

OPIS SYGNAŁÓW ZA POMOCĄ HIPERBOLICZNYCH FUNKCJI SKLEJANYCH

Agata ZAŁĘSKA-FORNAL
Marek ZELMA

Katedra Matematyki i Fizyki
Akademia Marynarki Wojennej, 81-103 Gdynia ul. Śmidowicza 69,
a.fornal@amw.gdynia.pl, m.zellma@amw.gdynia.pl

Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono algorytm służący do opisu estymatorów parametrów niestacjonarnych procesów losowych. Do opisu sygnałów wykorzystano hiperboliczne funkcje sklepane.

Słowa kluczowe: hiperboliczne funkcje sklepane

DESCRIPTION OF SIGNALS BY MEANS OF HYPERBOLIC SPLINES

Summary

There is presented the algorithm designed for description of estimators of parameters non-stationary random processes. The hyperbolic splines are used to describe the signals.

Keywords: hyperbolic splines

1. WSTĘP

Do opisu sygnałów wykorzystamy pojęcie procesu stochastycznego z ustaloną przestrzenią probabilistyczną (Ω, F, P) , przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω z określoną na niej rodziną podzbiorów F i rozkładem prawdopodobieństwa P .

Niech T oznacza zbiór $R_+ := [0, +\infty)$ liczb rzeczywistych lub zbiór w tym przedziale zawarty. Zbiór T będziemy interpretowali jako zbiór chwil. Przez t oznaczymy element zbioru T .

Funkcję $X : T \times \Omega \rightarrow R$ nazywamy *funkcją losową (procesem stochastycznym)* jeśli $\forall t \in T \forall x \in R \{\omega : X(t, \omega) < x\} \in F$.

Proces stochastyczny $X = X(t, \omega)$ jest funkcją dwóch zmiennych t oraz ω .

Dla każdego ustalonego t funkcja $X = X(t, \omega)$ rozważana jako funkcja argumentu ω jest zmienną losową. Dla ustalonego t przyjmujemy zapis $X_t = X(t, \omega)$. Zatem proces stochastyczny można traktować jako rodzinę zmiennych losowych $X_t : \Omega \rightarrow R$. Natomiast dla ustalonego zdarzenia elementarnego $\omega \in \Omega$ i każdego t przyjmujemy $x(t) = X(t, \omega)$. Funkcja x określona w zbiorze T nie ma już charakteru losowego. Nazywamy ją *realizacją procesu stochastycznego* X .

Tak więc proces stochastyczny można traktować jako rodzinę realizacji zależną od parametru $\omega \in \Omega$.

W zastosowaniach praktycznych wyznaczenie rozkładów procesu stochastycznego jest zagadnieniem skomplikowanym. Innym sposobem opisu procesu losowego jest podanie jego charakterystyk. W pracy ograniczymy się tylko momentów rzędu pierwszego i drugiego. Szczególnie ważną rolę spełnia moment rzędu pierwszego nazywany wartością przeciętną procesu.

Wartością przeciętną procesu stochastycznego X nazywamy funkcję $m : T \rightarrow R$, której wartości równe są wartościom oczekiwanych zmiennych losowych przyporządkowanych odpowiednim chwilom: $m(t) = E[X(t)]$, $t \in R_+$.

Dla wszystkich realizacji musimy wybrać wspólny moment czasowy t_0 odczytywania ich wartości. Następnie dla każdej chwili t_i , $i \in \overline{0, N}$ odczytujemy z m realizacji wartości $\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \dots, \tilde{x}_{im}$ procesu $X(t)$.

Następnie interpolujemy wartości

$$\bar{x}(t_0), \bar{x}(t_1), \bar{x}(t_2), \dots, \bar{x}(t_N),$$

gdzie

$$\bar{x}(t_i) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m \tilde{x}_{il},$$

hiperbolicznymi funkcjami sklepanymi.

