**Stanisław Poleszak**

dr inż. Stanisław Poleszak
Akademia Marynarki Wojennej im. Bohaterów Westerplatte
Zakład Technologii Prac Podwodnych
81–103 Gdynia 3, ul. Śmidowicza 69
E-mail. s.poleszak@amw.gdynia.pl

# MODELOWANIE STOCHASTYCZNE CZĘSTOTLIWOŚCI WYSTĘPOWANIA ŚMIERTELNYCH WYPADKÓW NURKOWYCH

*W niniejszym artykule przedstawiono rozkład śmiertelnych wypadków nurkowych. Jako matematyczny model liczby dni odstępu pomiędzy śmiertelnymi wypadkami nurkowymi przyjęto proces Poissona z losowym parametrem o rozkładzie Gamma.*

*Na podstawie danych empirycznych obliczono parametry tego rozkładu oraz dokonano weryfikacji zgodności modelu teoretycznego z rozkładem empirycznym stosując test $\lambda$ Kołmogorowa. Przeprowadzone obliczenia potwierdziły zgodność przyjętego modelu z rozkładem empirycznym dla wszystkich przyjętych poziomów istotności.*

***Słowa kluczowe:*** *nurkowanie, śmiertelny wypadek nurkowy, proces Poissona.*

# A STOCHASTIC MODEL OF THE FREQUENCY OF FATAL DIVING ACCIDENTS

*This article presents the distribution of fatal diving accidents. A Poisson process with random parameter with gamma distribution was adopted as a mathematical model of the number of days between fatal diving accidents. On the basis of the empirical data, the parameters of distribution and verification have been calculated and the compliance of the theoretical model and empirical distribution has been verified by the Kolmogorov test $\lambda$.*

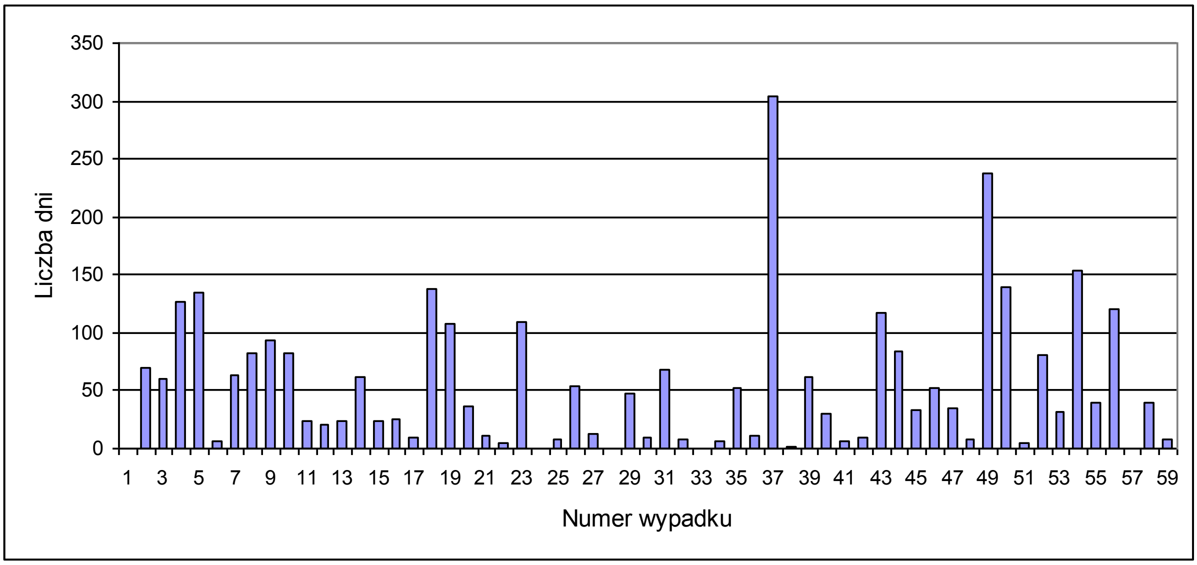
*The calculations have confirmed the compliance of the accepted model with the empirical distribution for all the accepted levels of significance.*

***Key words:*** *diving, fatal diving accident, Poisson process.*

**Wykaz ważniejszych oznaczeń:**

| | |
|---|---|
| *E(t)* | - wartość oczekiwana rozkładu |
| *f(t)* | - gęstość rozkładu |
| *F(t)* | - dystrybuanta teoretyczna rozkładu |
| $\hat{F}(t)$ | - dystrybuanta empiryczna rozkładu |
| p | - poziom istotności |
| *R(t)* | - funkcja „przeżycia” |
| $\rho_o$ | - gęstość otoczenia |
| $\bar{x}$ | - średnia arytmetyczna |

W latach 1999 – 2007 wydarzyło się, co najmniej 56 śmiertelnych wypadków nurkowych, które miały miejsce w Polsce oraz tych, których ofiarami byli obywatele polscy, a wydarzyły się poza granicami kraju. W ich wyniku śmierć poniosło 60 nurków. Rozkład czasowy śmiertelnych wypadków nurkowych w analizowanym okresie był bardzo nierównomierny. Najkrótsza przerwa pomiędzy poszczególnymi wypadkami wynosiła 0 dni, natomiast najdłuższa przerwa wynosiła aż 304 dni. Na wykresie przedstawionym poniżej przedstawiono dane dotyczące liczby dni przerwy pomiędzy wypadkami nurkowymi w latach 1999-2007.




Rys. 1. Liczba dni odstępu pomiędzy kolejnymi ofiarami śmiertelnych wypadków nurkowych w latach 1999-2007.

Średni odstęp pomiędzy nurkowaniami, w których nurek/nurkowie zginęli pod wodą wynosi w przybliżeniu 54 dni. W tabeli oraz na wykresie przedstawionym poniżej przedstawiono rozkład liczby dni odstępu pomiędzy wypadkami nurkowymi w latach 1999-2007.

