{30} &= \int_{t_0}^{t_N} M_0^*(t) \dot{\omega}^*(t) dt \\
 v_{43} &= \int_{t_0}^{t_N} \dot{\omega}^*(t) \ddot{\omega}^*(t) dt & v_{22} &= \int_{t_0}^{t_N} \omega^*(t) \omega^*(t) dt \\
 v_{42} &= \int_{t_0}^{t_N} \omega^*(t) \ddot{\omega}^*(t) dt & v_{21} &= \int_{t_0}^{t_N} M_0^*(t) \dot{\omega}^*(t) dt \\
 v_{41} &= \int_{t_0}^{t_N} \dot{M}_0^*(t) \ddot{\omega}^*(t) dt & v_{20} &= \int_{t_0}^{t_N} M_0^*(t) \omega^*(t) dt \\
 v_{40} &= \int_{t_0}^{t_N} M_0^*(t) \ddot{\omega}^*(t) dt & v_{11} &= \int_{t_0}^{t_N} \dot{M}_0^*(t) \dot{M}_0^*(t) dt \\
 v_{33} &= \int_{t_0}^{t_N} \dot{\omega}^*(t) \dot{\omega}^*(t) dt & v_{10} &= \int_{t_0}^{t_N} \dot{M}_0^*(t) M_0^*(t) dt \\
 v_{32} &= \int_{t_0}^{t_N} \omega^*(t) \dot{\omega}^*(t) dt & v_{00} &= \int_{t_0}^{t_N} M_0^*(t) M_0^*(t) dt \\
 v_{31} &= \int_{t_0}^{t_N} \dot{M}_0^*(t) \dot{\omega}^*(t) dt & v_{ij} &= v_{ji}, \quad i, j \in \overline{0,4}, \\
 d_4 &= \int_{t_0}^{t_N} U_i^*(t) \ddot{\omega}^*(t) dt & d_1 &= \int_{t_0}^{t_N} U_i^*(t) \dot{M}_0^*(t) dt \\
 d_3 &= \int_{t_0}^{t_N} U_i^*(t) \dot{\omega}^*(t) dt & d_0 &= \int_{t_0}^{t_N} U_i^*(t) M_0^*(t) dt \\
 d_2 &= \int_{t_0}^{t_N} U_i^*(t) \omega^*(t) dt
 \end{aligned}$$

Współczynniki  $v_{ji}, d_j, j \in \overline{0,4}$  układu (7) można sprowadzić do prostej postaci np.

$$\begin{aligned}
 v_{00} &= \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} [\gamma_{3i} e^{\sigma(t_i-t)} + \gamma_{2i} e^{-\sigma(t_i-t)} + \gamma_{1i}(t_i-t) + \beta_{0i}]^2 dt = \\
 &= \sum_{i=1}^N \int_0^{h_i} [\gamma_{3i} e^{\sigma\tau} + \gamma_{2i} e^{-\sigma\tau} + \gamma_{1i}\tau + \beta_{0i}]^2 d\tau = \\
 &= \sum_{i=1}^N [(\gamma_{0i}^2 + 2\gamma_{2i}\gamma_{3i})h_i + \gamma_{0i}\gamma_{1i}h_i^2 + \frac{\gamma_{1i}^2}{3}h_i^3 + \\
 &\quad - \frac{2\gamma_{0i}\gamma_{2i}}{\sigma}(e^{-\sigma h_i} - 1) + \frac{2\gamma_{0i}\gamma_{3i}}{\sigma}(e^{\sigma h_i} - 1) + \\
 &\quad + 2\gamma_{1i}\gamma_{2i}(-\frac{h_i e^{-\sigma h_i}}{\sigma} - \frac{e^{-\sigma h_i} - 1}{\sigma^2}) + \\
 &\quad + 2\gamma_{1i}\gamma_{3i}(-\frac{h_i e^{\sigma h_i}}{\sigma} - \frac{e^{\sigma h_i} - 1}{\sigma^2}) + \\
 &\quad - \frac{\gamma_{2i}^2}{2\sigma}(e^{-2\sigma h_i} - 1) + \frac{\gamma_{3i}^2}{2\sigma}(e^{2\sigma h_i} - 1)].
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że wyprowadzone w sposób analityczny, wzory iloczynów skalarnych nie zawierają całek oznaczonych, co ma duże znaczenie

w obliczeniach numerycznych. W ten sposób znacznie skraca się czas obliczeń.