2. ALGORYTM INTERPOLACJI ZA POMOCĄ HIPERBOLICZNYCH FUNKCJI SKLEJANYCH

Niech L będzie liniowym operatorem różniczkowym postaci

$$L \equiv a_n(t)D^n + a_{n-1}(t)D^{n-1} + \dots + a_0(t);$$

$$D := \frac{d}{dt},$$

gdzie $a_i(t), i \in \overline{0, N}$ są funkcjami klasy $C^n[t_0, t_N]$ i $a_n(t) \neq 0$ w przedziale $[t_0, t_N]$. Oznaczmy przez L^* operator formalnie sprzężony z L , tzn.

$$L^* \equiv (-1)^n D^n \{a_n(t)\} + (-1)^{n-1} D^{n-1} \{a_{n-1}(t)\} + \dots - D \{a_1(t)\} + a_0(t).$$

Założmy, że przedział $[t_0, t_N]$ został podzielony za pomocą punktów

$$\Delta_N : t_0 < \dots < t_N$$

na N podprzedziałów.

Definicja 1.

Funkcję $s_L = s_L(t, \Delta_N)$ klasy $C^{2n-k}[t_0, t_N]$ nazywamy L funkcją sklejaną z defektem k ($0 \leq k \leq n$) jeśli spełnia ona równanie różniczkowe

$$L^* L s_L = 0$$

na każdym podprzedziale $(t_{i-1}, t_i), i \in \overline{1, N}$.

Operator

$L(\phi) \equiv D^2 \phi - \sigma D \phi, \phi \in C^2[t_0, t_N], \sigma \in R$
sprzężony z operatorem

$$L^* \equiv D^2 + \sigma D$$

rozważał Wierszynin []. Funkcje sklepane otrzymane z rozwiązania równania

$$L^* L s_L = D^4 s_L - \sigma^2 D^2 s_L = 0 \quad (1)$$

w literaturze polskojęzycznej są nazywane σ -funkcjami lub hiperbolicznymi funkcjami sklejanymi.

Definicja 2.

Niech $y = f(t) \in C^2[t_0, t_N]$. Funkcję

$s_L \in C^2[t_0, t_N]$ nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną dla funkcji $y = f(t)$, jeśli

$$s_L(t_i) = f(t_i) = y_i, i \in \overline{0, N} \quad N \geq 2.$$

Poszukiwana hiperboliczna funkcja sklejana na podprzedziale $(t_{i-1}, t_i) i \in \overline{1, N}$ jest liniową kombinacją funkcji:

$$1, t, e^{\sigma t}, e^{-\sigma t}.$$

zatem całka ogólna równania (1) na każdym podprzedziale jest postaci

$$s_L(t) = A_i + B_i t + C_i e^{\sigma t} + D_i e^{-\sigma t}. \quad (2)$$

Stąd

$$s_L' = B_i + \sigma C_i e^{\sigma t} - \sigma D_i e^{-\sigma t},$$

$$s_L'' = \sigma^2 C_i e^{\sigma t} + \sigma^2 D_i e^{-\sigma t}.$$

Mamy więc $4N$ stałych $A_i, B_i, C_i, D_i, i \in \overline{1, N}$. Żądanie ciągłości s_L i jej pochodnych rzędu pierwszego i drugiego w każdym węzle wewnętrznym $t_i \in \overline{1, N-1}$ daje $3(N-1)$ warunków. Zatem interpolacyjne funkcje s_L zależą od dwóch parametrów, wobec czego nakładamy na

nie dwa dodatkowe warunki. Wybór tych warunków zależy zarówno od własności funkcji $s_L = s_L(t)$ i od posiadanej informacji o tej funkcji.

W pracy przyjmujemy dwa dodatkowe warunki:

$$s'(t_0) = y'(t_0), \quad s'(t_N) = y'(t_N). \quad (3)$$

Dodatkowo wprowadzimy oznaczenia wartości drugich pochodnych szukanej funkcji w węzłach $t_i, i \in \overline{0, N}$:

$$M_i := s_L''(t_i), \quad i \in \overline{0, N}.$$

Nazwiemy je momentami M_i funkcji s_L . Wykażemy, że momenty interpolacyjnych σ -funkcji są rozwiązaniami odpowiedniego układu równań liniowych.