**Glossary:**

| | |
|---|---|
| *E(t)* | - expected distribution value |
| *f(t)* | - distribution density |
| *F(t)* | - theoretical distribution function |
| $\hat{F}(t)$ | - empirical distribution function |
| p | - level of significance |
| *R(t)* | - 'survival' function |
| $\rho_o$ | - ambient density |
| $\bar{x}$ | - arithmetic mean |

In the years 1999 - 2007, at least 56 fatal diving accidents concerning Polish divers (60 of which died) took place, either in Poland or abroad. Time distribution of fatal diving accidents in this period was very uneven. The shortest interval between the accidents was 0 days and the longest interval was up to 304 days. The chart shown below presents data on the number of days between diving accidents in the years 1999-2007.

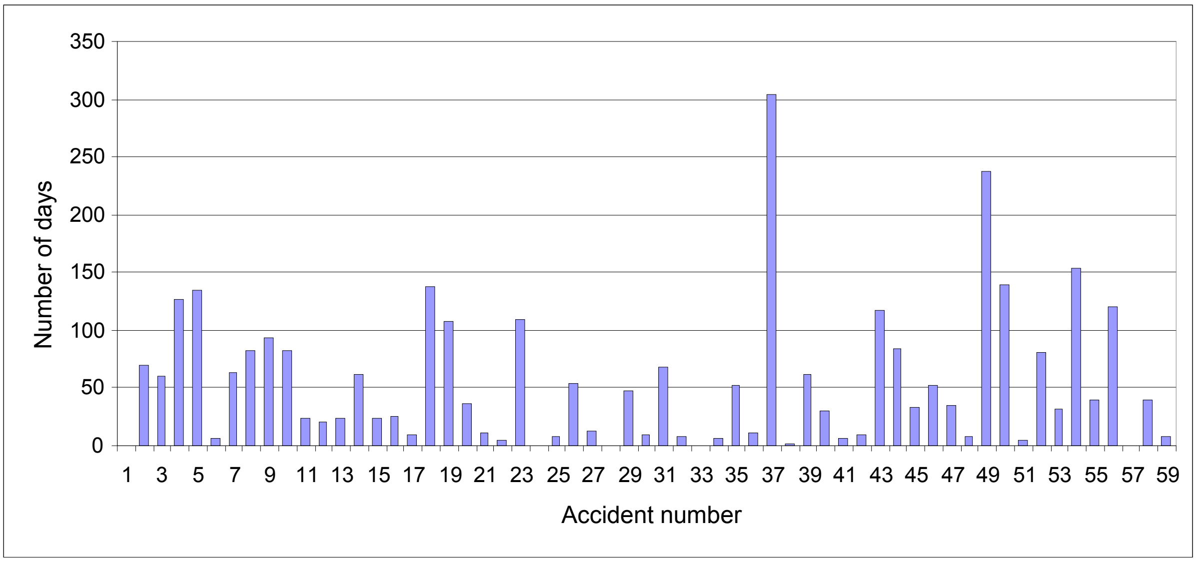


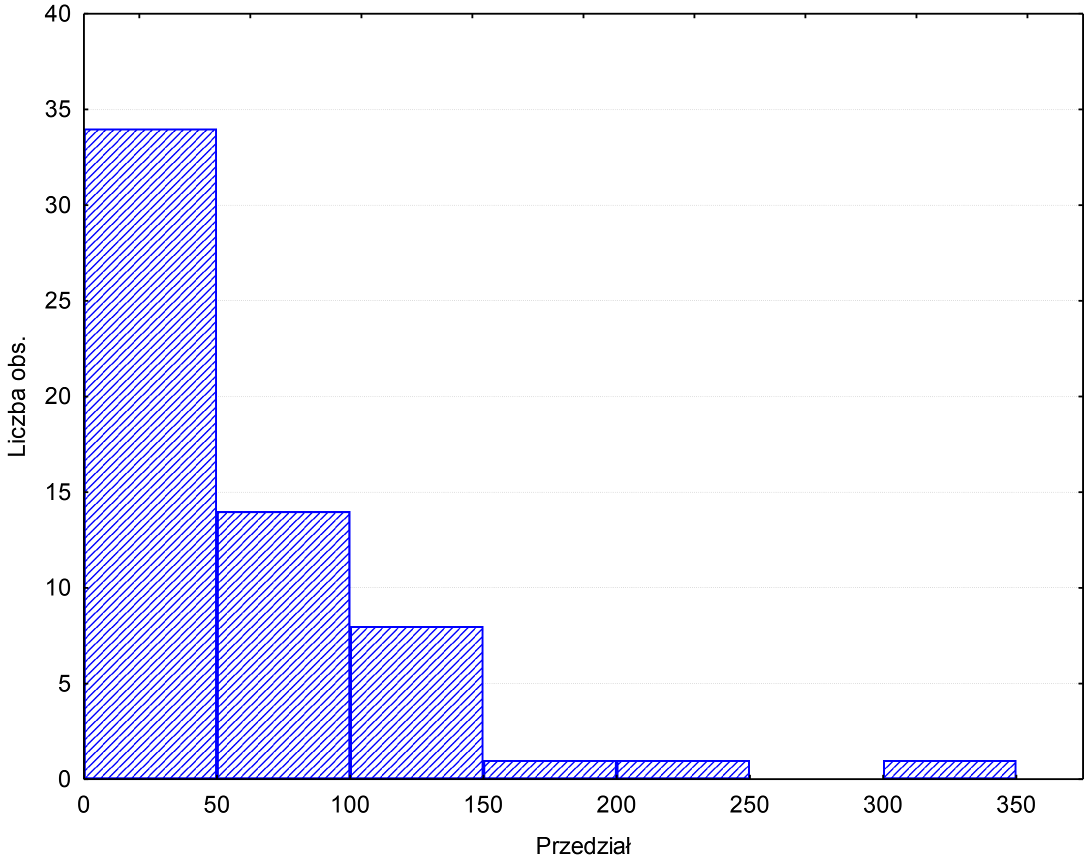

Fig. 1. Number of days between consecutive victims of fatal diving accidents in 1999-2007.