#### 4. WERYFIKACJA MODELU

Podstawą weryfikacji modelu (1) jest wyznaczenie rozwiązania zagadnienia początkowego

$$\begin{aligned}
 A_4^0 \omega'' + A_3^0 \omega' + A_2^0 \omega &= F(t) \\
 F(t) &:= U_i^*(t) - A_0^0 M_0^* - A_1^0 M_0^{*'}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\omega(t_0) = \omega_0 = \omega^*(t_0), \quad \omega'(t_0) = \omega_1 = \omega^{*'}(t_0) \quad (9)$$

gdzie

$U_i^*(t), M_0^*(t), \omega^*(t)$  są zdefiniowane wzorami (5),

natomiast

$$\begin{aligned}
 M_0^{*'}(t) &= -\sigma\beta_{3i} e^{\sigma(t-t_i)} + \sigma\beta_{2i} e^{-\sigma(t-t_i)} - \beta_{1i} \\
 \omega^{*'}(t) &= -\sigma\gamma_{3i} e^{\sigma(t-t_i)} + \sigma\gamma_{2i} e^{-\sigma(t-t_i)} - \gamma_{1i},
 \end{aligned}$$

Przybliżone rozwiązanie  $\omega_m(t)$  równania (8) wyznaczmy w postaci wielomianowej funkcji sklepanej stopnia trzeciego z węzłami równoodległymi

$$t_i = t_0 + ih, \quad i \in \overline{0, k},$$

gdzie

$$\omega_m(t) = W_i(t), \quad i \in \overline{1, k}, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad t_k := t_N,$$

$$W_i(t) := p_i + q_i(t-t_{i-1}) + r_i(t-t_{i-1})^2 + s_i(t-t_{i-1})^3,$$

$$p_i, q_i, r_i, s_i \in \mathbf{R}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i \in \overline{1, k}. \quad (10)$$

Z (8) wynika, że funkcja sklejana  $\omega_m(t)$  musi, na krańcach przedziału  $[t_0, t_1]$ , spełniać następujące warunki

$$A_4^0 \omega''(t_0) + A_3^0 \omega'(t_0) + A_2^0 \omega(t_0) = F(t_0) \quad (11)$$

$$A_4^0 \omega''(t_1) + A_3^0 \omega'(t_1) + A_2^0 \omega(t_1) = F(t_1) \quad (12)$$