Niech s_L'' spełnia warunki:

$$s_L''(t_{i-1}) = M_{i-1}, \quad s_L''(t_i) = M_i, \quad i \in \overline{1, N}.$$

Stałe C_i, D_i wyznaczamy z zależności:

$$\sigma^2 C_i e^{\sigma t_i} + \sigma^2 D_i e^{-\sigma t_i} = M_{i-1},$$

$$\sigma^2 C_i e^{\sigma t_i} + \sigma^2 D_i e^{-\sigma t_i} = M_i$$

Stąd

$$C_i = \frac{M_{i-1} e^{-\sigma t_i} - M_i e^{-\sigma t_{i-1}}}{\sigma^2 (e^{-\sigma t_i} - e^{\sigma t_i})},$$

$$D_i = \frac{M_i e^{-\sigma t_i} - M_{i-1} e^{-\sigma t_{i-1}}}{\sigma^2 (e^{-\sigma t_i} - e^{\sigma t_i})}, \quad h_i := t_i - t_{i-1}.$$

Podstawiając C_i, D_i do s_L'' otrzymujemy

$$s_L''(t) = \frac{M_{i-1} e^{-\sigma t_i} - M_i e^{-\sigma t_{i-1}}}{e^{-\sigma t_i} - e^{\sigma t_i}} e^{\sigma t} + \frac{M_i e^{-\sigma t_{i-1}} - M_{i-1} e^{-\sigma t_i}}{e^{-\sigma t_i} - e^{\sigma t_i}} e^{-\sigma t},$$

Po przekształceniach dostajemy

$$s_L'' = M_{i-1} \frac{\sinh \sigma(t_i - t)}{\sinh \sigma h_i} + M_i \frac{\sinh \sigma(t - t_{i-1})}{\sinh \sigma h_i}, \quad (4)$$

gdzie $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Całkując obustronnie (4) uzyskujemy

$$s_L'(t) = -\frac{1}{\sigma} M_{i-1} \frac{\cosh \sigma(t_i - t)}{\sinh \sigma h_i} + \frac{1}{\sigma} M_i \frac{\cosh \sigma(t - t_{i-1})}{\sinh \sigma h_i} + B_i, \quad (5)$$

Po scałkowaniu (5) otrzymujemy

$$s_L(t) = \frac{1}{\sigma^2} M_{i-1} \frac{\sinh \sigma(t_i - t)}{\sinh \sigma h_i} + \frac{1}{\sigma^2} M_i \frac{\sinh \sigma(t - t_{i-1})}{\sinh \sigma h_i} + B_i t + A_i, \quad (6)$$

Ponieważ $s_L(t_i) = y_i$ dla $i \in \overline{0, N}$, więc

$$y_{i-1} = s_L(t_{i-1}) = \frac{1}{\sigma^2} M_{i-1} + B_i t_{i-1} + A_i, \quad (7)$$

$$y_i = s_L(t_i) = \frac{1}{\sigma^2} M_i + B_i t_i + A_i.$$

Z powyższych równości otrzymujemy:

$$B_i = \frac{y_i - \frac{1}{\sigma^2} M_i - y_{i-1} + \frac{1}{\sigma^2} M_{i-1}}{h_i},$$

$$A_i = \frac{t_i (y_{i-1} - \frac{1}{\sigma^2} M_{i-1}) - t_{i-1} (y_i - \frac{1}{\sigma^2} M_i)}{h_i}.$$

Podstawiając A_i, B_i do (6), po przekształceniach otrzymujemy

$$s_L(t) = \frac{1}{\sigma^2} M_{i-1} \frac{\sinh \sigma(t-t)}{\sinh \sigma h_i} +$$

$$+ \frac{1}{\sigma^2} M_i \frac{\sinh \sigma(t-t_{i-1})}{\sinh \sigma h_i} + \frac{y_{i-1} - \frac{1}{\sigma^2} M_{i-1}}{h_i} (t_i - t)$$

$$+ \frac{y_i - \frac{1}{\sigma^2} M_i}{h_i} (t - t_{i-1})$$

Zatem

$$s'_L(t) = -\frac{1}{\sigma} M_{i-1} \frac{\cosh \sigma(t-t)}{\sinh \sigma h_i} +$$

$$+ \frac{1}{\sigma} M_i \frac{\cosh \sigma(t-t_{i-1})}{\sinh \sigma h_i} +$$

$$- \frac{y_{i-1} - \frac{1}{\sigma^2} M_{i-1}}{h_i} + \frac{y_i - \frac{1}{\sigma^2} M_i}{h_i}$$