The mean interval between dives in which a diver / divers died under water is approximately 54 days. The table and the graph below show the distribution of the number of days between diving accidents in the years 1999-2007.

Tabela 1.

Rozkład liczby dni odstępu pomiędzy śmiertelnymi wypadkami nurkowymi w latach 1999 – 2007.

| Liczba dni odstępu | Liczba obserwacji |
|---|---|
| [-] | [-] |
| 0 ÷ 50 | 34 |
| 51 ÷ 100 | 14 |
| 101 ÷ 150 | 8 |
| 151 ÷ 200 | 1 |
| 201 ÷ 250 | 1 |
| 251÷ 350 | 1 |




Rys. 2. Rozkład liczby dni odstępu pomiędzy śmiertelnymi wypadkami nurkowymi w latach 1999 – 2007.

Niech $\{X(t): \quad t \geq 0\}$ będzie proces stochastycznym, którego wartość w chwili $t$ oznacza liczbę śmiertelnych wypadków nurkowych w przedziale czasu $[0, t]$. Ponieważ liczby tego rodzaju wypadków w rozłącznych przedziałach czasu są niezależnymi wielkościami losowymi można przyjąć, że proces losowy $\{X(t): \quad t \geq 0\}$ jest procesem o niezależnych i dodatnich przyrostach.

Table 1.

Distribution of the number of days between fatal diving accidents in 1999 – 2007.

| Time interval (days) | Number of observations |
|---|---|
| [-] | [-] |
| 0 ÷ 50 | 34 |
| 51 ÷ 100 | 14 |
| 101 ÷ 150 | 8 |
| 151 ÷ 200 | 1 |
| 201 ÷ 250 | 1 |
| 251÷ 350 | 1 |

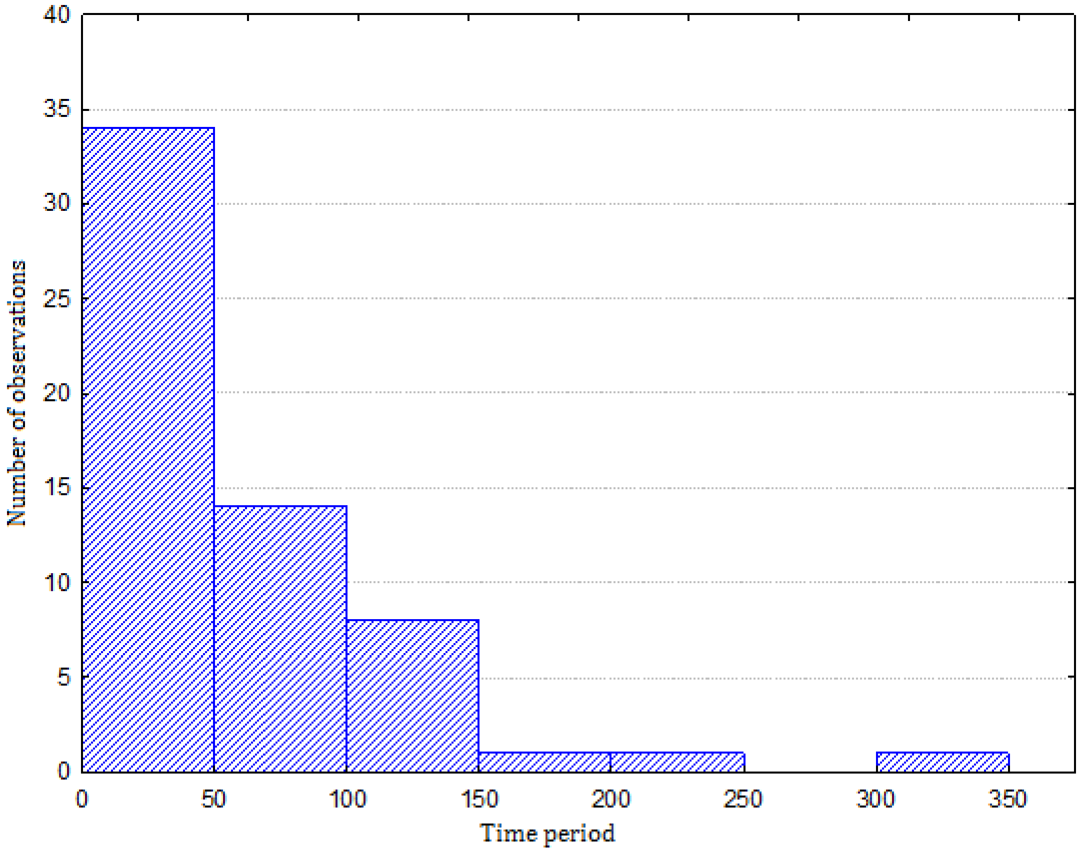



Fig. 2. Distribution of the number of days of interval between fatal diving accidents in the years 1999 – 2007.

Let $\{X(t): \quad t \geq 0\}$ be stochastic process whose value at time *t* is the number of fatal diving accidents in the period of time $[0, t]$. Because the numbers of such accidents in disjoint periods of time are independent random quantities, it can be assumed that the random process $\{X(t): \quad t \geq 0\}$ is a process of independent and positive increments. Each process with independent increments is a Markov process. You can accept the hypothesis that with some specific external conditions, it is a Poisson process.