Zauważmy, że

$$\omega_m(t_0) = W_1(t_0) = p_1,$$

$$\omega_m(t_1) = W_1(t_1) = p_1 + q_1 h + r_1 h^2 + s_1 h^3, \quad (13)$$

$$\omega_m'(t_0) = W_1'(t_0) = q_1,$$

$$\omega_m'(t_1) = W_1'(t_1) = q_1 + 2r_1 h + 3s_1 h^2,$$

$$\omega_m''(t_0) = W_1''(t_0) = 2r_1,$$

$$\omega_m''(t_1) = W_1''(t_1) = 2r_1 + 6s_1 h.$$

Uwzględniając (13) w (11) i (12) otrzymujemy

$$A_4^0 \cdot 2r_1 + A_3^0 q_1 + A_2^0 p_1 = F(t_0) \quad (14)$$

$$A_4^0 [2r_1 + 6s_1 h] + A_3^0 [q_1 + 2rh_1 + 3s_1 h^2] +$$

$$A_2^0 [p_1 + q_1 h + rh_1^2 + s_1 h^3] = F(t_1). \quad (15)$$

Z (14), po uwzględnieniu warunków początkowych (9) wynika, że

$$p_1 = \omega_0, \quad q_1 = \omega_1, \quad (16)$$

$$r_1 = \frac{F(t_0) - A_2^0 \omega_0 - A_3^0 \omega_1}{2A_4^0}. \quad (17)$$

Podstawiając (16) i (17) do (15) ostatecznie otrzymujemy

$$s_i = \frac{1}{A_2^0 h^3 + 3A_3^0 h^2 + 6A_4^0 h} [F(t_i) - p_i A_2^0 + q_i (A_2^0 h + A_3^0) + r_i (A_2^0 h^2 + 2A_3^0 h + 2A_4^0)] \quad (18)$$

W przypadku ogólnym, znając funkcję sklejaną  $\omega_m(t)$  w przedziale  $[t_{i-1}, t_i]$ , tzn. mając dane współczynniki  $p_i, q_i, r_i, s_i$  określamy ją w przedziale  $[t_i, t_{i+1}]$  żądając, aby

$$A_4^0 \omega_m''(t_{i+1}) + A_3^0 \omega_m'(t_{i+1}) + A_2^0 \omega_m(t_{i+1}) = F(t_{i+1}),$$

gdzie

$$\omega_m(t_{i+1}) = W_i(t_{i+1}) = p_i + q_i h + r_i h^2 + s_i h^3$$

$$\omega_m'(t_{i+1}) = W_i'(t_{i+1}) = q_i + 2r_i h + 3s_i h^2,$$

$$\omega_m''(t_{i+1}) = W_i''(t_{i+1}) = 2r_i + 6s_i h.$$

Korzystając z ciągłości  $\omega_m(t), \omega_m'(t), \omega_m''(t)$  w punktach  $t_i, i \in \overline{1, k-1}$ , tzn.

$$W_i(t_i) = W_{i+1}(t_i),$$

$$W_i'(t_i) = W_{i+1}'(t_i),$$

$$W_i''(t_i) = W_{i+1}''(t_i),$$

mamy

$$p_{i+1} = p_i + q_i h + r_i h^2 + s_i h^3$$

$$q_{i+1} = q_i + 2r_i h + 3s_i h^2,$$

$$r_{i+1} = r_i + 3s_i h$$

$$s_{i+1} = \frac{1}{A_2^0 h^3 + 3A_3^0 h^2 + 6A_4^0 h} [F(t_{i+1}) - p_{i+1} A_2^0 + q_{i+1} (A_2^0 h + A_3^0) + r_{i+1} (A_2^0 h^2 + 2A_3^0 h + 2A_4^0)]$$

gdzie  $i \in \overline{1, k-1}$ .

Zatem algorytm wyznaczania funkcji  $\omega_m(t)$ , będącej w przybliżonym rozwiązaniu zagadnienia (8), (9) jest algorytmem rekurencyjnym.

Do oceny aproksymacji sygnałów  $U_i(t), M_0(t), \omega(t)$  zastosujemy współczynnik determinacji [6]

$$R_y := \sqrt{1 - \phi_y^2},$$

$$\phi_y^2 := \frac{\sum_{i=0}^n [\tilde{y}_i - y^*(t'_i)]^2}{\sum_{i=0}^n (\tilde{y}_i - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \tilde{y}_i, \quad (19)$$

który określa zgodność wyznaczonej krzywej  $y^*(t)$  z wartościami empirycznymi  $\tilde{y}_i$  zawartymi w próbie. Zgodność ta jest tym lepsza, im wartość  $R_y$  jest bliższa jedności.

Do oceny rozwiązania  $\omega_m(t)$ , uzyskanego z modelu (8) przy warunkach początkowych (9), zastosujemy współczynnik zmienności resztowej [6]

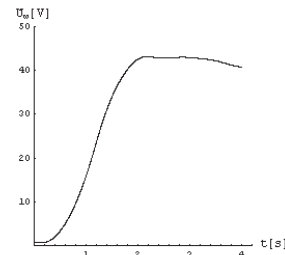
$$v_\omega := \frac{\sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [\tilde{\omega}_i - \omega_m(t'_i)]^2}}{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \tilde{\omega}_i} \cdot 100\%. \quad (20)$$

Niewielka wartość współczynnika  $\psi_\omega$  wskazuje, że model dość dobrze opisuje rozważaną zależność dynamiczną.