Z założenia ciągłości s' w węzłach $t_i, i \in \overline{1, N-1}$ otrzymujemy $N-1$ równań dla momentów M_i

$$\left(-\frac{1}{\sigma \sinh \sigma h_i} + \frac{1}{\sigma^2 h_i}\right) M_{i-1} +$$

$$+ \left(\frac{\cosh h_i}{\sigma \sinh \sigma h_i} - \frac{1}{\sigma^2 h_i} + \frac{\cosh h_{i+1}}{\sigma \sinh \sigma h_{i+1}} +$$

$$- \frac{1}{\sigma^2 h_{i+1}}\right) M_i + \left(-\frac{1}{\sigma \sinh \sigma h_{i+1}} + \frac{1}{\sigma^2 h_{i+1}}\right) M_{i+1} =$$

$$\frac{y_{i-1} - y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}, \quad i \in \overline{1, N-1}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$v_i = \frac{\sinh \sigma h_i - \sigma h_i}{\sigma^2 h_i}, \quad \mu_i = \frac{\sigma h_i \cosh \sigma h_i - \sinh \sigma h_i}{\sigma^2 h_i \sinh \sigma h_i},$$

układ równań (10) zapiszemy w postaci

$$v_i M_{i-1} + (\mu_i + \mu_{i+1}) M_i + v_{i+1} M_{i+1} =$$

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad i \in \overline{1, N-1} \quad (11)$$

Jest to $n-1$ równań dla $n+1$ momentów. Dwa dodatkowe równania możemy wyznaczyć na podstawie warunków brzegowych (3), mianowicie

$$s'_L(t_0) = -M_0 \frac{\cosh \sigma h_1}{\sinh \sigma h_1} + M_1 \frac{1}{\sigma \sinh \sigma h_1} +$$

$$- \frac{y_0 - \frac{1}{\sigma^2} M_0}{h_1} + \frac{y_1 - \frac{1}{\sigma^2} M_1}{h_1} = y'(t_0),$$

$$s'_L(t_N) = -M_{N-1} \frac{1}{\sinh \sigma h_N} + M_N \frac{\cosh \sigma h_N}{\sigma \sinh \sigma h_N} +$$

$$- \frac{y_{N-1} - \frac{1}{\sigma^2} M_0}{h_N} + \frac{y_N - \frac{1}{\sigma^2} M_N}{h_N} = y'(t_N).$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy:

$$\mu_1 M_0 + v_1 M_1 = \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'(t_0) \quad (12)$$

$$\mu_N M_{N-1} + v_N M_N = \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} + y'(t_N)$$

Uwzględniając (11) i (12) otrzymujemy układ równań, który możemy przedstawić w postaci macierzowej

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{G}, \quad (13)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu_1 & v_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ v_1 & \mu_1 + \mu_2 & v_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & v_2 & \mu_2 + \mu_3 & v_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & v_{N-1} & \mu_{N-1} + \mu_N & v_N \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & v_N & \mu_N \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'(t_0) \\ \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_3} - \frac{y_2 - y_1}{h_2} \\ \vdots \\ \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} - \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{h_{N-1}} \\ - \frac{y_N - y_{N-1}}{h_N} + y'(t_N) \end{bmatrix},$$

$$v_i = \frac{\sinh \sigma h_i - \sigma h_i}{\sigma^2 h_i \sinh \sigma h_i}, \quad \mu_i = \frac{\sigma^2 h_i \cosh \sigma h_i - \sinh \sigma h_i}{\sigma^2 h_i \sinh \sigma h_i},$$

$$i \in \overline{1, N}.$$

Ponieważ macierz tego układu jest macierzą trójdagonalną, zatem jego rozwiązanie wymaga niewielkiej ilości działań arytmetycznych [3].

Zauważmy, że interpolującą funkcję sklejaną (8) można przedstawić w postaci:

$$s_L(t) = a_{3i} e^{\sigma(t-t)} + a_{2i} e^{-\sigma(t-t)} + a_{1i} (t_i - t) + a_{0i}, \quad (14)$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i \in \overline{1, N},$$

gdzie:

$$a_{0i} = y_i - \frac{M_i}{\sigma^2}, \quad a_{1i} = (y_{i-1} - y_i - \frac{M_{i-1}}{\sigma^2} + \frac{M_i}{\sigma^2}) \frac{1}{h_i},$$

$$a_{2i} = \frac{M_i e^{\sigma h_i} - M_{i-1}}{2\sigma^2 \sinh \sigma h_i}, \quad a_{3i} = \frac{M_{i-1} - M_i e^{-\sigma h_i}}{2\sigma^2 \sinh \sigma h_i}.$$