Każdy proces o niezależnych przyrostach jest procesem Markowa. Można przyjąć hipotezę, że przy ustalonych warunkach zewnętrznych jest to proces Poissona. Jednowymiarowy rozkład Poissona jest określony równością:

$$P(X(t)=k\mid\lambda)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},\quad k=0,1,2,\ldots\quad \lambda>0. \tag{1}$$

Wartość oczekiwana tego procesu przy ustalonym parametrze $\lambda>0$ jest liniową funkcją czasu:

$$m(t)=E[X(t)]=\lambda\, t,\quad t\geq 0 \tag{2}$$

Odchylenie standardowe tego procesu wynosi:

$$\sigma(t)=\sqrt{V[X(t)]}=\sqrt{\lambda\, t},\quad t\geq 0 \tag{3}$$

Chcąc uwzględnić losowe przyczyny wypadków należy przyjąć założenie, że parametr $\lambda$, który determinuje oczekiwaną liczbę wypadków, jest zmienną losową. Przyjmujemy założenie, że ta zmienna losowa ma dwuparametrowy rozkład gamma o gęstości:

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{v}}{\Gamma(\upsilon)}u^{v-1}e^{-\alpha u} & dla\quad u>0\\ 0 & dla\quad u\leq 0\end{cases} \tag{4}$$

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite wyznaczymy jednowymiarowy bezwarunkowy rozkład tego procesu:

$$P(X(t)=k)=\int_0^\infty \frac{(ut)^k e^{-ut}}{k!}\frac{\alpha^v u^{v-1}e^{-\alpha u}}{\Gamma(v)}du=\frac{\alpha^v t^k}{k!\Gamma(v)}\int_0^\infty u^{k+v-1}e^{-(t+\alpha)u}du,\quad k=0,1,2,\ldots\quad \lambda>0. \tag{5}$$

Dokonując podstawienia:

$$(t+\alpha)u=x \tag{6}$$

Stąd:

$$dx=(t+\alpha)du \tag{7}$$

Oraz

$$u=\frac{x}{t+\alpha}\quad,\qquad du=\frac{dx}{t+\alpha}. \tag{8}$$

One-dimensional Poisson distribution is determined by the following equation:

$$P(X(t)=k\,|\,\lambda)=\frac{(\lambda t)^{k}\,e^{-\lambda t}}{k!},\quad k=0,1,2,...\quad \lambda>0. \tag{1}$$

The expected value of this process for a fixed parameter $\lambda > 0$ is a linear function of time:

$$m(t)=E[X(t)]=\lambda\, t,\quad t\geq 0 \tag{2}$$

The standard deviation of this process is:

$$\sigma(t)=\sqrt{V[X(t)]}=\sqrt{\lambda\, t},\quad t\geq 0 \tag{3}$$

In order to take account of random causes of accidents, it should be assumed that the parameter $\lambda$ which determines the expected number of accidents is a random variable. We assume that this random variable has a two-parameter gamma distribution with density:

$$f(u)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\upsilon)}u^{\nu-1}e^{-\alpha u} & dla \quad u>0\\ 0 & dla \quad u\leq 0\end{cases} \tag{4}$$

Using the formula for total probability, we determine the one-dimensional unconditional distribution of this process:

$$P(X(t)=k)=\int_{0}^{\infty}\frac{(ut)^{k}\,e^{-ut}}{k!}\frac{\alpha^{\nu}u^{\nu-1}e^{-\alpha u}}{\Gamma(\nu)}du=\frac{\alpha^{\nu}t^{k}}{k!\,\Gamma(\nu)}\int_{0}^{\infty}u^{k+\nu-1}e^{-(t+\alpha)u}du,\quad k=0,1,2,\ldots\quad \lambda>0. \tag{5}$$

Having substituted:

$$(t+\alpha)u=x \tag{6}$$

Hence:

$$dx=(t+\alpha)du \tag{7}$$

And

$$u=\frac{x}{t+\alpha}\quad ,\qquad du=\frac{dx}{t+\alpha}. \tag{8}$$

Korzystając z własności funkcji gamma otrzymujemy:

$$P(X(t)=k)=\frac{x^{v}t^{k}}{k!(t+x)^{k+v}}\frac{\Gamma(k+v)}{\Gamma(v)}=\frac{v(v+1)\dots(v+k-1)\Gamma(v)}{k!\Gamma(v)}a^{v}\frac{t^{k}}{(t+\alpha)^{k+v}} \tag{9}$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$P(X(t)=k)=\frac{v(v+1)\dots[v+(k-1)]}{k!}\left(\frac{t}{t+\alpha}\right)^{k}\left(\frac{a}{t+a}\right)^{v},\quad k=0,1,2,\dots\quad \lambda>0. \tag{10}$$

Dla ustalonego *t* rozkład ten nosi nazwę złożonego rozkładu Poissona.

Dla $k=0$ otrzymujemy:

$$P(X(t)=0)=(\frac{\alpha}{\alpha+t})^{v}=P(T>t)=R(t), \tag{11}$$

Zmienna losowa *T* oznacza tu czas, jaki upływa między kolejnymi wypadkami.

Dystrybuanta rozkładu zmiennej losowej *T* ma postać:

$$F(t)=P(T\le t)=1-(\frac{\alpha}{\alpha+t})^{v},\quad t\ge 0 \tag{12}$$

Gęstość rozkładu otrzymamy obliczając pochodną dystrybuanty. Ostatecznie otrzymujemy:

$$f(t)=\frac{v\alpha^{v}}{(\alpha+t)^{v+1}},\quad t\ge 0 \tag{13}$$

Wartość oczekiwaną tej zmiennej losowej można obliczyć:

$$E(T)=\int_{0}^{\infty}(\frac{\alpha}{\alpha+t})^{v}dt= \tag{14}$$

$$=\alpha^{v}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{(\alpha+t)^{v}}=\alpha^{v}\int_{0}^{\infty}x^{-v}dx=\alpha^{v}\frac{x}{-v+1}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{a^{v}}{1-v}\frac{1}{x^{v-1}}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{\alpha^{v}}{(v-1)\alpha^{v-1}}=\frac{\alpha}{(v-1)}$$

Using the properties of the gamma function we obtain:

$$P(X(t)=k)=\frac{x^{v}t^{k}}{k!(t+x)^{k+v}}\frac{\Gamma(k+v)}{\Gamma(v)}=\frac{v(v+1)\ldots(v+k-1)\Gamma(v)}{k!\Gamma(v)}a^{v}\frac{t^{k}}{(t+\alpha)^{k+v}} \tag{9}$$

Finally, we get:

$$P(X(t)=k)=\frac{v(v+1)\ldots[v+(k-1)]}{k!}\left(\frac{t}{t+\alpha}\right)^{k}\left(\frac{a}{t+a}\right)^{v},\quad k=0,1,2,\ldots\quad \lambda>0. \tag{10}$$

For fixed *t*, this distribution is called the compound Poisson distribution.