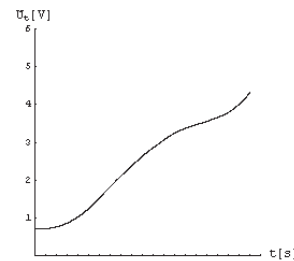
## 5. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Dla zilustrowania metody dokonano 1500 pomiarów napięcia wzbudzenia  $\tilde{U}_w$ , napięcia twornika  $\tilde{U}_t$ , prądu wzbudzenia  $\tilde{i}_w$  i prądu twornika  $\tilde{i}_t$ , momentu obciążenia  $\tilde{M}_0$  oraz prędkości kątowej  $\tilde{\omega}$  obcowzbudnego silnika prądu stałego sterowanego od strony uzwojenia twornika rejestrując wartości co 0.002 s. Zebrane pomiary przedstawiono na rysunkach 1-6.

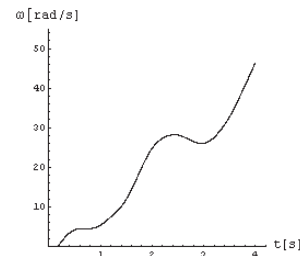
Badany silnik znajduje się w stanie nieustalonym w czasie około dwóch sekund. Po tym czasie wielkości  $U_w$  oraz  $i_w$  możemy potraktować jako stałe, co oznacza spełnienie wcześniejszych założeń prowadzących do uzyskania modelu różniczkowego (3).



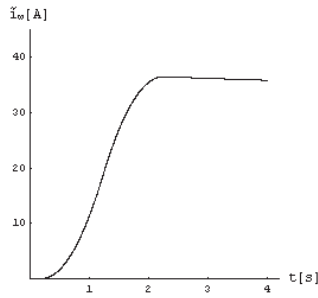
Rys.1. Pomiary  $\tilde{U}_w(t'_i)$  napięcia w obwodzie wzbudzenia



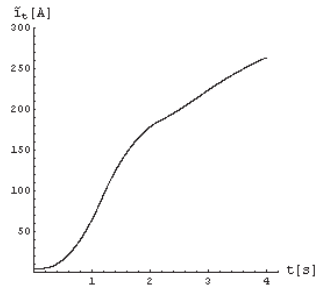
Rys.2. Pomiary  $\tilde{U}_t(t'_i)$  napięcia w obwodzie twornika



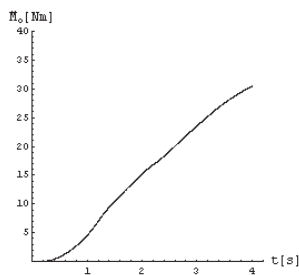
Rys. 3. Pomiary  $\tilde{\omega}(t'_i)$  prędkości kątowej wirnika