Postać ta umożliwia łatwe wyznaczenie pochodnej funkcji

$$s'_L(t) = -a_{3i} \sigma e^{\sigma(t-t)} + a_{2i} \sigma e^{-\sigma(t-t)} - a_{1i} t_i, \quad (15)$$

$$t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i \in \overline{1, N},$$

oraz całki

$$\int_{t_0}^{t_N} s(t) dt = \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_{3i}}{\sigma} e^{\sigma h_i} - \frac{a_{2i}}{\sigma} e^{-\sigma h_i} + a_{1i} \frac{h_i^2}{2} + a_0 h_i + \frac{a_{31}}{\sigma} + \frac{a_{21}}{\sigma} \right). \quad (16)$$

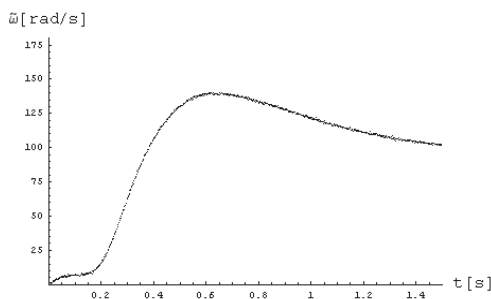
Wyprowadzone wzory mają duże znaczenie w obliczeniach numerycznych, ponieważ znacznie skracają czas obliczeń.

3. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

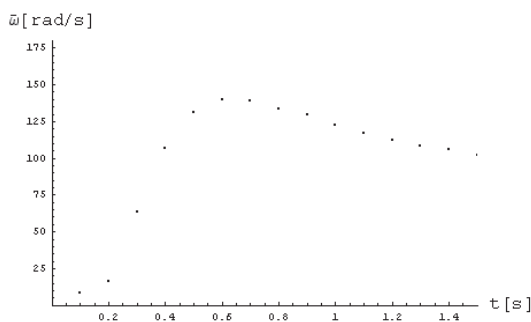
Dla przykładu numerycznego dokonano pomiarów m przebiegów prędkości kątowej

$$\tilde{\omega}_1(t_i), \tilde{\omega}_2(t_i), \dots, \tilde{\omega}_m(t_i), \quad k \in \overline{0, N}$$

wirnika obcowzbudnego silnika prądu stałego, rejestrując wartości co 0.1 s. Wartości pomiarów przedstawiono na rys.1. Tabela 1. zawiera cztery pomiary prędkości kątowej.

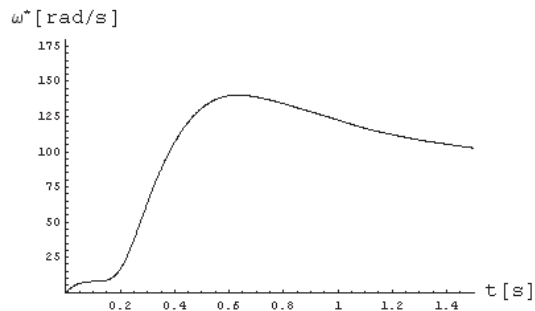


Rys. 1. Pomiary prędkości kątowej $\tilde{\omega}_l(t_k)$, $l \in \overline{1, m}$, w chwilach $t_k \in [0, 1.5]$

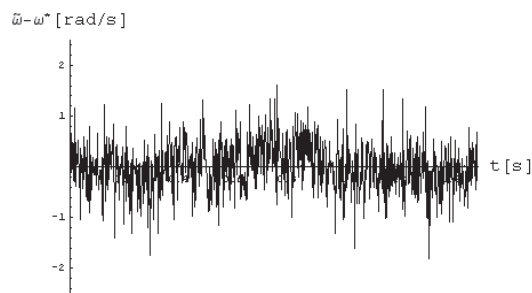


Rys. 2. Wartości oczekiwane wyznaczone z realizacji przebiegów w chwilach $t_k = t_0 + 0.1k$, $k \in \overline{0, 15}$

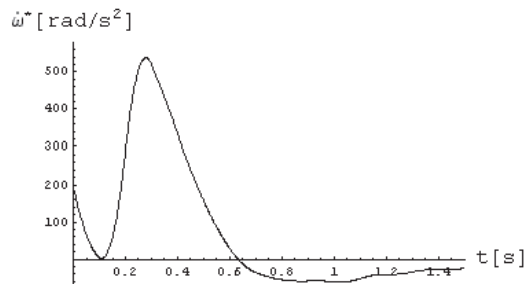
Do opisanego algorytmu opisującego przebiegi napisano program komputerowy w języku Turbo Pascal wersji 5.0. Program ten wykorzystano do wyznaczenia estymatora $\hat{\omega}(t)$ wartości przeciętnej prędkości kątowej w przedziale obserwacji. Zaproksymowany przebieg prędkości kątowej wirnika przedstawia rys.2.