For $k=0$ we get:

$$P(X(t)=0)=(\frac{\alpha}{\alpha+t})^{v}=P(T>t)=R(t), \tag{11}$$

Random variable *T* refers here to the time that elapses between successive accidents.

Distribution function of the distribution of random variable *T* has the following form:

$$F(t)=P(T\leq t)=1-(\frac{\alpha}{\alpha+t})^{v},\quad t\geq 0 \tag{12}$$

We get distribution density by calculating the derivative of the distribution. Finally, we get:

$$f(t)=\frac{v\alpha^{v}}{(\alpha+t)^{v+1}},\quad t\geq 0 \tag{13}$$

The expected value of this random variable can be calculated in the following way:

$$E(T)=\int_{0}^{\infty}(\frac{\alpha}{\alpha+t})^{v}dt= \tag{14}$$

$$=\alpha^{v}\int_{0}^{\infty}\frac{dt}{(\alpha+t)^{v}}=\alpha^{v}\int_{0}^{\infty}x^{-v}dx=\alpha^{v}\frac{x}{-v+1}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{a^{v}}{1-v}\frac{1}{x^{v-1}}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{\alpha^{v}}{(v-1)\alpha^{v-1}}=\frac{\alpha}{(v-1)}$$

Obliczmy drugi moment zwykły:

$$E(T^2) = 2\int_0^\infty tR(t)dt = 2\alpha^v \int_0^\infty \frac{t}{(\alpha+t)^v}dt = 2\alpha^v\left[\int_0^\infty \frac{\alpha+t}{(\alpha+t)^v}dt - \alpha^v\int_0^\infty \frac{dt}{(\alpha+t)^v}\right] = \tag{15}$$

$$= 2\alpha^v\left[\int_0^\infty (\alpha+t)^{1-v}dt - \alpha\int_0^\infty (\alpha+t)^{-v}dt\right]$$

$$= 2\alpha^v\left[\left(\frac{1}{2-v}\frac{1}{(\alpha+t)^{v-2}}\right) - \alpha\left(\frac{1}{1-v}\frac{1}{(\alpha+t)^{v-1}}\right)_0^\infty\right] = 2\alpha^v\left[\frac{1}{v-2}\frac{1}{\alpha^{v-2}} - \frac{\alpha}{v-1}\frac{1}{\alpha^{v-1}}\right]$$

$$= \frac{2\alpha^v}{\alpha^{v-2}}\left[\frac{1}{v-2} - \frac{1}{v-1}\right] = 2\alpha^2\left[\frac{v-1-v+2}{(v-2)(v-1)}\right] = \frac{2\alpha^2}{(v-2)(v-1)}$$

Obliczmy wariancje w oparciu o znany związek:

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2 \tag{16}$$

$$= \frac{2\alpha^2}{(v-2)(v-1)} - \left(\frac{\alpha}{v-1}\right)^2 = \frac{\alpha^2[2v-2-v+2)]}{(v-2)(v-1)^2} = \frac{\alpha^2 v}{(v-2)(v-1)^2}$$

Stąd odchylenie standardowe wyraża się wzorem:

$$\sigma(T) = \frac{\alpha}{v-1}\sqrt{\frac{v}{v-2}} \tag{17}$$

Podsumowując, dystrybuanta rozkładu zmiennej losowej *T* oznaczająca odstęp czasowy między wypadkami śmiertelnymi ma postać:

$$F(t) = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^v \qquad \textit{dla } t > 0 \tag{18}$$

Funkcja „przeżycia” wyraża się wzorem:

$$R(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^v \qquad \textit{dla } t > 0 \tag{19}$$

We can also calculate the second normal moment:

$$E(T^2) = 2\int_0^\infty tR(t)dt = 2\alpha^v \int_0^\infty \frac{t}{(\alpha+t)^v} dt = 2\alpha^v \left[ \int_0^\infty \frac{\alpha+t}{(\alpha+t)^v} dt - \alpha^v \int_0^\infty \frac{dt}{(\alpha+t)^v} \right] = \quad (15)$$

$$= 2\alpha^v \left[ \int_0^\infty (\alpha+t)^{1-v} dt - \alpha \int_0^\infty (\alpha+t)^{-v} dt \right]$$

$$= 2\alpha^v \left[ \left( \frac{1}{2-v} \frac{1}{(\alpha+t)^{v-2}} \right) - \alpha \left( \frac{1}{1-v} \frac{1}{(\alpha+t)^{v-1}} \right)_0^\infty \right] = 2\alpha^v \left[ \frac{1}{v-2} \frac{1}{\alpha^{v-2}} - \frac{\alpha}{v-1} \frac{1}{\alpha^{v-1}} \right]$$

$$= \frac{2\alpha^v}{\alpha^{v-2}} \left[ \frac{1}{v-2} - \frac{1}{v-1} \right] = 2\alpha^2 \left[ \frac{v-1-v+2}{(v-2)(v-1)} \right] = \frac{2\alpha^2}{(v-2)(v-1)}$$

On the basis of some known relations, we can calculate the variance:

$$V(T) = E(T^2) - (E(T))^2 \quad (16)$$

$$= \frac{2\alpha^2}{(v-2)(v-1)} - \left( \frac{\alpha}{v-1} \right)^2 = \frac{\alpha^2 [2v-2-v+2)]}{(v-2)(v-1)^2} = \frac{\alpha^2 v}{(v-2)(v-1)^2}$$

Hence the standard deviation is presented as:

$$\sigma(T) = \frac{\alpha}{v-1} \sqrt{\frac{v}{v-2}} \quad (17)$$

In conclusion, the distribution function of the distribution of random variable *T* referring to the period of time between fatal accidents has the following form:

$$F(t) = 1 - \left( \frac{\alpha}{\alpha+t} \right)^v \qquad \textit{for } t > 0 \quad (18)$$