Rys. 4. Pomiary  $\tilde{i}_w(t'_i)$  prądu wzbudzenia

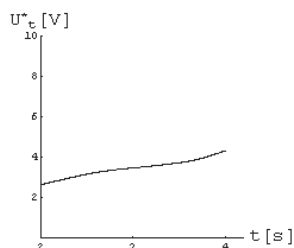


Rys. 5. Pomiary  $\tilde{i}_t(t'_i)$  prądu twornika

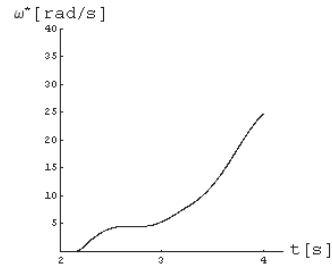


Rys. 6. Pomiary  $\tilde{M}_0(t'_i)$  momentu obciążenia zewnętrznego

Do wyznaczenia funkcji  $\omega^*(t), U_t^*(t), M_0^*(t)$  interpolujących zarejestrowane wartości pomiarów  $\tilde{\omega}(t_i), \tilde{U}_t(t_i), \tilde{M}_0(t_i)$ , przedział obserwacji  $[0, 4]$  został podzielony na czterdzieści równych podprzedziałów. Do opisu przebiegów wykorzystano interpolację za pomocą hiperbolicznych funkcji sklepanych. Kolejne rysunki 7-9 przedstawiają zinterpolowane w przedziale  $[2, 4]$  sygnały napięcia twornika, momentu obciążenia i prędkości kątowej wymagane do identyfikacji układu.



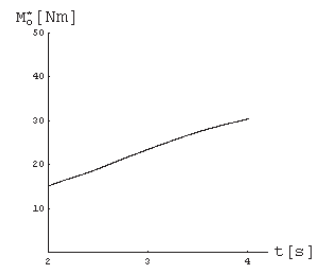
Rys. 7. Zinterpolowany przebieg napięcia twornika  $U_t^*(t)$  na podstawie pomiarów przedstawionych na rys. 2



Rys. 8. Zinterpolowany przebieg prędkości kątowej wirnika  $\omega^*(t)$  na podstawie pomiarów przedstawionych na rys. 3

Do przedstawionego w artykule algorytmu identyfikacji napisano program w języku Turbo Pascal. Program ten wykorzystano do wyznaczenia współczynników równania (3). Obliczone współczynniki wynoszą odpowiednio:

$$A_0^0 = 0.0909 \quad A_1^0 = 0.0182 \\ A_2^0 = 0.1015 \quad A_3^0 = 0.0212 \quad A_4^0 = 0.0017$$



Rys. 9. Zinterpolowany przebieg momentu obciążenia  $M_0^*(t)$  na podstawie pomiarów przedstawionych na rys. 6

Na podstawie wzoru (4) otrzymujemy zidentyfikowaną postać równania różniczkowego (1) opisującego dynamikę silnika, tzn.

$$a_2^0 \omega''(t) + a_1^0 \omega'(t) + a_0^0 \omega(t) = b_1^0 M_0'(t) + b_0^0 M_0(t) + U_t(t), \quad (21)$$

gdzie

$$b_0^0 = -0.0909 \quad b_1^0 = -0.0182 \\ a_0^0 = 0.1015 \quad a_1^0 = 0.0212 \\ a_2^0 = 0.0017. \quad (22)$$

Znajomość współczynników równania (21) pozwala z zależności (2) wyznaczyć parametry silnika. Mianowicie

$$J = -\frac{a_2}{b_1}, \quad B = \frac{-a_1 - Jb_0}{b_1}, \quad K = a_0 + Bb_0,$$

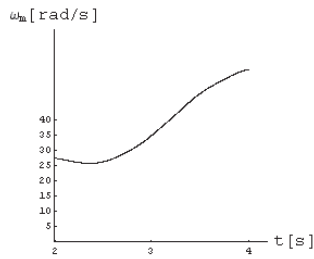
$$L_t = \frac{a_2 K}{J}, \quad R_t = -b_0 K.$$

Stąd dla zidentyfikowanych współczynników (22) otrzymujemy:

- moment bezwładności na wale twornika

- $J = 0.0923$  [kgm<sup>2</sup>]
- współczynnik tarcia lepkiego  
 $B = 0.701$  [Nms/rad]
- stała silnika  $K = 0.0378$  [HA]
- indukcyjność twornika  $L_t = 0.0007$  [H]
- rezystancja twornika  $R_t = 0.003$  [Ω]

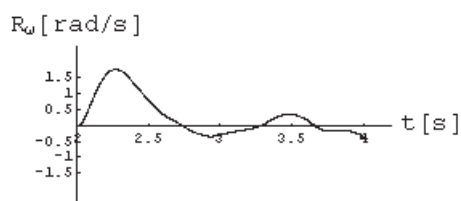
Rozwiązanie  $\omega_m(t)$  równania (8) przy warunkach  $\omega_m(2) = 0$ ,  $\omega'_m(2) = 7.036$  przedstawia Tabela 1.