Rys. 3. Zaproksymowany przebieg prędkości kątowej wirnika $\omega^*(t)$ na podstawie pomiarów przedstawionych na rys.1



Rys.4. Wykres reszt $\tilde{\omega} - \omega^*$ [rad/s]



Rys. 5. Wykres pochodnej $\dot{\omega}^*$

Tabela 1.
 Zestawienie wyników pomiarów prędkości kątowej

t_k	pomiar1. $\tilde{\omega}(t_k)$	pomiar2. $\tilde{\omega}(t_k)$	pomiar3. $\tilde{\omega}(t_k)$	pomiar4. $\tilde{\omega}(t_k)$
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.002	0.60	0.18	0.18	0.36
0.004	0.64	0.49	1.23	0.40
0.006	1.79	0.85	0.66	1.68
0.008	1.43	1.40	1.87	1.43
0.010	2.29	2.07	1.72	2.17
.....
1.000	122.34	122.16	122.86	122.17
1.002	123.19	121.65	123.18	122.59
1.004	121.28	122.22	121.54	121.87
1.006	122.11	122.41	121.16	121.84
1.008	121.07	121.68	122.58	122.02
1.010	121.23	121.96	121.99	121.85
.....
1.490	102.43	102.20	102.68	102.71
1.492	103.07	102.42	103.53	102.53
1.494	103.48	102.91	102.76	103.67
1.496	102.77	102.92	102.22	102.02
1.498	102.12	102.29	102.04	102.56
1.500	102.50	102.90	103.50	102.75

Do oceny poprawności modelu zastosujemy test sprawdzający czy reszty modelu podlegają autokorelacji pierwszego rzędu. W tym celu musimy zweryfikować hipotezę mówiącą, że współczynnik autokorelacji jest równy zero. Ma ona postać: $H_0: \rho = 0$. Do weryfikacji posłużymy się testem von Neumanna [4]: na podstawie n reszt e_{t_k} modelu, obliczamy wartość statystyki Q określonej wzorem

$$Q = \frac{n \sum_{i=2}^n (e_{t_i} - e_{t_{i-1}})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n e_{t_i}^2},$$

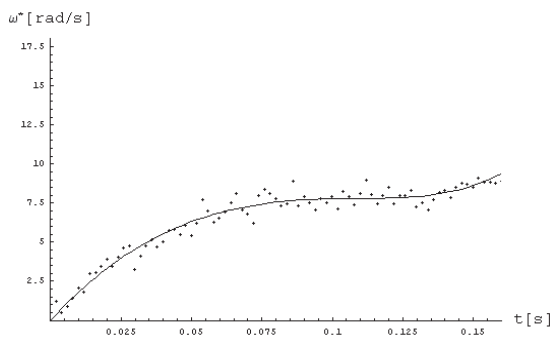
Wartość statystyki Q porównujemy z krytyczną wartością Q_α , taką, że zachodzi $P(Q \leq Q_\alpha) = \alpha$. Sposób weryfikacji hipotezy zależy od hipotezy alternatywnej, a postać jej wskazuje nam znak estymatora $\hat{\rho}$. Gdy $\hat{\rho} > 0$, to testujemy hipotezy

$$H_0: \rho = 0; H_1: \rho > 0$$

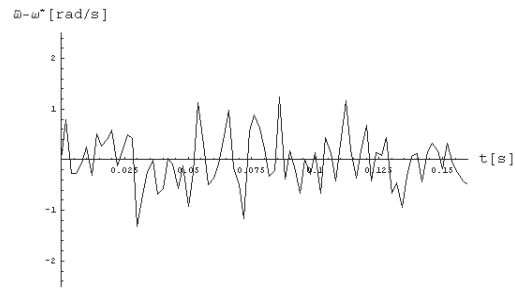
Dla liczby obserwacji $n > 60$ statystyka Q ma asymptotyczny rozkład normalny $N\left(\frac{2n}{n-1}, \sqrt{\frac{4}{n}}\right)$.