The ‘survival’ function is expressed as:

$$R(t) = \left( \frac{\alpha}{\alpha+t} \right)^v \qquad \textit{for } t > 0 \quad (19)$$

Gęstość rozkładu zmiennej losowej *T* określona jest równością:

$$f(t) = \frac{v\alpha^v}{(\alpha + t)^{v+1}} \qquad \text{dla } t \geq 0 \tag{20}$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej *T* wyraża się wzorem:

$$E(T) = \frac{\alpha}{v-1} \tag{21}$$

Odchylenie standardowe ma postać:

$$\sigma(T) = E(T)\sqrt{\frac{v}{v-2}} \tag{22}$$

Zauważmy, że wielkości te zależą od dwóch parametrów $\alpha$ oraz $v$. Pojawia się naturalne pytanie, w jaki sposób określić te parametry. Jedną z metod estymacji nieznanych parametrów rozkładu jest tak zwana metoda momentów. Polega ona na tym, że podstawowe parametry rozkładu zastępuje się ich statystycznymi oszacowaniami uzyskanymi na podstawie wyników obserwacji. W tym przypadku wartość oczekiwaną $E(T)$ zastępujemy średnią $\bar{x}$, a wariancję $V(T)$ wariancją z próby $s^2$. Rozwiązując odpowiedni układ równań otrzymujemy nieznane parametry rozkładu.

Zauważmy, że:

$$\frac{V(T)}{(E(T))^2} = \frac{v}{v-2} \tag{23}$$

Niech:

$$c = \frac{v}{v-2} \tag{24}$$

Stąd:

$$c(v-2) = v \tag{25}$$

$$cv - v = 2c$$

$$v(c-1) = 2c$$

Oraz

$$v = \frac{2c}{c-1} \tag{26}$$

The distribution density of the random variable *T* is determined by the following equation:

$$f(t) = \frac{v\alpha^{v}}{(\alpha + t)^{v+1}} \qquad \text{for } t \geq 0 \qquad (20)$$

The expected value of random variable *T* is expressed as:

$$E(T) = \frac{\alpha}{v-1} \qquad (21)$$

The standard deviation is:

$$\sigma(T) = E(T)\sqrt{\frac{v}{v-2}} \qquad (22)$$

Note that these values depend on two parameters, $\alpha$ and $v$. The question is how to determine them. One method of estimating the unknown parameters of the distribution is the so-called method of moments. It consists in the fact that the basic parameters of the distribution are replaced by their statistical estimates obtained from the results of observation. In this case, we replace the expected value $E(T)$ with the average $\bar{x}$ and the variance $V(T)$ with a variance from sample $s^2$. Having solved the corresponding system of equations, we get the unknown parameters of the distribution.

Note that:

$$\frac{V(T)}{(E(T))^2} = \frac{v}{v-2} \qquad (23)$$

Suppose:

$$c = \frac{v}{v-2} \qquad (24)$$

Hence:

$$c(v-2) = v \qquad (25)$$

$$cv - v = 2c$$

$$v(c-1) = 2c$$

And

$$v = \frac{2c}{c-1} \qquad (26)$$

Przyjmując, że:

$$V(T) = s_n^2 \tag{27}$$

Oraz

$$E(X) = \bar{x}_n \tag{28}$$

Otrzymujemy:

$$\alpha = \bar{x}_n \left[ \frac{2c}{c-1} - 1 \right] \tag{29}$$

Ostatecznie:

$$\alpha = \bar{x}_n \frac{c+1}{c-1} \tag{30}$$

Gdzie:

$$c = \frac{s_n^2}{\bar{x}_n^2} \tag{31}$$

Przyjmując do obliczeń dane statystyczne otrzymane podczas analizy śmiertelnych wypadków nurkowych, to wartość średnia odstępu pomiędzy nurkowaniami w których nurek zginął pod wodą, obliczona zgodnie z wzorem (32) wynosi 53,983 dnia.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{32}$$

gdzie:

$x_1$, $x_2$, $x_n$ - ciąg wartości poszczególnych danych,

Następnie obliczono wariancję empiryczną, która jest średnią arytmetyczną kwadratów odchyleń poszczególnych wartości zmiennej od średniej arytmetycznej całej zbiorowości. Do jej oszacowania przyjęto wzór:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{33}$$

Wartość wariancji empirycznej dla rzeczywistych zaobserwowanych wartości wynosi 4550,641.

Wyniki powyższych obliczeń oraz wartości obliczonych parametrów *c*, $\nu$ oraz $\alpha$ zgodnie z wzorami (31), (26) oraz (30) zamieszczono poniżej:

Assuming that:

$$V(T) = s_n^2 \tag{27}$$

And:

$$E(X) = \bar{x}_n \tag{28}$$

We get:

$$\alpha = \bar{x}_n \left[ \frac{2c}{c-1} - 1 \right] \tag{29}$$

Finally:

$$\alpha = \bar{x}_n \frac{c+1}{c-1} \tag{30}$$

Where:

$$c = \frac{s_n^2}{\bar{x}_n^2} \tag{31}$$

If we take the statistical data obtained from the analysis of fatal diving accidents for our calculations, then the average interval between the dives in which a diver was killed under water, calculated according to formula (32), is 53.983 day.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{32}$$

where:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ - sequence of data values

Then, the empirical variance was calculated, which is the arithmetic mean of the squared deviations of each variable from the arithmetic mean across the population. For its estimation, the following formula was adopted:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{33}$$

The value of the empirical variance for the actual observed values is 4550.641.