Rys. 10. Rozwiązanie  $\omega_m(t)$  równania (21)

Tabela 1.

$t$	$\tilde{\omega}$	$\omega_m$	$\tilde{\omega} - \omega_m$
2.000	27.69	27.69	0.00
2.002	27.68	27.68	0.00
2.004	27.67	27.67	0.00
2.006	27.66	27.65	0.01
2.008	27.65	27.64	0.01
2.010	27.64	27.62	0.02
.....	.....	.....	.....
2.992	35.00	35.29	-0.29
2.994	35.05	35.34	-0.29
2.996	35.11	35.39	-0.28
2.998	35.16	35.44	-0.28
3.000	35.21	35.49	-0.28
3.002	35.26	35.54	-0.28
3.004	35.32	35.59	-0.27
3.006	35.37	35.64	-0.27
.....	.....	.....	.....
3.978	56.73	57.01	-0.28
3.980	56.74	57.03	-0.29
3.982	56.76	57.05	-0.29
3.984	56.78	57.07	-0.29
3.986	56.79	57.10	-0.31
.....	.....	.....	.....
3.994	56.84	57.18	-0.34
3.996	56.85	57.20	-0.35
3.998	56.86	57.22	-0.36
4.000	56.88	57.24	-0.36



Rys. 11. Wykres różnic  $R_\omega(t_i) := \tilde{\omega}(t_i) - \omega_m(t_i)$

Oscylacje widoczne na Rys. 11 wynikają z przyjętego założenia o stałości prądu wzbudzenia w odcinku czasu [2,4].

Współczynnik zmienności resztowej (20) dla uzyskanego rozwiązania wynosi  $v_\omega = 1.8\%$ ,

co oznacza, że model (21) dobrze opisuje dynamikę silnika w rozważanym przedziale czasowym [2,4].

## LITERATURA

- [1] BISZTYGA K.: *Sterowanie i regulacja silników elektrycznych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1989.
- [2] DE BOOR C.: *A practical guide to splines*. Springer Verlag. New York- Heidelberg-Rerlin 1978.
- [3] FORTUNA Z., MACUGOW B., WĄSOWSKI J.: *Metody numeryczne*. WNT, Warszawa 1982.
- [4] KOSMA.Z.: *Wstęp do metod funkcji sklepanych*. Skrypt uczelniany Nr 16, Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu, Radom 1986.
- [5] RUBIN S.G., GRAVES R.A. Jr: *A cubic spline approximation for problems in fluid dynamics*, NASA TR R-436, 1976.
- [6] SOBCZYK M.: *Statystyka*, PWN, Warszawa 1995.
- [7] ZAŁĘSKA-FORNAL A., ZELLMA M.: *Testing the dynamics of the electric engine by means of basic splines*; 3-rd International Congress on Technical Diagnostics, Diagnostics'2004, September 6-9, 2004, Poznań Poland, Diagnostyka, Vol.30, tom2, 2004, pp.203-206.
- [8] ZELLMA M.: *Identyfikacja układu dynamicznego za pomocą hiperbolicznych funkcji sklepanych*, Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej, ROK XXXV Nr 1/120/94, Gdynia 1994.

Dr Agata Załęska –Fornal- adiunkt w Katedrze Matematyki i Fizyki Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni. Zajmuje się niezawodnością urządzeń technicznych, identyfikacją układów dynamicznych. Członek PTBN.

Dr Marek Zellma- adiunkt w Katedrze Matematyki i Fizyki Akademii Marynarki Wojennej W Gdyni. Sfera zainteresowań to: teoria sterowana, identyfikacja układów dynamicznych, zastosowanie funkcji sklepanych jednej i wielu zmiennych w aproksymacji. Członek PTM.