Jeżeli obliczona wartość Q spełnia nierówność $Q \leq Q_\alpha$, to hipotezę H_0 odrzucamy, tzn. występuje autokorelacja składników losowych e_i modelu. Otrzymanie nierówności $Q > Q_\alpha$, nie powoduje odrzucenia hipotezy H_0 o braku autokorelacji błędów losowych. Można wtedy przyjąć, że dane pomiarowe są dobrze opisane za pomocą hiperbolicznych funkcji sklepanych.

Dla zilustrowania dokładności opisu przebiegu prędkości kątowej silnika przeprowadzimy analizę pierwszym przedziale czasu $t \in [0, 0.1]$ [s]. Dane pomiarowe $\tilde{\omega}(t_k)$ z tego przedziału czasowego, wartości $\hat{\omega}(t_k)$ obliczone z modelu oraz wartości reszt $e_{t_k} = \tilde{\omega}(t_k) - \hat{\omega}(t_k)$ zawiera tabela 2. oraz rysunki (6)-(7).



Rys. 6. Wartości pomiarowe $\tilde{\omega}(t_k)$. Linia ciągła oznacza wyznaczone z modelu przebieg prędkości kątowej



Rys. 7. Wykres reszt $e_{t_k} = \tilde{\omega}(t_k) - \hat{\omega}(t_k)$

Tabela 2. Zestawienie danych pomiarowych i wyznaczonych z modelu

t_k	$\tilde{\omega}(t_k)$	$\hat{\omega}(t_k)$	e_{t_k}
0.000	0.0	0.00	0.00
0.002	1.18	0.39	0.79
0.004	0.49	0.76	-0.27
0.006	0.85	1.12	-0.27
0.008	1.40	1.47	-0.07
0.010	2.07	1.81	0.26
0.012	1.82	2.13	-0.31
0.014	2.96	2.45	0.51
0.016	3.02	2.75	0.27
0.018	3.44	3.04	0.40
0.020	3.90	3.32	0.58
0.022	3.46	3.58	-0.12
0.024	4.00	3.84	0.16
0.026	4.59	4.09	0.50
0.028	4.73	4.32	0.41
0.030	3.23	4.55	-1.32
0.032	4.07	4.77	-0.70
0.034	4.73	4.97	-0.24
0.036	5.16	5.17	-0.01
0.038	4.68	5.36	-0.68
0.040	4.98	5.54	-0.56
0.042	5.73	5.71	0.02
0.044	5.79	5.87	-0.08
0.046	5.46	6.02	-0.56
0.048	6.05	6.17	-0.12
0.050	5.39	6.31	-0.92
0.052	6.19	6.44	-0.25
0.054	7.68	6.56	1.12
0.056	6.98	6.67	0.31
0.058	6.29	6.78	-0.49
0.060	6.52	6.88	-0.36
0.062	6.89	6.98	-0.09
0.064	7.54	7.06	0.48
0.066	8.13	7.15	0.98
0.068	7.06	7.22	-0.16
0.070	6.79	7.29	-0.50
0.072	6.19	7.35	-1.16
0.074	7.98	7.41	0.57
0.076	8.36	7.47	0.89
0.078	8.13	7.51	0.62
0.080	7.78	7.56	0.22
0.082	7.28	7.60	-0.32
0.084	7.41	7.63	-0.22
0.086	8.89	7.66	1.23
0.088	7.30	7.69	-0.39
0.090	7.88	7.71	0.17
0.092	7.51	7.73	-0.22
0.094	7.08	7.75	-0.67
0.096	7.77	7.76	0.01
0.098	7.48	7.77	-0.29
0.100	7.92	7.78	0.14

Obliczenia dla powyższych danych są następujące:

$$\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2 = 25.10800,$$

$$\sum_{i=2}^n e_i^2 = 15.07170,$$

$$Q = 1.69990,$$

$$n = 50$$

Dla poziomu istotności $\alpha = 0.05$ wartość krytyczna $Q_\alpha = 1.57695$. Ponieważ zachodzi nierówność $Q = 1.69990 > Q_\alpha = 1.57695$ więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że współczynnik autokorelacji $\rho = 0$, to znaczy nie występuje istotna autokorelacja. Można zatem uznać za prawidłowe oszacowanie danych pomiarowych hiperbolicznymi funkcjami sklepanymi.