The results of these calculations and the calculated values of the parameters *c*, $\nu$, and $\alpha$ according to formulas (31), (26) and (30) is given below:

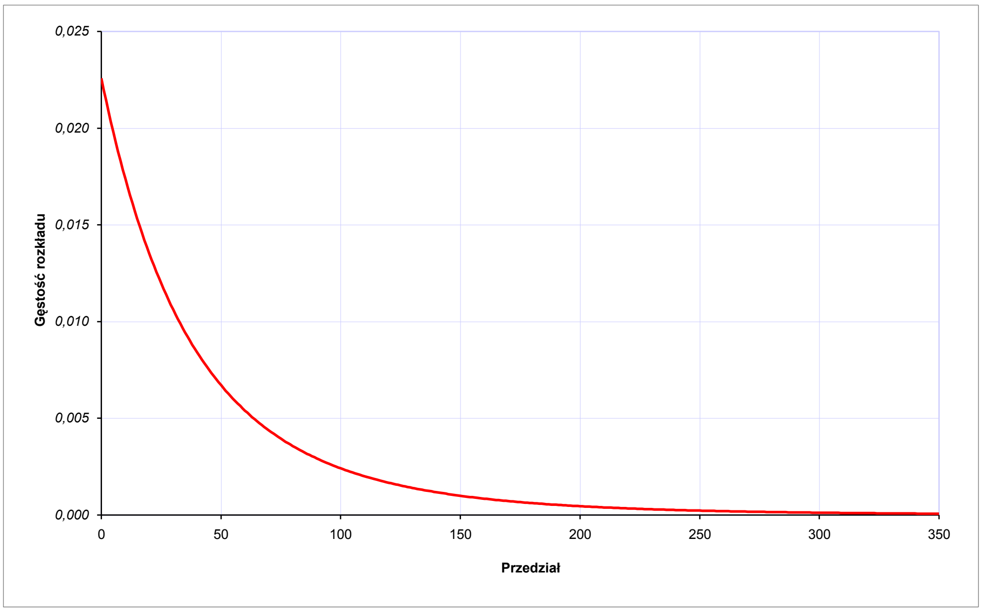
| Parametr | obserwowany |
|---|---|
| $\bar{x}$ | 53,983 |
| $s^2$ | 4550,641 |
| s | 67,46 |
| c | 1,562 |
| $\nu$ | 5,559 |
| $\alpha$ | 246,093 |

Zatem wzór (20) przedstawia się następująco:

$$f(t) = \frac{5{,}559 * 246{,}093^{5{,}559}}{(246{,}093 + t)^{5{,}559+1}}$$

Wartość gęstości rozkładu zmiennej losowej *T* zamieszczono w tabeli i przedstawiono na wykresie zamieszczonym poniżej:

| $x_i$ | *f(t)* |
|---|---|
| 0 | 0,02259 |
| 50 | 0,00671 |
| 100 | 0,00241 |
| 150 | 0,00100 |
| 200 | 0,00046 |
| 250 | 0,00023 |
| 300 | 0,00012 |
| 350 | 0,00007 |




Rys. 3. Gęstość rozkładu liczby dni odstępu pomiędzy śmiertelnymi wypadkami nurkowymi w latach 1999 – 2007.

| Parameter | observed |
|---|---|
| $\overline{x}$ | 53,983 |
| $s^2$ | 4550,641 |
| s | 67,46 |
| c | 1,562 |
| $\nu$ | 5,559 |
| $\alpha$ | 246,093 |

Thus, formula (20) is as follows:

$$f(t) = \frac{5{,}559 * 246{,}093^{5{,}559}}{(246{,}093 + t)^{5{,}559+1}}$$

The value of the distribution density of the random variable *T* is given in the table and shown on the chart below:

| $x_i$ | *f(t)* |
|---|---|
| 0 | 0,02259 |
| 50 | 0,00671 |
| 100 | 0,00241 |
| 150 | 0,00100 |
| 200 | 0,00046 |
| 250 | 0,00023 |
| 300 | 0,00012 |
| 350 | 0,00007 |

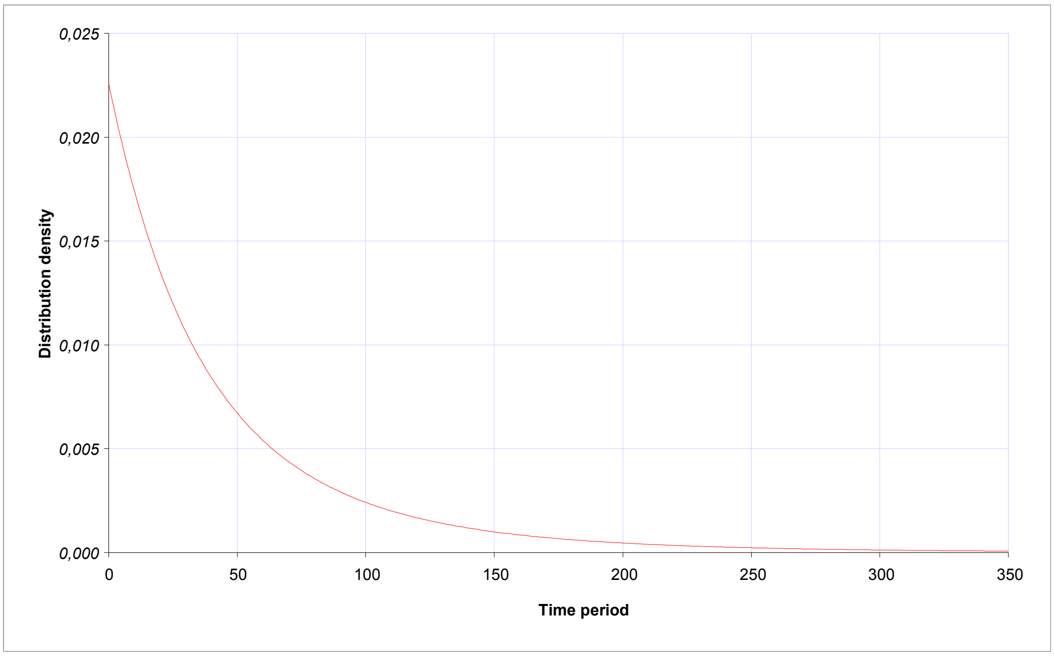



Fig. 3. The distribution density of the number of days between fatal diving accidents in the years 1999 – 2007.

Podstawiając do obliczeń dane statystyczne to dystrybuanta rozkładu zmiennej losowej *T* oznaczająca odstęp czasowy między wypadkami obliczona zgodnie z wzorem (18):

$$F(t) = 1 - \left(\frac{246{,}09}{246{,}09 + t}\right)^{5{,}559} \qquad \textit{dla } t \geq 0$$

Dla wartości *t* przedstawia się następująco:

| *t* | Wartość dystrybuanty teoretycznej | Wartość dystrybuanty empirycznej |
|---|---|---|
| | $F(t)$ | $\hat{F}(t)$ |
| [dni] | - | - |
| 0 | 0,000 | 0,000 |
| 50 | 0,642 | 0,576 |
| 100 | 0,850 | 0,814 |
| 150 | 0,929 | 0,949 |
| 200 | 0,963 | 0,966 |
| 250 | 0,980 | 0,983 |
| 350 | 0,993 | 1,000 |

W celu weryfikacji hipotezy, że rozkład liczby dni odstępu pomiędzy śmiertelnymi wypadkami nurkowymi określony przez dystrybuantę teoretyczną daną wzorem (18) jest zgodny z dystrybuantą empiryczną dokonano obliczenia wartości dystrybuanty teoretycznej zestawiając ją z wartościami dystrybuanty empirycznej.

Wartość statystyki obliczono z wzoru:

$$D = \sup | F_n(x) - F(x) | \qquad (34)$$

Stąd po podstawieniu otrzymujemy:

| *t* | $\lvert F_n(x) - F(x) \rvert$ |
|---|---|
| 0 | 0,000 |
| 50 | 0,066 |
| 100 | 0,036 |
| 150 | 0,020 |
| 200 | 0,003 |
| 250 | 0,003 |
| 350 | 0,003 |

Następnie dokonano obliczenia statystyki $\lambda$ Kołmogorowa korzystając ze wzoru:

$$\lambda = D\sqrt{n} \qquad (35)$$

When we use the statistical data in the calculations, then the distribution function of the distribution of the random variable *T* referring to the period of time between the accidents calculated in accordance with the formula (18):

$$F(t) = 1 - \left( \frac{246{,}09}{246{,}09 + t} \right)^{5{,}559} \qquad \textit{for } t \geq 0$$

For values *t* is as follows:

| *t* | The value of the theoretical distribution function | The value of the empirical distribution function |
|---|---|---|
| | $F(t)$ | $\hat{F}(t)$ |
| [days] | - | - |
| 0 | 0,000 | 0,000 |
| 50 | 0,642 | 0,576 |
| 100 | 0,850 | 0,814 |
| 150 | 0,929 | 0,949 |
| 200 | 0,963 | 0,966 |
| 250 | 0,980 | 0,983 |
| 350 | 0,993 | 1,000 |

In order to verify the hypothesis that the distribution of the number of days between fatal diving accidents, determined by theoretical distribution function calculated according to formula (18), is consistent with the empirical distribution function value, the values of the theoretical distribution function were calculated and compared with the values of the empirical distribution function.

The value of statistics was calculated from the formula:

$$D = \sup |F_n(x) - F(x)| \qquad (34)$$

Hence, after substitution, we get:

| *t* | $\lvert F_n(x) - F(x) \rvert$ |
|---|---|
| 0 | 0,000 |
| 50 | 0,066 |
| 100 | 0,036 |
| 150 | 0,020 |
| 200 | 0,003 |
| 250 | 0,003 |
| 350 | 0,003 |

Then, $\lambda$ statistics was calculated using the Kolmogorov formula:

$$\lambda = D\sqrt{n} \qquad (35)$$

Otrzymano wartość D = 0,066. Ponieważ $\sqrt{n} = 7,68$ to wartość empiryczna statystyki Kołmogorowa wynosi $\lambda = 0,507$. Z tabeli rozkładu granicznego Kołmogorowa dla trzech przyjętych poziomów istotności $\alpha=0,01$; $\alpha=0,05$ oraz $\alpha=0,1$ odczytujemy kolejno wartości $\lambda_\alpha = 1,627$, $\lambda_\alpha = 1,358$ oraz $\lambda_\alpha = 1,2$.

Ponieważ wartość empiryczna statystyki Kołmogorowa wynosząca $\lambda = 0,507$ jest mniejsza od wartości rozkładu granicznego $\lambda_\alpha$ dla każdego przyjętego poziomu istotności, to w wyniku tego nie ma podstaw, aby hipotezę, że rozkład liczby dni odstępu pomiędzy śmiertelnymi wypadkami nurkowymi określony wzorem (18) jest zgodny z rozkładem empirycznym. W tej sytuacji przyjęty model należy uznać za adekwatny do rzeczywistości.

The value obtained was D = 0.066. Since $\sqrt{n} = 7.68$, the empirical value of Kolmogorov statistics is $\lambda = 0.507$. From the table of Kolmogorov limiting distribution for the three levels of significance adopted $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.05$ and $\alpha = 0.1$, we get the following values $\lambda_\alpha = 1.627$, $\lambda_\alpha = 1.358$ and $\lambda_\alpha = 1.2$.

Since the empirical value to Kolmogorov statistics amounting $\lambda = 0.507$ is less than the value of the limiting distribution $\lambda_\alpha$ for each accepted level of significance, there is no reason to reject the hypothesis that the distribution of the number of days between fatal diving accidents defined by formula (18) is consistent with empirical distribution. In this situation, the model adopted should be regarded as adequate to reality.

**LITERATURA/ BIBLIOGRAPHY**


1. Balicki A.: Analiza przeżycia i tablice wymieralności. Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2006.
2. Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1969.
3. Grabski F., Jaźwiński J.: Funkcja o losowych argumentach w zagadnieniach niezawodności, bezpieczeństwa i logistyki. Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Warszawa 2009.
4. Greń J. Modele i zadania statystyki matematycznej. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1970.
5. Plucińska A., Pluciński E.: Elementy probabilistyki. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1979.