4. UWAGI I WNIOSKI

Zaletą podanego algorytmu jest to, że dane pomiarowe nie muszą być rejestrowane w chwilach równoodległych. Natomiast dla węzłów równoodległych algorytm interpolacji przyjmuje prostszą postać.

Interpolująca funkcja sklejana ma postać (14), gdzie

$$a_{0i} = y_i - \frac{M_i}{\sigma^2}, \quad a_{1i} = (y_{i-1} - y_i - \frac{M_{i-1}}{\sigma^2} + \frac{M_i}{\sigma^2}) \frac{1}{h},$$

$$a_{2i} = \frac{M_i e^{\sigma h} - M_{i-1}}{2\sigma^2 \sinh \sigma h}, \quad a_{3i} = \frac{M_{i-1} - M_i e^{-\sigma h}}{2\sigma^2 \sinh \sigma h}.$$

Natomiast macierze układu (13) przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu & v & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ v & 2\mu & v & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & v & 2\mu & v & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & v & 2\mu & v \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & v & \mu \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{y_1 - y_0}{h} - y'(t_0) \\ \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h} \\ \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h} \\ \vdots \\ \frac{y_N - 2y_{N-1} + y_{N-2}}{h} \\ -\frac{y_N - y_{N-1}}{h} + y'(t_N) \end{bmatrix},$$

oraz

$$v = \frac{\sinh \sigma h - \sigma h}{\sigma^2 h \sinh \sigma h}, \quad \mu = \frac{\sigma^2 h \cosh \sigma h - \sinh \sigma h}{\sigma^2 h \sinh \sigma h},$$

$$i \in \overline{1, N}.$$

Wielomiany interpolacyjne, chociaż przechodzą przez opisane zbiory punktów wykazują znaczne oscylacje. Oscylacje te można zmniejszyć poprzez zastosowanie wielomianowych funkcji sklepanych w szczególności wielomianowych funkcji sklepanych trzeciego stopnia. Niedostatki wielomianowych funkcji sklepanych można wyeliminować stosując hiperboliczne funkcje sklepane. W wielu przypadkach funkcje te pozwalają na uzyskanie dokładniejszych wyników. Dotyczy to głównie wygładzenia danych pomiarowych oraz rozwiązywania równań różniczkowych.

Można wykazać [5], że najlepsze wyniki uzyskuje się przy zastosowaniu takiego σ , aby $\sigma h = 1$.

LITERATURA

- [1] DE BOOR C.: *A practical guide to splines*. Springer Verlag. New York- Heidelberg-Rerlin 1978.
- [2] FORTUNA Z., MACUGOW B., WĄSOWSKI J.: *Metody numeryczne*. WNT, Warszawa 1982.
- [3] KOSMA.. Z.: *Wstęp do metod funkcji sklepanych*. Skrypt uczelniany Nr 16, Wyższa Szkoła Inżynierska w Radomiu, Radom 1986.
- [4] STANISZ A.: *Przystępny kurs statystyki z wykorzystaniem programu STATISTICA PL na przykładach z medycyny*, Tom II, Kraków 2000.
- [5] WIERSZYNIN W.W., ZAWIAŁOW J.S., PAWŁOW N.N.: *Ekstremalne własności splajnow i zadacza sglaziwania*, Nauka, Nowosybirsk 1988.
- [6] ZAŁĘSKA-FORNAL A., ZELMA M.: *Testing the dynamics of the electric engine by means of basic splines*; 3-rd International Congress on Technical Diagnostics, Diagnostics'2004, September 6-9, 2004, Poznań Poland, Diagnostyka, Vol.30, tom 2, 2004, pp.203-206.

Dr Agata Załęska –Fornal- adiunkt w Katedrze Matematyki i Fizyki Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni. Zajmuje się niezawodnością urządzeń technicznych, identyfikacją układów dynamicznych. Członek PTBN.

Dr Marek Zelma- adiunkt w Katedrze Matematyki i Fizyki Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni. Sfera zainteresowań to: teoria sterowana, identyfikacja układów dynamicznych, zastosowanie funkcji sklepanych jednej i wielu zmiennych w aproksymacji. Członek PTM.